CAS – Projekt T^3 Österreich

T³ ÖSTERREICH

Thema: Wachstumsprozesse – diskrete Modelle (Unterrichtssequenz)

Helmut Heugl ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Diskrete Modelle, Änderungsmaße, rekursive Modelle, Differenzen-gleichungen, prozentuales Wachsen, exponentielle Abnahme, Zerfallsprozesse, Wirtschafts-mathematik, Sparen und Kredite, lineare Funktion, Exponentialfunktion, Exponential-gleichungen, Monotonie, lineares Wachstum, exponentielles Wachstum, begrenztes Wachstum, logistisches Wachstum, Logarithmusfunktion, Aufgaben zur Reifeprüfung.

Unterrichtsmaterial:

Aufgabenbeispiele zum Thema, Aufgabenbeispiele zur Reifeprüfung, TI-Nspire-Files zu den Aufgaben, fertige Applets zum Experimentieren.

Didaktischer Kommentar:

Rekursive Modelle sind erst durch die Nutzung von Technologie für die Schule zugänglich geworden. Damit wird die Behandlung einer Vielzahl von interessanten Anwendungsproblemen möglich. Das Modellbilden erfolgt durch die Schülerinnen und Schüler. Sie übersetzen die verbalen Informationen oder die Eigenschaften von Datenmengen in die Sprache der Mathematik. Das Simulieren übernimmt das Technologiewerkzeug. Es liefert entweder eine Tabelle oder einen Graphen. Die nächste Aktivität der Lernenden ist das Interpretieren der Ergebnisse und das Bewerten bezüglich des Anwendungsproblems.

1. Grundbegriffe

Diskretes Modell

Eine Bestandsgröße y wird in diskreten Zeitabständen beobachtet. y_0 ist der Bestand am Beginn, y_n jener nach n Zeitschritten. Die Modellierung erfolgt durch **Differenzengleichungen**, das sind Gleichungen, die die Änderungen des Bestandes beschreiben:

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

Als "Wortformel" ausgedrückt: $\text{Bestand}_{\text{neu}} = \text{Bestand}_{\text{alt}}$ + Bestandsänderung

Die Bestandsänderung kann wiederum aus Zuwachs oder Abnahme bestehen.

Änderungsmaße bei diskreten Modellen

- Die schrittweise absolute Änderung: $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$
- Die schrittweise relative Änderung ist die Änderung relativ zum Grundwert (sie wird häufig in Prozent angegeben): $\dfrac{\Delta y_n}{y_n} = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{y_n}$

Didaktischer Kommentar

Bei der Bearbeitung eines Problems mit Hilfe der Tabellenkalkulation können die zwei Phasen des rekursiven Denkprozesses („auswerten" und „speichern") bewusst gemacht werden:

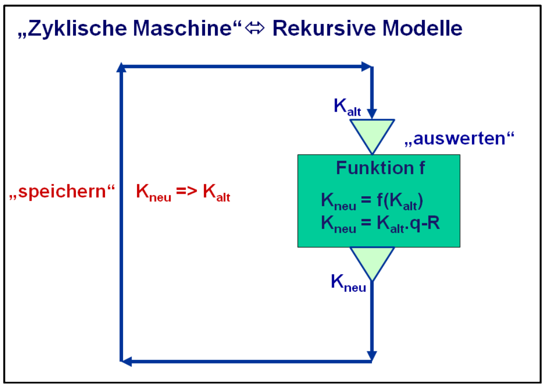
Beispiel: Schuldentilgung

Jemand nimmt einen Kredit in der Höhe **K** und zahlt jährlich am Ende des Jahres eine Rate **R**. Mit der Bank wird ein Zinssatz von **p%** vereinbart. Was die Schülerinnen und Schüler bei der Entwicklung eines rekursiven Modells überlegen müssen, ist:

„Was passiert jedes Jahr?"

Die Antwort lautet: *„Das Kapital wird verzinst und die Rate wird abgezogen.“*

Die mathematische Antwort: $K_{neu} = K_{alt} \cdot q - R \quad mit\ q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$



Gegeben ist ein rekursives Modell in Form einer Differenzengleichung.

