Thema: Die Summe einer unendlichen Reihe

Gertrud Aumayr ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Folge, geometrische Folge, Reihe, geometrische Reihe, unendlich, Summe einer Reihe, periodische Dezimalzahl, Achilles und die Schildkröte

Unterrichtsmaterial

Aufgabe 1:
Trugschluss von Achilles und der Schildköte

Achilles ist der beste Läufer der Antike. Sich seines Sieges sicher, tritt er einen Wettlauf gegen eine Schildkröte an. Er gibt ihr einen Vorsprung und sie läuft los. Doch der griechische Philosoph Zenon von Elea (495 - 430 v. Chr.) bricht das Wettrennen hier ab. Er meint Achilles sei leichtsinnig; er könne die Schildkröte gar nicht einholen. Er argumentiert wie folgt:
„Achilles muss den Vorsprung der Schildkröte aufholen, bevor er sie überholen kann. Hat er diesen Vorsprung der Schildkröte aufgeholt, ist die Schildkröte jedoch wieder weitergelaufen. Es mag logisch klingen, dass die Vorsprünge der Schildkröte immer kleiner werden (aufgrund der kleineren Geschwindigkeit). Trotzdem wird immer ein Vorsprung bestehen und deshalb kann Achilles die Schildkröte niemals einholen.“

a) Zenon von Elea war ein antiker Philosoph. Aristoteles bezeichnete ihn als Erfinder der Kunst des Argumentierens.
Versuche aufzuklären, warum Achilles die Schildkröte doch überholen kann.

b) Verwende nun das TI-Nspire-File Achill_Schildkröte_HM Seite 1.2 und 2.2. Experimentiere mit dem Schieberegler, um deine Argumentation von Punkt a) zu unterstützen.

Aufgabe 2: Aufsummieren von Flächeninhalten

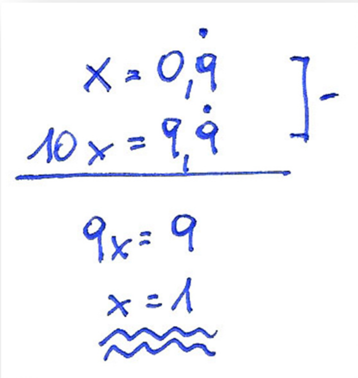
Verwende nun das TI-Nspire-File Achill_Schildkröte_HM Seite 3.1 und 3.2.
Experimentiere mit dem Schieberegler und fasse deine Beobachtungen zusammen.

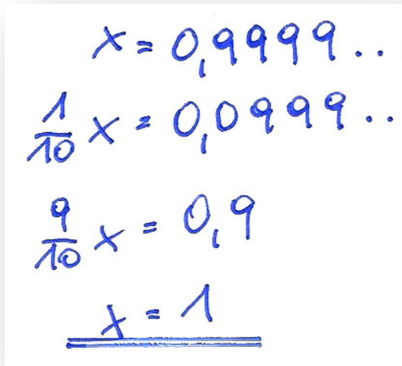
Aufgabe 3: Periodische Dezimalzahlen

Gegeben sei die periodische Dezimalzahl: $0,\dot{9}$

a) $0,\dot{9}$ lässt sich als unendliche geometrische Reihe darstellen. Gib für diese geometrische Reihe das Anfangsglied b_1 sowie den Quotienten q an.

b) In der Unterstufe wird das Umrechnen von periodischen Dezimalzahlen oft wie in den folgenden Bildern gelernt.
Erkläre die Vorgehensweise in den beiden Bildern.





c) Im folgenden Bild steht ein Beweis für die Summenformel der geometrischen Reihe so wie er in Büchern der Oberstufe steht.
Bringe diesen Beweis in Zusammenhang mit der Methode, die in der Unterstufe zum Umwandeln der periodischen Dezimalzahlen verwendet wird (siehe obige Bilder).

