T³ ÖSTERREICH

Thema: Entwickeln und Nutzen von Formeln (Modulen)

Helmut Heugl ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Module, Formeln, Parameterdarstellung, Winkel zwischen Vektoren, Schnitt von Geraden, Normalvektorform, Winkelsymmetrale

Schülermaterial:

Aufgabe: Module entwickeln und nutzen

a) **Winkel zwischen Vektoren:** Stelle eine Formel für den Winkel zwischen zwei Vektoren auf und speichere sie unter dem Namen „*winkel(a,b)*“ (a und b sind die beiden Vektoren)
b) **Winkelsymmetrale:** Stelle eine Formel für einen Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen zweier Vektoren a, b auf und speichere sie unter dem Namen „wsv(a,b)“.
c) **Normalvektorform:** Stelle eine Formel für die Normalvektorform einer Geraden auf und speichere sie unter dem Namen „nvf(p,nv)“ (P ist ein Punkt auf der Geraden, nv der Normalvektor). Gegeben 2 Punkte: A(-5/2) und B(3/-4). Gesucht ist die Gleichung der Streckensymmetrale.
d) **Schnitt von Geraden:** Die Gerade g ist gegeben durch einen Punkt G(-7/4) und den Richtungsvektor $\vec{a}$ =[3;1] und die Gerade h ist gegeben durch den Punkt H(3/-4) und den Richtungsvektor $\vec{b}$ =[2;-5]. Gibt es einen Schnittpunkt? Wenn ja, berechne ihn!
e) **Inkreismittelpunkt:** Gegeben Dreieck ABC: A(1/1), B(15/1), C(6/13). Gesucht ist der Inkreismittelpunkt I.

✂---

Didaktischer Kommentar:

Module sind komplexe Wissenseinheiten

- ***in denen Wissen komprimiert wird, und***
- ***in denen Operationen durch diese Kapselung als Ganzes abrufbar und einsetzbar werden [Dörfler w., 1991)***

Das Nutzen von Modulen ist nicht neu, jede Formel, die gelernt wird oder aus der Formelsammlung entnommen wird, ist letztlich ein Modul. Das modulare Denken und Arbeiten hat durch das Werkzeug allerdings eine neue Qualität bekommen. Schülerinnen und Schüler speichern mathematische Objekte unter einem Namen und schaffen dadurch einen Modul, ein neues Vokabel in ihrer mathematischen Sprache. Aber auch die Technologie bietet eine Vielzahl von Modulen – das sind mathematische Funktionen, die unter ihrem Namen in der Toolbox zu finden sind.

Wichtiger Grundsatz:
Die Entwicklung solcher Module sollte ein Teil einer White Box Phase sein, in der die mathematischen Grundlagen erarbeitet werden. Erst danach sollen diese Module als Black Boxes genutzt werden.

In der **analytischen Geometrie** werden einige solcher mathematischen Funktionen von der Technologie angeboten. Auch sie sollten erst nach einer Phase verstehenden Lernens als Black Box verwendet werden. Beispiele:

- „norm(a)" – Betrag eines Vektors a
- „unitV(a)" – Einheitsvektor von a
- „dotP(a,b)" – Skalares Produkt der Vektoren a und b
- „crossP(a,b)" – Vektorielles Produkt der Vektoren a und b

Das Entwickeln neuer Module erfolgt durch **Definieren von Formeln als Funktionen der gegebenen Größen.**

Mögliche Lösungen:

Zu a) Winkel zwischen Vektoren:

$winkel(a,b):=\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(a,b)}{\mathrm{norm}(a)\cdot \mathrm{norm}(b)}\right)$ *Done* $c:=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3.\\1.\end{bmatrix}$ $d:=\begin{bmatrix}-2\\7\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-2.\\7.\end{bmatrix}$ $winkel(c,d)$ 87.5104 $r:=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ $s:=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$ $winkel(r,s)$ 90.	Der Modul „winkel" wird als Funktion der gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert. Der Modul kann für das Berechnen von Winkeln zwischen Vektoren aber auch zum Beweisen genutzt werden: Beweise, dass die Vektoren $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$ orthogonal sind.

