CAS – Projekt T^3 Österreich

T³ ÖSTERREICH

Thema: Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen

Helmut Heugl ☒ TI-Nspire^{TM} CAS

Schlagworte:

Zahlenfolgen, Termdarstellung, arithmetische Folgen, geometrische Folgen, Reihen, unendliche Reihen, geometrische Reihen, Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert.

Unterrichtsmaterial:

Aufgabenbeispiele zum Thema, TI-Nspire-Files zu den Aufgaben, fertige Applets zum Experimentieren.

Didaktischer Kommentar

Arithmetische Folgen sind als Modelle für diskretes lineares Wachstum von Bedeutung, geometrische Folgen für diskretes, exponentielles Wachstum. Geometrische Folgen und Reihen sind besonders wichtig im Anwendungsbereich Finanzmathematik. Reihen sind eine wichtige Grundlage für Grundprobleme der Integralrechnung.

Technologie unterstützt wegen der Visualisierungsmöglichkeiten in der experimentellen Phase die Begriffsbildung. Bei komplexeren Anwendungsproblemen vor allem in der Finanzmathematik kann das Operieren ausgelagert werden und damit liegt der Schwerpunkt der mathematischen Handlungen beim Modellbilden, Interpretieren und Argumentieren.

1. Grundlagen

Arithmetische Folgen

Definition:
Eine Folge $\langle a_n \rangle$ mit n $\in$ (oder *) heißt arithmetische Folge, wenn die absolute Änderung zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant ist: $a_{n+1} - a_k = k$ für alle n $\in$. Die Konstante k heißt Differenz der arithmetischen Folge.

Termdarstellung: $a_n = k \cdot n + a_0$ mit k, $a_0 \in$ und n $\in$.

Rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n + k$ für k $\in$ und n $\in$

Eigenschaften arithmetischer Folgen:

Eine arithmetische Folge ist

- streng monoton steigend, wenn k>0 ist,
- streng monoton fallend, wenn k<0 ist,
- konstant, wenn k=0 ist.

Geometrische Folgen

Definition: Eine Folge $\langle b_n \rangle$ mit n ∈ (oder *) heißt geometrische Folge, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ für alle n ∈ . Die Konstante q heißt Quotient der geometrischen Folge.

Termdarstellung: $b_n = b_0 \cdot q^n$ mit q, b_0 ∈ und n ∈ .

Rekursive Darstellung: $b_{n+1} = b_n \cdot q$ für q ∈ und n ∈

Eigenschaften geometrischer Folgen:

Eine geometrische Folge ist
- beschränkt, wenn $|q| \le 1$,
- nicht beschränkt, wenn $|q| > 1$ ist.

Eine geometrische Folge ist
- streng monoton steigend, wenn q>1 ist,
- streng monoton fallend, wenn 0<q<1 ist,
- konstant, wenn q=1 ist,
- nicht monoton, wenn q<0 ist.

Eine geometrische Folge ist
- konvergent mit dem Grenzwert 0, wenn $|q| < 1$ist
- divergent, wenn $|q| > 1$ ist,
- konvergent mit dem Grenzwert b_0, wenn q=1 ist
- divergent, wenn q=-1 ist.

Reihen

Endliche arithmetische und geometrische Reihen

Ist $\langle a_1, a_2, a_3, ..., a_n \rangle$ eine endliche arithmetische Folge, so bezeichnet man die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ als die zugehörige **arithmetische Reihe**.

Ist $\langle b_1, b_2, b_3, ..., b_n \rangle$ eine endliche geometrische Folge, so bezeichnet man $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$ als die zugehörige **geometrische Reihe**.
Ist $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ eine endliche arithmetische Reihe so gilt für **die Summe s_n**:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Ist $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$ eine endliche geometrische Reihe, so gilt für die **Summe s_n**:

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Unendliche Reihen

Wie kann man einer unendlichen Folge $\langle a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \rangle$ eine Summe zuordnen?
Man bildet eine Folge von Teilsummen (Partialsummen):
$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

…

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Wenn die Folge < s_n | n ∈ *> einen Grenzwert s besitzt, so nennt man diesen Grenzwert **Summe der Reihe.**

Die Summe der unendlichen geometrischen Reihe mit einem Quotienten $|q| < 1$ hat die Formel:

$$s = b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

Anmerkung: die Herleitung der Formeln findet man in allen Schulbüchern.