Es sei $b_1 + b_2 + ... + b_n$ eine endliche geometrische Reihe mit n Gliedern und dem Quotienten $q \neq 1$, S_n sei ihre Summe:

$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 ... + b_1 \cdot q^{n-1}$$
$$q \cdot S_n = \quad b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 ... + b_1 \cdot q^{n-1} + b_1 \cdot q^n$$
$$S_n - q \cdot S_n = b_1 - b_1 \cdot q^n$$
$$S_n \cdot (1-q) = b_1 \cdot (1-q^n)$$
$$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Für die unendliche geometrische Reihe mit $n \to \infty$:

Für $|q| < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, daher ergibt sich für die unendliche Summe $S = \lim_{n\to\infty} S_n = b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$

Technologiehilfe

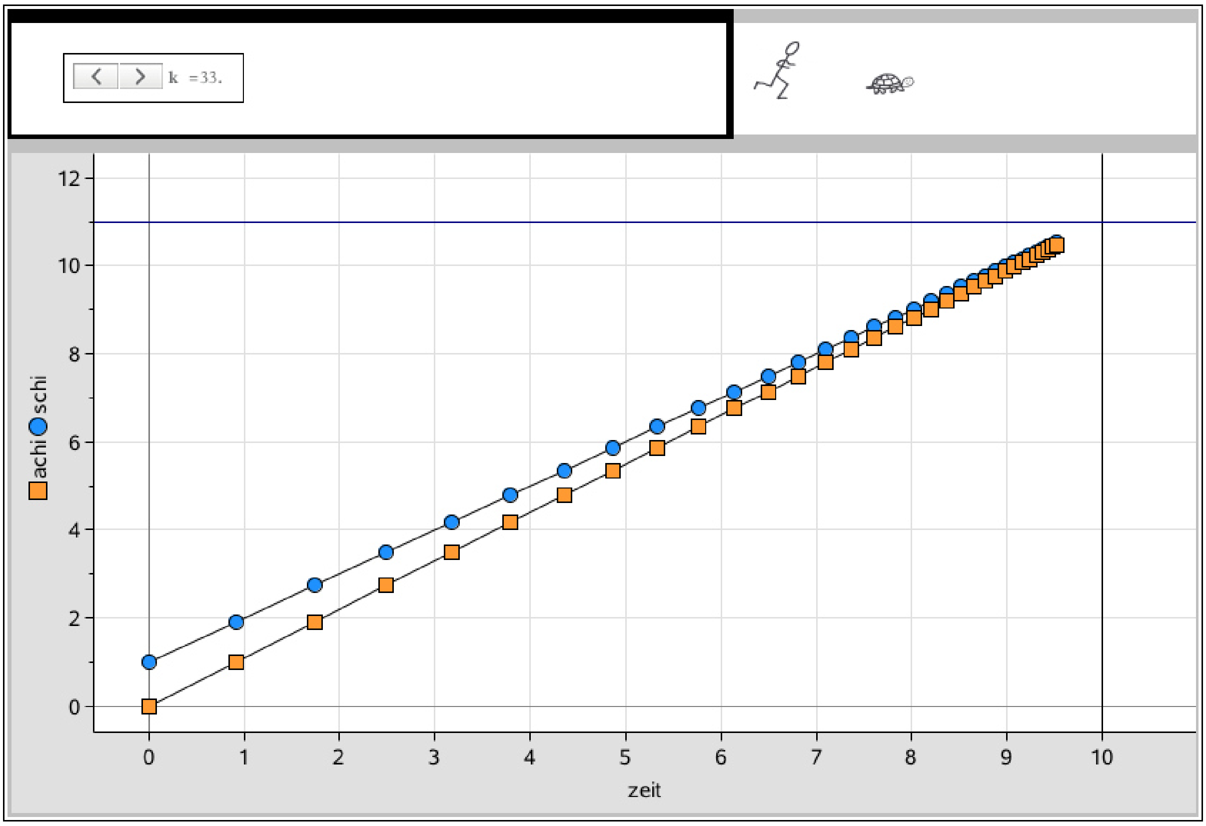
Hier wird ein fertiges TI-Nspire-File zum Experimentieren eingesetzt. Auf diversen Notes Seiten werden die nötigen Rechnungen durchgeführt, die nicht im Vordergrund stehen und daher auch nicht im Unterricht besprochen werden müssen.

Eigentlich müssen nur, wie in der Anleitung angegeben, die Schieberegler entsprechend betätigt werden.