Setzt man den Wert K_{alt} in die Formel ein, so wird der Wert K_{neu} berechnet („auswerten“). Der neue Wert ersetzt nun in diesem Zyklus den alten Wert („speichern“) und wird dann wieder in die Formel eingesetzt, usw.

Darstellungsarten von Wachstumsprozessen mit Hilfe von Technologie:

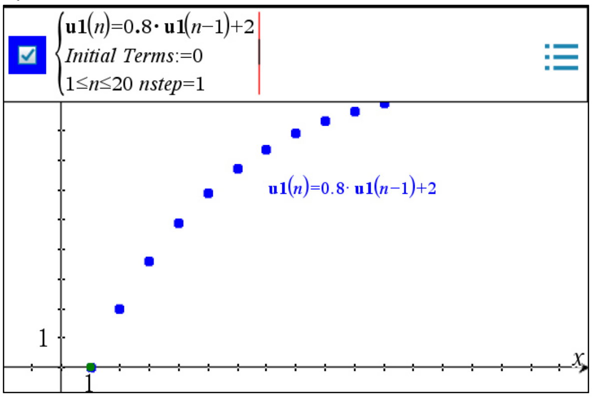
- Tabellen
- Grafische Darstellungen:
  - Darstellung im Time-Mode (Bestand als Funktion der Zeit): $y_n = f(t)$
  - Darstellung im Web-Mode (neuer Bestand in Abhängigkeit vom alten Bestand): $y_n = g(y_{n-1})$

Beispiel: Gegeben ist die lineare Differenzengleichung $u(n) = 0.8 \cdot u(n-1) + 2$

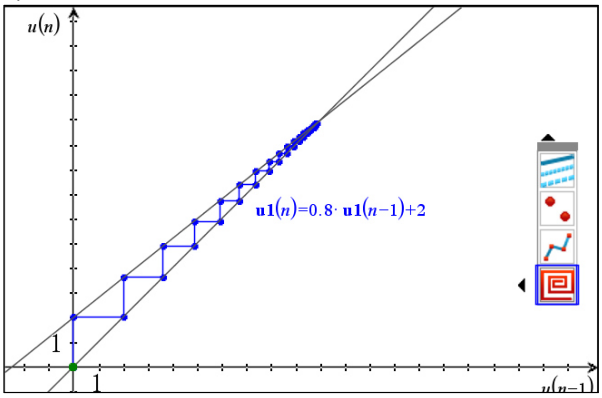
Zeichne den Graphen dieser rekursiv dargestellten Funktion

a) im “Time-Mode“
b) im „Web-Mode“

a)

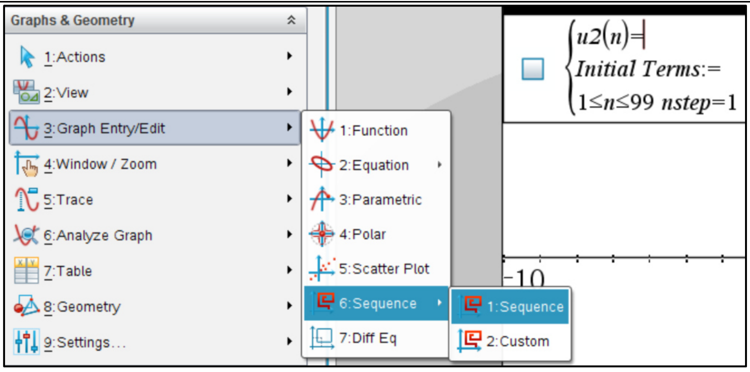


b)