2. Aufgabenbeispiele zu geometrischen Folgen und Reihen

Aufgabe 2.1: Wachstum der Bevölkerung

Quelle: Christian Zöpfl T3

In einer Stadt lebten am 1. Jänner 2014 genau 20.000 Einwohnerinnen und Einwohner, am 1. Jänner 2015 waren es exakt 21 000 Personen.

a) Stelle die Entwicklung der Einwohnerzahl bis zum 1. Jänner 2020 mit zwei verschiedenen Modellannahmen tabellarisch und graphisch dar:
   - Arithmetisches Wachstum
   - Geometrisches Wachstum

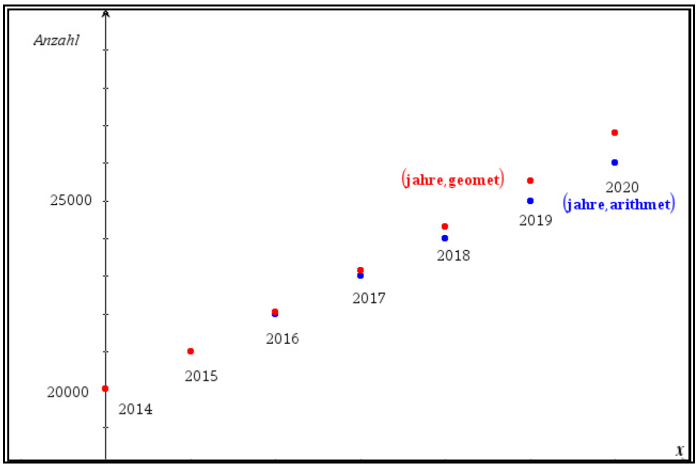
b) Nach wie viel Jahren ist der Unterschied zwischen den beiden Modellannahmen etwa 2000 Personen?

Mögliche Lösung:

a)

	A	B jahre	C arithmet	D geomet
=			=20000.+jahre*1000	=20000.*(21000/20000)^jahre
1	2014	0	20000.	20000.
2	2015	1	21000.	21000.
3	2016	2	22000.	22050.
4	2017	3	23000.	23152.5
5	2018	4	24000.	24310.1
6	2019	5	25000.	25525.6
7	2020	6	26000.	26801.9
8				
9				
10				

Weg 1: Arbeiten mit Werkzeugen von *List&Spreadsheets*



Weg 2: Der Graph wird mit der Funktionseingabe „*Scatter Plot*“ gezeichnet.

b)

$aw(n):=20000.+1000\cdot n$ *Done*

$gw(n):=20000.\cdot\left(\frac{21000}{20000}\right)^n$ *Done*

	A n	B arithmet	C geomet	D
=		=aw('n)	=gw('n)	
2	1	21000.	21000.	
3	2	22000.	22050.	
4	3	23000.	23152.5	
5	4	24000.	24310.1	
6	5	25000.	25525.6	
7	6	26000.	26801.9	
8	7	27000.	28142.	
9	8	28000.	29549.1	
10	9	29000.	31026.6	

A10 9

Weg 1: Experimentelle Lösung:

Man erzeugt in List&Spreadsheets eine Tabelle und versucht die Anzahl von Jahren zu finden, bei der der Unterschied etwa 2000 ist.

$aw(n):=20000.+1000\cdot n$ *Done*

$gw(n):=20000.\cdot\left(\frac{21000}{20000}\right)^n$ *Done*

$\text{solve}(gw(n)-aw(n)=2000,n)$ $n=-9.28724$ or $n=8.9481$

Weg 2:
Man löst das Problem exakt im CAS-Fenster.