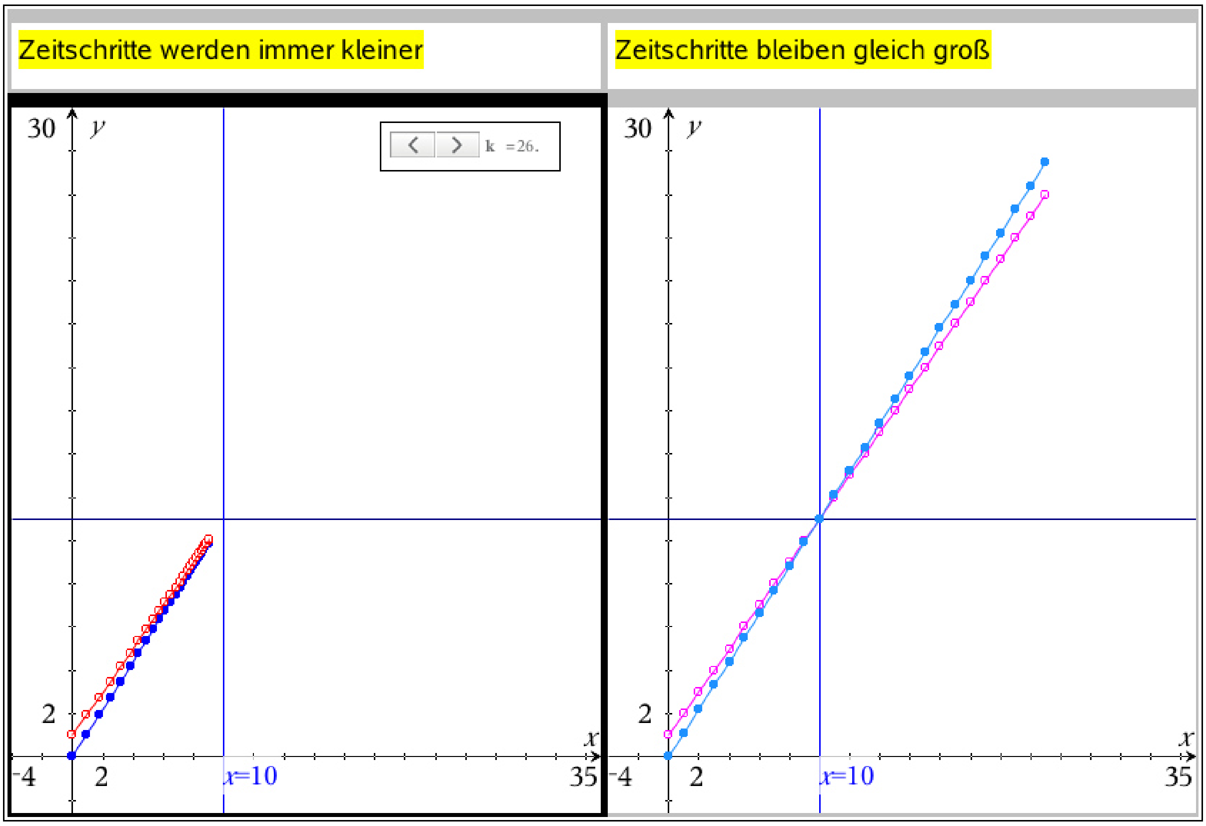
Sollte eine Berechnung nicht stattfinden, kann es sein, dass man in den Notes-Fenstern die einzelnen Berechnungen durch Drücken von ENTER noch einmal bestätigen muss.

