Fibonacci-Folge

Von: René Hugelshofer
Schulstufe: Sekundarstufe II (10-11 Jahre)
Fach: Mathematik
Benötigte Zeit: 90 minutes

Ziele

- Eine rekursive Folge mit Hilfe der Tabellenkalkulation und stückweise definierten Funktionen darstellen können.
- Die exponentielle Regression auf eine Folge anwenden können.
- Den Wachstumsfaktor ermitteln können und den Zusammenhang mit geometrischen Folgen erkennen.

Voraussetzungen

Schülerinnen und Schüler

- kennen die Exponentialfunktion und geometrische Folgen
- haben Grundfertigkeiten in der Handhabung der Tabellenkalkulation.

Aufgabe

Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1$, $a_2 =1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

a) Stelle die Fibonnacci-Folge in der Tabellenkalkulation dar. Definiere in der Kopfzeile der ersten Kolonne die ersten 20 natürlichen Zahlen mit xf:=seq(n,n,1,20) (Index der Folge). Schreibe in B1 und B2 die Anfangswerte 1 und in B3 die obige Rekursionsformel. Kopiere diese Formel nach unten. Benenne die Kolonne mit yf.

b) Betrachte das Wachstum der Fibonnacci-Folge. Handelt es sich um ein exponentielles Wachstum? Zeichne dazu die Punkte (xf; yf) auf (Streu Plot-Scatterplot), führe eine exponentielle Regression durch und zeichne die Regressionskurve. Hat die Fibonacci-Folge exponentielles Verhalten.

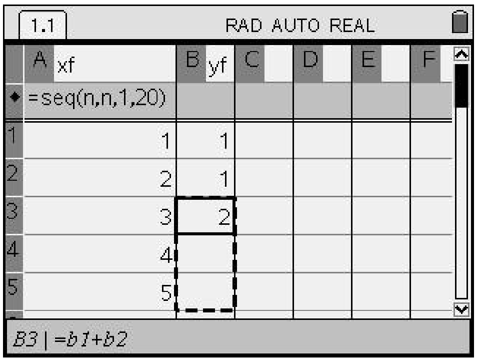
c) Bestimme den Wachstumsfaktor, bzw. den Quotienten der geometrischen Folge. Zeige, dass die Folge der Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder der Fibonnacci-Folge gegen das Verhältnis $q=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ des Goldenen Schnitts konvergiert. Berechne auch $p = \frac{1}{q}$ und q-1.

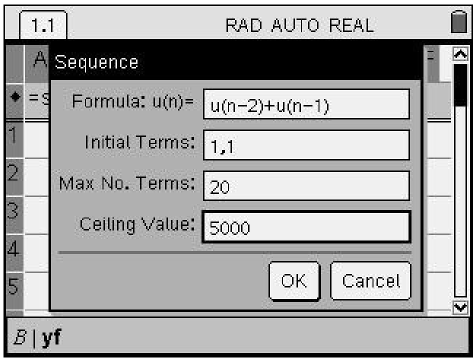
d) Der französische Mathematiker Binet veröffentlichte 1843 eine explizite Formel $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(q^n - (-p)^n)$ für die Fibonacci-Folge. Zeige, dass diese Formel die Fibonacci-Folge exakt darstellt.

e) Definiere die Fibonacci-Folge rekursiv mit Hilfe der Vorlage „Stückweise definierte Funktion-Piecewise Functions“

Lösung

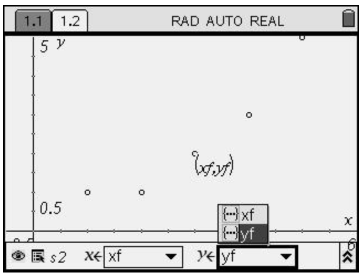
a) Es werden im Folgenden einige Möglichkeiten für die Erzeugung von Folgen in der Tabellenkalkulation angegeben. In Kolonne A (Bild rechts, PC-Bildausschnitt) wurde die Folge der ersten 20 natürlichen Zahlen erzeugt mit xf:=seq(n,n,1,20) in der Kopfzeile. Als weitere Möglichkeit kann auch das Menü „Folgegenerierung-Generate Sequence“ verwendet werden. Dort wird der Befehl seqn benutzt, welcher eigentlich für rekursive Folgen vorgesehen ist. Die entsprechende direkte Eingabe in der Kopfzeile wäre dann seqn(n,{1},20).
In der zweiten Kolonne, welche wir mit yf bezeichnen, wird die Fibonacci-Folge erzeugt. Setze dazu für B1 und B2 die Anfangswerte 1 ein und in B3 die Formel „=B1+B2“. Diese Formel kann auf zwei Arten nach unten kopiert werden: Wähle bei der ersten Methode die Zellen B3 bis B20 aus und wähle den Menübefehl „Unten ausfüllen-Fill Down“.
Wähle bei der zweiten Methode (nur PC) die Zelle B3 durch Mausklick und fahre mit dem Zeiger an die rechte untere Ecke der Zelle, bis ein + erscheint. Ziehe dieses + nach unten bis zur Zelle B20.