Beim Lösen der Gleichung arbeitet man nicht mit den komplexen Termen, sondern mit ihren Namen. Damit kann die verbal formulierte Aufgabenstellung direkt in die Sprache der Mathematik umgewandelt werden.

Aufgabe 2.2: Bohren eines Schachtes

Beim Bohren eines Schachtes beträgt die erste Tagesleistung 60 m. An den folgenden Tagen nimmt sie jeweils um 5 Prozent pro Tag ab.

a) Wie viele Meter werden am 9. Tag gegraben?

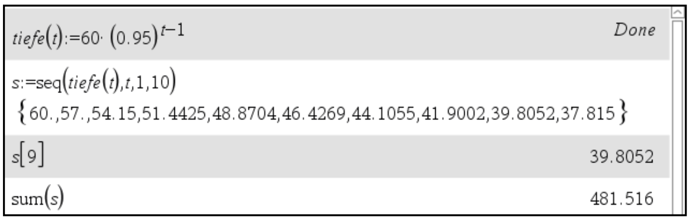
b) Welche Gesamttiefe ist am Ende des 10. Tages erreicht?

Löse diese Aufgabe auf zwei Arten:

Variante (1) Im CAS-Fenster (Calculator-Fenster)

Variante (2) Im Notesfenster (Nutze dabei die Möglichkeit der "Math Boxes".)

Mögliche Lösung:

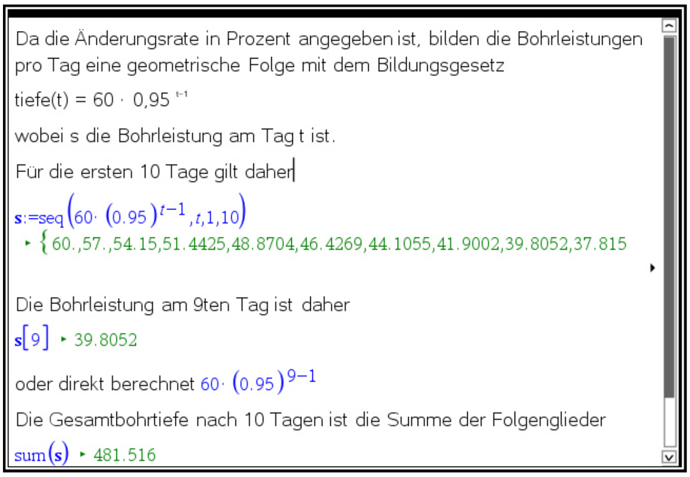


Variante 1: Lösung im CAS-Fenster: Nutzen des „*seq*"-Befehls

Nutzen des „*sum*"-Befehls aus der Toolbox *Statistics*

Didaktischer Kommentar zum Einsatz von Notes

Im klassischen Unterricht ist das Lernmedium in der Regel das Schülerheft, das von den Lernenden aktiv entwickelt wird. Die Möglichkeit, im Notesfenster Texte mit mathematischen Objekten zu verknüpfen, mit denen man auch operieren kann, eröffnet die Chance, eine neue Art von Lernmedium zu entwickeln.



Variante 2**:** Lösung im Notesfenster unter Verwendung von „*Math Boxes*"

Didaktischer Kommentar zu Aufgabe 2.3

Die Nutzung von Operatoren, wie Summe von n Elementen, Grenzwert von Funktionen, Grenzwert von Summen, usw. erfordert auch eine nötige Werkzeugkompetenz, die geübt werden muss. Damit beschäftigt sich die folgende Aufgabe.