Aufgabe 1: Trugschluss von Achilles und der Schildköte

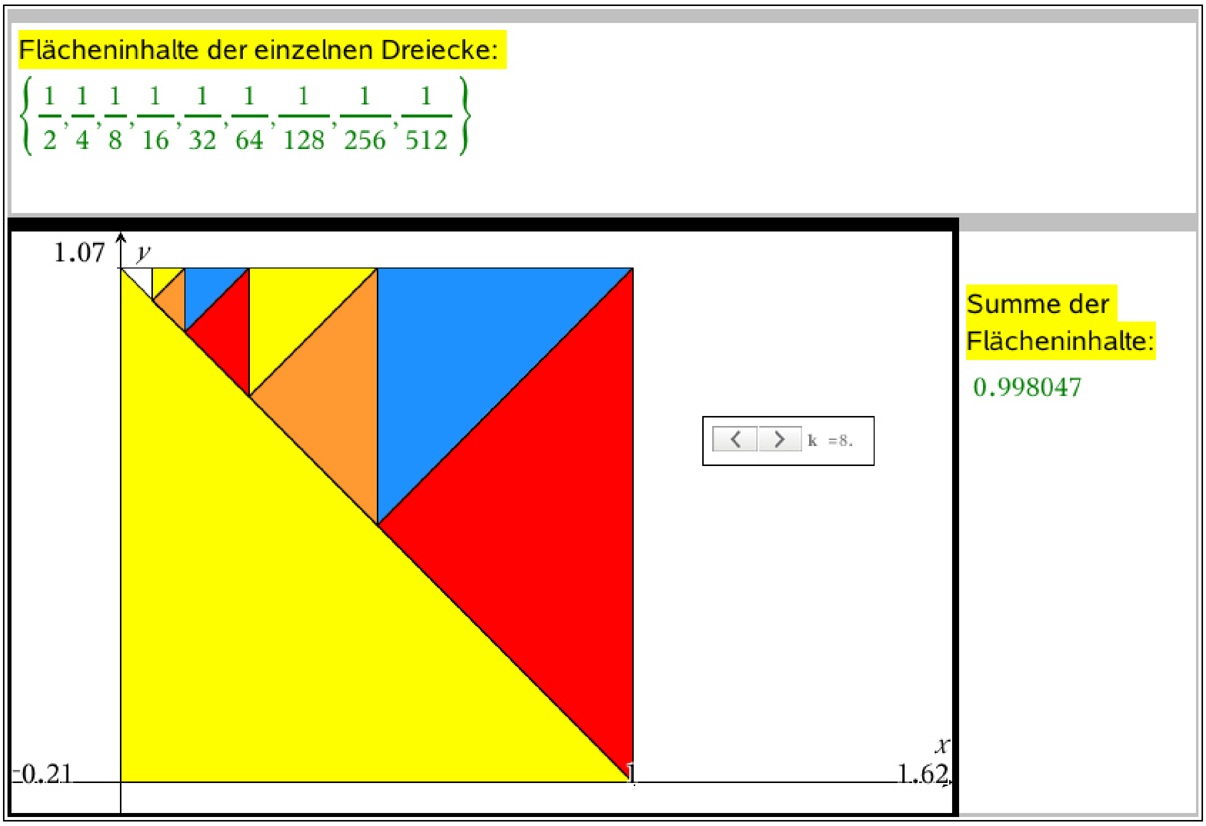
Betrachtung von Zenon von Alea:



Vergleich von kleiner werdenden Zeitschritten und gleich bleibenden Zeitschritten:



Aufgabe 2: Aufsummieren von Flächeninhalten



Didaktischer Kommentar

Aufgabe 1 und 2 sind Beispiele, die man als experimentelle Einstiegsphase in das Thema unendliche Reihen verwenden kann. Beschäftigung mit einem Paradoxon, mit Geschichte, das Bild von den Flächen und eigenständiges Handeln soll die Schüler motivieren, sich mit diesem Thema zu beschäftigen und zu erkennen, dass der Grenzwert einer unendlichen geometrischen Reihe für bestimmte Werte des Quotienten q einen endlichen Wert besitzen kann.

Aufgabe 3 soll in eine exaktifizierende Phase führen, gleichzeitig mit einem Anknüpfen an Bekanntes (vielleicht auch Vergessenes aus früheren Unterrichtsjahren). Etwa könnte im Anschluss eine Zusammenfassung der Erkenntnisse im Schulübungsheft geschrieben werden bevor man in eine Anwendungsphase tritt und Summen für geometrische Reihen in unterschiedlichen Anwendungssituationen berechnet.

Vielleicht gibt es Schülerinnen oder Schüler, die bei Aufgabe 3 beim Umwandeln periodischer Dezimalzahlen auf Folgendes kommen:

$$\begin{array}{l} S = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} + \ldots\ldots \\ \underline{q \cdot S = \qquad b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} + \ldots\ldots} \\ S - q \cdot S = b_1 \\ S \cdot (1-q) = b_1 \\ S = b_1 \cdot \dfrac{1}{1-q} \end{array}$$

und plötzlich eine Summenformel für beliebiges q hätten. Hier müsste man bewusst machen, dass es eigentlich nicht möglich ist zwei unendliche Summen zu subtrahieren. Dies geht nur, wenn man weiß, dass beide Summen einen endlichen Grenzwert haben, d.h. dies wird in den Überlegungen in der Unterstufe vorausgesetzt und nicht thematisiert.

In Aufgabe 3 ist daher im Screenshot für den Beweis dieser zuerst für endliche Summen durchgeführt, und dann erst wird der Grenzübergang gemacht.

Ob es notwendig ist, auf diese Problematik genauer einzugehen, hängt von der Lerngruppe ab.