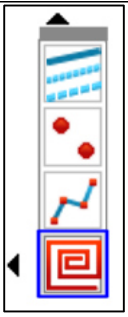


Technologiehilfe

Zu a) In der Applikation „*Graphs*“ wählt man als Eingabeart „*Sequence*“



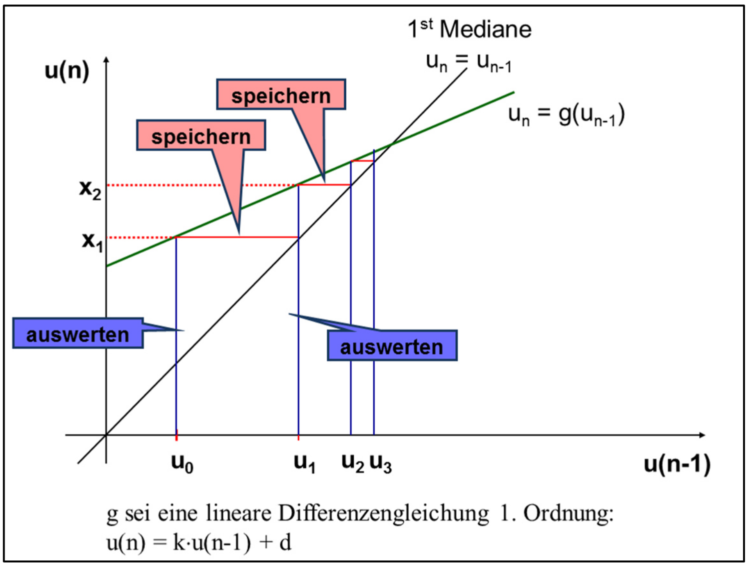
Zu b) Um in den „Web-Modus“ zu wechseln, klickt man auf den Graphen. Durch Drücken der rechten Maustaste (*ctrl menu* auf dem Handheld) kann man die Eigenschaften des Graphen auswählen (*3: Attributes*“). Im vierten Icon wechselt man zum „*Web Plot*“) und muss dann die Windows Variablen anpassen.



Im Graphikfenster wird der Graph der Funktion u(n) = g(u(n-1)) sowie die 1. Mediane gezeichnet.

Das „Auswerten“ und „Speichern“ als Teilschritte des rekursiven Prozesses erzeugen im „Web-Modus“ die charakteristische Treppe.

Dadurch kann die Konvergenz der rekursiven Folge anschaulich untersucht werden.



Unverzichtbare Grundlage für das Modellieren mit Differenzengleichungen sind die **„Übersetzungsregeln“ aus der Sekundarstufe I** wie zum Beispiel:

- „wachsen um das r-fache“
- „vermehren um 30%“
- „abnehmen um 15%“
- „direkt proportional zu“
- „relativer Anteil von“
- „absolute Änderung – relative Änderung“

2. Wichtige Modelle für Wachstums- und Zerfallsprozesse

(1) Lineares Wachstum
(2) Exponentielles Wachstum
(3) Beschränktes Wachstum
(4) Wachstum mit Störung
(5) Interagierende Systeme

Zu (1): Lineares Wachstum

Charakteristische Eigenschaften sind:

Der Zuwachs bzw. die Abnahme ist bei gleichen Schritten konstant.

Zu gleichen Zeiten gehört der gleiche Wachstumsbetrag.

Zur m-fachen Zeit gehört der m-fache Wachstumsbetrag.

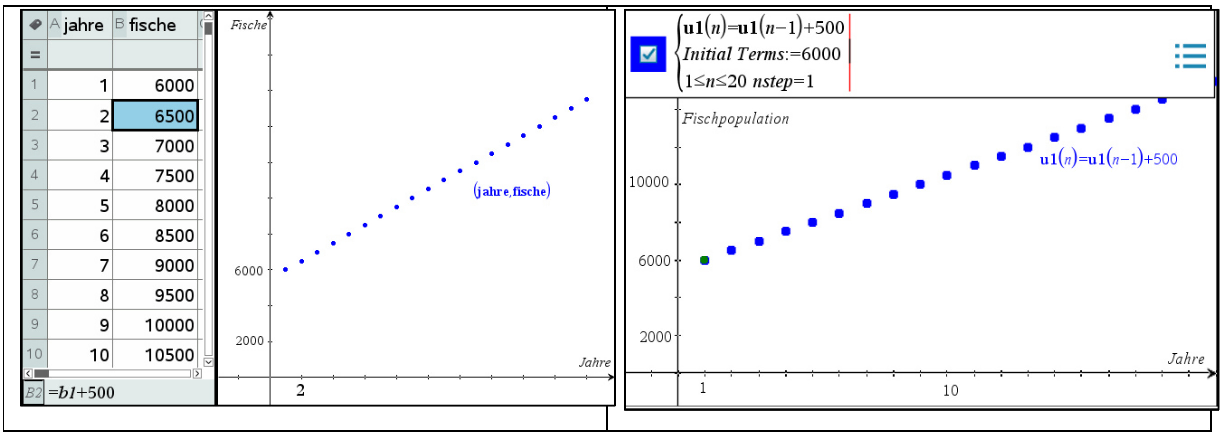
Realmodell	Mathematisches Modell
“Neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs” *Der Zuwachs ist konstant*	$y(n) = y(n - 1) + k$; der Zuwachs k ist konstant; Startwert y(0) $y(n) - y(n - 1) = k$