Aufgabe 2.3: Übungen zur Werkzeugkompetenz

a) Nutzen des "Sequence"- Befehles ("*seq*")

Gegeben ist die Folge $u1(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Berechne die ersten 10 Glieder der Folge.

b) Nutzen des "Limes"-Befehls ("*lim*")

Berechne den Grenzwert der Folge u1(n)

c) Nutzen des Befehls "Summe von Elementen" aus der Toolbox "Statistics" (List Math →"*sum of Elements*")

Gegeben ist die Folge $u2(n)=5000\cdot 1{,}02^{n-1}$.
Berechne die Summe der ersten 10 Glieder der Folge u2(n).

d) Nutzen des Summenbefehls aus der Toolbox "Calculus" ("Sum")

Gegeben ist die Reihe $s1(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$

Berechne die Summe der ersten 10 Glieder, die Summe von n Gliedern und den Grenzwert der Summe für $n \to \infty$.

Mögliche Lösung:

a) "*Sequence*"-Befehl

b) „*Limes*“-Befehl

$u1(n) := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Done

seq$(u1(n), n, 1., 10)$
$\{2., 2.25, 2.37037, 2.44141, 2.48832, 2.52163, 2.5465, 2.56578, 2.58117, 2.$ ▸

$\lim\limits_{n \to \infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ e

c) „*Sum*“-Befehl

Toolbar *Statistics*

$u2(n) := 5000 \cdot (1.02)^{n-1}$ Done

seq$(u2(n), n, 1, 10)$
$\{5000., 5100., 5202., 5306.04, 5412.16, 5520.4, 5630.81, 5743.43, 5858.3, 5$ ▸

sum$(\text{seq}(u2(n), n, 1, 10))$ 54748.6

d) „$\sum$“-Befehl

Toolbar Calculus

$s1(n) := \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2^k}\right)$ Done

$s1(3)$ $\frac{7}{4}$

$s1(10.)$ 1.99805

$s1(n)$ $2-2\cdot 2^{-n}$

$\lim\limits_{n \to \infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)$ 2

3. Anwendungen in der Finanzmathematik

Didaktischer Kommentar

Geldwerte kann man nur zum gleichen Zeitpunkt miteinander vergleichen. Zu Berechnungen des Geldwertes („Auf- und Abzinsung“) verwendet man als Modell „Geometrische Folgen“. Solche Aufgaben erfordern keine besondere Technologie, sie können auch mit numerischen Taschenrechnern gelöst werde. Technologie ist bestenfalls hilfreich, wenn die Anzahl der Zinsperioden gefragt ist.

Beispiel:

Aufzinsung: $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ — K_n ist der Wert des Kapitals nach n Zinsperioden

Abzinsung: $K_0 = \dfrac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$ — K_0 ist der Barwert.

Interessant wird die Rolle der Technologie (vor allem CAS-Werkzeuge), wenn es sich um ein Problem mit mehreren regelmäßigen Zahlungen handelt. Die als Modell nötige geometrische Reihe kann mit Technologie wesentlich leichter bearbeitet werden. Man kann auch hier anstatt mit komplexen Termen mit ihren Namen operieren.

Aufgabe 3.1: Bausparen

Herr Mathemat benötigt einen Bausparkredit von 140.000 €. Er möchte ihn in Jahresraten am Ende des Jahres zurückzahlen. Die Bank bietet einen Zinssatz von p% = 3,5%.

a) Wie hoch muss die Rate sein, wenn der Kredit nach 30 Jahren zurückgezahlt sein soll?

b) Herr Mathemat stellt sich eine Jahresrate von 10.000 € vor. Nach wie vielen Jahren wird die Schuld getilgt?

c) Gemäß dem Index Euribor kann der Zinssatz aber bis zu p_1% = 6% betragen. Wie lange würde dann die Rückzahlung bei der geplanten Jahresrate von 10.000 € dauern, wenn von Anfang an der Zinssatz p_1% verrechnet werden würde? Wie lange würde sie bei p_1% = 6% dauern, wenn nur eine Jahresrate von r_1 = 7.700 € vereinbart worden wäre?

Anmerkung: Es ist nur ein einfaches Modell. Die vierteljährliche Verzinsung und sonstige bei solchen Kreditgeschäften üblichen Kosten werden nicht berücksichtigt.