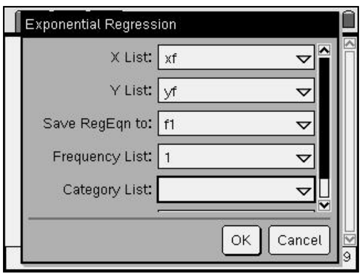


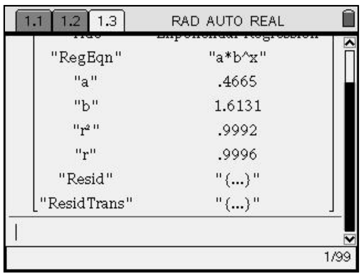


Die Fibonacci-Folge kann aber auch rekursiv im Menü „Folgegenerierung-Generate Sequence“ erzeugt werden (Bild oben, „Begrenzung-Ceiling“ ist optional und bezeichnet den maximalen Wert der Folge). Äquivalent dazu kann die Formel yf:=seqn(u[n-2]+u[n-1],{1,1},20) direkt in die Kopfzeile eingegeben werden.

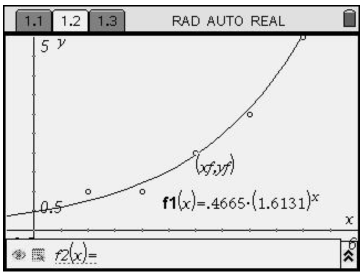
b) Die Fibonacci-Folge wächst sehr schnell, es könnte sich um ein exponentielles Wachstum handeln. Um dies nachzuprüfen, erstellen wir mit den Listen xf und yf in Graphs&Geometry einen „Streu-Plot-Scatterplot“ (Funktionsmodus unter „Graphiktyp-Graph Type“). Die einzelnen Plots sind mit s1, s2, …,s99 bezeichnet. Die Listen für die x- und y-Werte werden in den Klappmenüs x und y gewählt (Bild links unten, Koordinatensystem angepasst). Wir führen eine exponentielle Regression in einer neuen Calculator Seite aus (Bild Mitte, auch in der Tabellenkalkulation möglich). Die Regressionsfunktion ist in f1 gespeichert. Der Regressionskoeffizient (Bild rechts) ist sehr gut, also ist die Exponentialkurve eine gute Näherung.

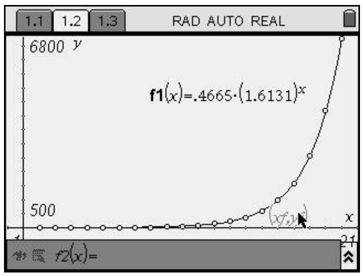






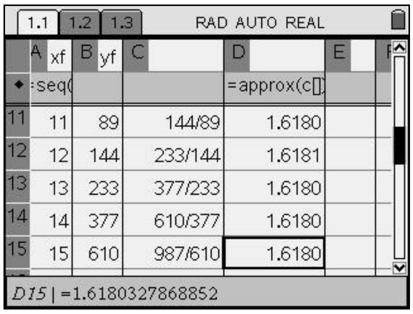
Die Funktion stimmt für die kleinsten Werte nicht gut mit der Fibonnacci-Folge überein (Bild rechts). Stellt man aber die ganze Folge dar mit Achseneinstellungen in „Dialog Achseneinstellungen-Window Settings“, so ist die Übereinstimmung sehr gut (Bild ganz rechts).

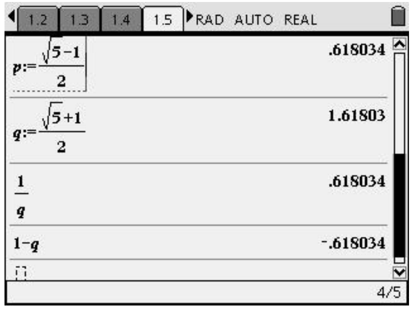




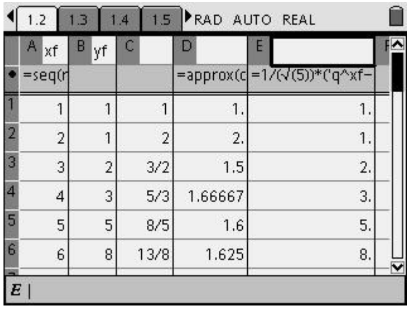
c) Wir bestimmen nun den Wachstumsfaktor q (Quotient der vermuteten geometrischen Folge) in einer neuen Kolonne mit Hilfe der Quotienten je zweier aufeinander folgender Glieder. Beachte, dass in der exakten Darstellung im Zähler und Nenner jeweils wieder eine Fibonacci-Folge auftritt (Kolonne C). Mit approx(…) erhält man numerische Werte (Kolonne D). Diese konvergieren gegen das Verhältnis des Goldenen Schnitts $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.618$. Für den Kehrwert des Verhältnisses des Goldenen Schnitts gilt übrigens $p = \frac{1}{q} = q - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$.

Bemerkung: Der Quotient konvergiert auch für beliebige Anfangswerte, z.B. 8, 11 gegen das Verhältnis des Goldenen Schnitts.





d) Berechne in Kolonne E (Bild oben rechts, PC-Bildschirmausschnitt) die Formel von Binet und verifiziere die Übereinstimmung mit der Fibonacci-Folge in Kolonne B. Beachte dass die näherungsweise geometrische Reihe von der Form $f_n = a_0 * q^n$ mit $a_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ist und wie erwähnt eine gute Annäherung ist, ausser für die ersten Folgenglieder.



e) Wähle „Stückweise definierte Funktion - Piecewise Function“ (Bild unten links) und definiere die rekursive Funktion gemäss Bild rechts. Bei so definierten rekursiven Funktionen stösst der Handheld allerdings schnell an die Rechengrenzen.