Zu b) Winkelsymmetralvektor:

$a:=\begin{bmatrix}ax\\ay\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}ax\\ay\end{bmatrix}$ $b:=\begin{bmatrix}bx\\by\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}bx\\by\end{bmatrix}$ $wsv(a,b):=\text{unitV}(a)+\text{unitV}(b)$ $\quad$ *Done* $wsv(a,b)$ $\quad\begin{bmatrix}\frac{ax}{\sqrt{ax^2+ay^2}}+\frac{bx}{\sqrt{bx^2+by^2}}\\ \frac{ay}{\sqrt{ax^2+ay^2}}+\frac{by}{\sqrt{bx^2+by^2}}\end{bmatrix}$	Für die Definition des Moduls Winkelsymmetralvektor („wsv“) nutzt man den von der Technologie angebotenen Modul „unitV“ zur Ermittlung des Einheitsvektors. Nachdem die SchülerInnen den Modul entwickelt haben, kann er als Black Box bei Anwendungen genutzt werden.

Zu c) Normalvektorform

$xv:=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}:p:=\begin{bmatrix}px\\py\end{bmatrix}:nv:=\begin{bmatrix}nx\\ny\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}nx\\ny\end{bmatrix}$ $nvf(p,nv):=\text{dotP}(nv,xv)=\text{dotP}(nv,p)$ $\quad$ *Done* $a:=\begin{bmatrix}^-5\\2\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}3\\^-4\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}3\\^-4\end{bmatrix}$ $hab:=\frac{a+b}{2}$ $\quad\begin{bmatrix}^-1\\^-1\end{bmatrix}$ $nvf(hab,b-a)$ $\quad 8\cdot x-6\cdot y=^-2$ $\frac{8\cdot x-6\cdot y=^-2}{2}$ $\quad 4\cdot x-3\cdot y=^-1$	Die entsprechenden Vektoren definieren. Normalvektorform („nvf“) als Funktion von Punkt und Normalvektor definieren. Nutzen des Technologiemoduls für das skalare Produkt („dotP“). Schritt 1: Punkte als Vektoren definieren Schritt 2: Halbierungspunkt Schritt 3: Modul für die Normal-vektorform nutzen Schritt 4 Gleichung vereinfachen

Zu d) Schnitt von Geraden. Nutzen der definierten Module und der Module der Technologie.

$g(t):=\begin{bmatrix}^-7\\4\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ $\quad$ *Done* $h(s):=\begin{bmatrix}3\\^-4\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}2\\^-5\end{bmatrix}$ $\quad$ *Done* $\text{solve}(g(t)=h(s),\{t,s\})$ $\quad s=^-2 \text{ and } t=2$ $g(t)\|t=2$ $\quad\begin{bmatrix}^-1\\6\end{bmatrix}$ 4/99	Geraden als Funktionen g(t) und h(s) speichern Nutzen des „solve“-Befehls g(2) bilden oder t=2 mit dem „|“-Operator einsetzen

Zu e) Inkreismittelpunkt:

$a:=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}: b:=\begin{bmatrix}15\\1\end{bmatrix}: c:=\begin{bmatrix}6\\13\end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix}6\\13\end{bmatrix}$ $wsv(b-a,c-a)$ → $\begin{bmatrix}\frac{18}{13}\\\frac{12}{13}\end{bmatrix}$ $wsv(a-b,c-b)$ → $\begin{bmatrix}\frac{-8}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}$ $w\alpha(s):=a+s\cdot\begin{bmatrix}\frac{18}{13}\\\frac{12}{13}\end{bmatrix}$ → *Done* $w\beta(t):=b+t\cdot\begin{bmatrix}\frac{-8}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}$ → *Done* $\text{solve}(w\alpha(s)=w\beta(t),\{s,t\})$ → $s=\frac{13}{3}$ and $t=5$ $w\beta(5)$ → $\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$	Nutzen des Moduls „Winkelsymmetral-vektor“ Geraden in Parameterform aufstellen und schneiden
$a:=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}: b:=\begin{bmatrix}15\\1\end{bmatrix}: c:=\begin{bmatrix}6\\13\end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix}6\\13\end{bmatrix}$ $\text{solve}(w\alpha(s)=w\beta(t),\{s,t\})$ → false $w\alpha(s):=a+s\cdot wsv(b-a,c-a)$ → *Done* $w\beta(t):=b+t\cdot wsv(a-b,c-b)$ → *Done* $\text{solve}(w\alpha(s)=w\beta(t),\{s,t\})$ → $s=\frac{13}{3}$ and $t=5$ $w\beta(5)$ → $\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$	Variante 2: Arbeiten mit den Namen der mathematischen Objekte. Dadurch liegt der Schwerpunkt auf Planungsaktivitäten.