Mögliche Lösung:

$k:=140000$	140000
$q:=1.035$	1.035
$\text{solve}\left(k\cdot q^{30}=r\cdot\frac{q^{30}-1}{q-1},r\right)$	$r=7611.99$

Teil a)

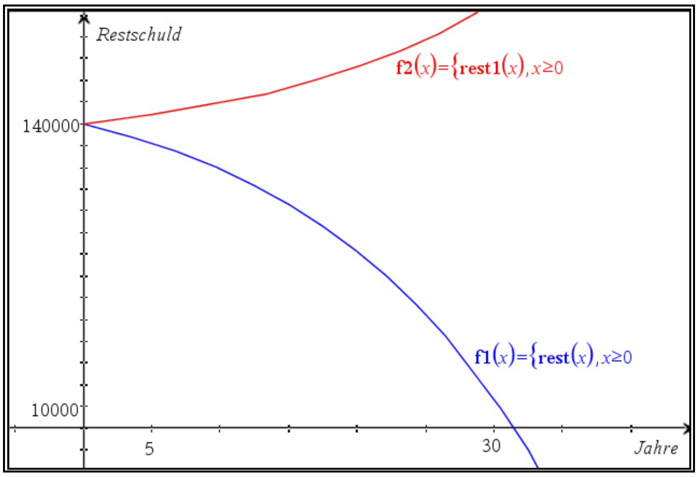
Vergleich der Geldbeträge am Ende der Laufzeit

$k:=140000$	140000
$q:=1.035$	1.035
$r:=10000$	10000
$\text{solve}\left(k\cdot q^{n}=r\cdot\frac{q^{n}-1}{q-1},n\right)$	$n=19.5732$

Teil b)
Lösen einer Exponential-gleichung mit CAS.

$k:=140000$	140000
$q1:=1.06$	1.06
$r:=10000$	10000
$\text{solve}\left(k\cdot q1^n=r\cdot\frac{q1^n-1}{q1-1},n\right)$	$n=31.4504$
$r1:=7700$	7700
$\text{solve}\left(k\cdot q1^n=r1\cdot\frac{q1^n-1}{q1-1},n\right)$	false

Teil c) Reflektieren über die Lösungsmengen.
Was bedeutet das Ergebnis „*false*“?



Die Antwort gibt der Graph:

f1 ist der Graph der Restschuld mit einer Jahresrate von 10.000 € (p=6%)

f2 ist der Graph der Restschuld mit einer Jahresrate von 7.700 € (p=6%)

Aufgabe 3.2: Hauskauf

Quelle: Lehrbuch „Thema Mathematik 6“, S. 75

Herr Mathemat bietet für ein Haus eine Sofortzahlung von 45.000 € und 120 monatliche Zahlungen zu je 700 €. Welchem Barwert entspricht dieses Angebot (p%=5%)?

Mögliche Lösung:

$anz:=45000$	45000
$z:=700$	700
$q:=1.05$	1.05
$r:=q^{-1}$	0.952381
$qm:=\sqrt[12]{q}$	1.00407
$rm:=qm^{-1}$	0.995942

Nach Speicherung der Daten sind zwei Wege möglich:

Weg 1: Vergleich der Endwerte (Aufzinsung) und danach Abzinsung
Weg 2: Vergleich der Barwerte (Abzinsung)

Weg 1:

$endz:=z\cdot\frac{qm^{120}-1}{qm-1}$	108054.
$barz1:=\frac{endz}{q^{10}}$	66335.9
$bar1:=anz+barz1$	111336.

Weg 2:

$barz2:=z\cdot rm\cdot\frac{rm^{120}-1}{rm-1}$	66335.9
$bar2:=anz+barz2$	111336.

Aufgabe 3.3: Amortisation einer Heizanlage

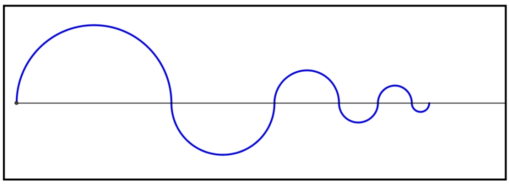
Ein Firmeninhaber investiert 60.000 € für eine Heizung basierend auf alternativer Energie. Der Energieberater hat errechnet, dass durch den Einsatz dieser Anlage jährlich ca. 5.000 € an Energiekosten (inklusive Förderung, Steuerersparnis usw.) eingespart werden können. Nach wie vielen Jahren amortisiert sich diese Anlage, wenn man einen Amortisationszinssatz von p% = 5% annimmt.

Mögliche Lösung:

$k:=60000$	60000
$ersp:=5000$	5000
$q:=1.05$	1.05
$r:=\frac{1}{q}$	0.952381
$\text{solve}\left(k=ersp\cdot r\cdot\frac{1-r^n}{1-r},n\right)$	$n=18.7802$

Aufgabe 3.4: Unendliche geometrische Reihen

a) Eine Wellenlinie entsteht durch unendlich oftmaliges Aneinanderfügen von Halbkreisen, wobei ab dem zweiten Halbkreis der Halbkreisdurchmesser immer $\frac{2}{3}$ des vorhergehenden Durchmessers beträgt.



Der erste Durchmesser sei 2 cm. Wie lange ist die Wellenlinie?

b) Ermittle mit Hilfe des CAS-Werkzeuges die Summe einer endlichen geometrischen Reihe $s_n = b_1 + b_1\cdot q + b_1\cdot q^2 + \ldots + b_1\cdot q^{n-1}$, sowie die Summe der unendlichen geometrischen Reihe für 0<q<1.

Didaktischer Kommentar

Klassische Lösungen dieser Aufgabe erfolgen ja in der Regel durch Nutzung einer Formel für unendliche geometrische Reihen als Black Box. Das Problem mit Hilfe von CAS zu lösen, hat den Vorteil, dass die Lernenden Summen von Potenzen und danach den Grenzwert bilden müssen.

Mögliche Lösung:

a)

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{i}\cdot\pi\right) \qquad 3\cdot\pi-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{i}\cdot\pi\right)\right) \qquad 3\cdot\pi$$

b)

$$sn:=\sum_{i=0}^{n-1}\left(b1\cdot q^{i}\right) \qquad \frac{q^{n}\cdot b1}{q-1}-\frac{b1}{q-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(b1\cdot q^{i}\right)\right) \qquad \text{undef}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(b1\cdot q^{i}\right)\right)\Big|0<q<1 \qquad \frac{-b1}{q-1}$$

Hier sollte über die Frage reflektiert werden, warum der Grenzwert zuerst einmal nicht definiert ist.

Didaktischer Kommentar zur Bedeutung des Themas für die neue Reifeprüfung

Es wird zwar das Thema „Kredit“ bei Reifeprüfungsaufgaben angesprochen (siehe die folgende Aufgabe), aber zur Lösung eignet sich besser das rekursive Modell (siehe Thema „Wachstum“). Trotzdem kann im Unterricht auf die Behandlung dieses Themas als Grundlage für Grundkompetenzen im Bereich Analysis („Grenzwert von Summen“) nicht verzichtet werden.

Aufgabe 15 beim Haupttermin 2015:

Kredit

Ein langfristiger Kredit soll mit folgenden Bedingungen getilgt werden: Der offene Betrag wird am Ende eines jeden Jahres mit 5 % verzinst, danach wird jeweils eine Jahresrate von € 20.000 zurückgezahlt.

Aufgabenstellung:

y_2 stellt die Restschuld nach Bezahlung der zweiten Rate zwei Jahre nach Kreditaufnahme dar, y_3 die Restschuld nach Bezahlung der dritten Rate ein Jahr später.

Stellen Sie y_3 in Abhängigkeit von y_2 dar!