Aufgabe 2.1: Fische 1 linear

In einem See gibt es derzeit etwa 6 000 Fische (u_0). Die Fischpopulation vermehrt sich pro Jahr um etwa 500 Fische (k).

a) Entwickle ein mathematisches Modell für die Entwicklung der Fischpopulation.
Erstelle eine Simulation des Populationswachstums samt graphischer Darstellung und zwar
mit einer Tabellenkalkulation.
mit einer rekursiven Folge.

b) Diskutiere die Brauchbarkeit dieses Modells für das Problem Fischpopulation.



Zu (2): Exponentielles Wachstum

Charakteristische Eigenschaften sind:

Der Zuwachs ist proportional zum Bestand. Der Zuwachs ist nicht konstant.

Zu gleichen Zeiten gehört der gleiche Wachstumsfaktor.

Realmodell	Mathematisches Modell
„Neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs" *Der Zuwachs ist proportional zum alten Bestand.*	$y(n) = y(n-1) + r\cdot y(n-1)$ Wachstumsrate r (je Schritt); Startwert y(0) $y(n) - y(n-1) = r\cdot y(n-1)$ $y(n) = y(n-1)\cdot(1+r) = y(n-1)\cdot q$ Wachstumsfaktor $q = (1 + r)$; Startwert y(0)

Im mathematischen Modell $y(n) = q\cdot y(n-1)$ erkennt man die **Grundeigenschaft I**:
„Zu gleichen Zeiten gehört der gleiche Wachstumsfaktor"; $y_{neu} = q\cdot y_{alt}$ oder $y_n = q\cdot y_{n-1}$

Didaktischer Kommentar

An solchen Aufgaben kann man die Beziehung zwischen der rekursiven Darstellung und der Termdarstellung (siehe Unterrichtssequenz „Exponentialfunktion") bewusst machen: Ausgangspunkt ist die rekursive Darstellung:

Gegeben ist y(0). Aus dem mathematischen Modell folgt:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(1) = y(0)\cdot q \\ y(2) = y(1)\cdot q = (y(0)\cdot q)\cdot q = y(0)\cdot q^2 \\ y(3) = y(2)\cdot q = \left(y(0)\cdot q^2\right)\cdot q = y(0)\cdot q^3 \\ y(4) = y(3)\cdot q = \left(y(0)\cdot q^3\right)\cdot q = y(0)\cdot q^4 \\ . \\ . \\ y(n) = y(0)\cdot q^n \end{array}}$$

Aufgabe 2.2: Fische 2 exponentiell

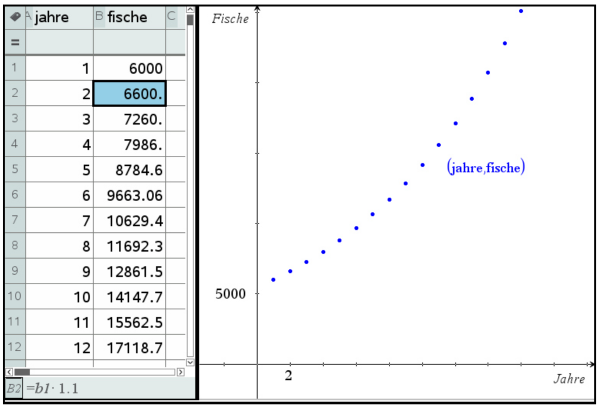
In einem See gibt es derzeit etwa 6 000 Fische (u_0). Die Fischpopulation vermehrt sich pro Jahr um etwa 10% (r = 0,1).

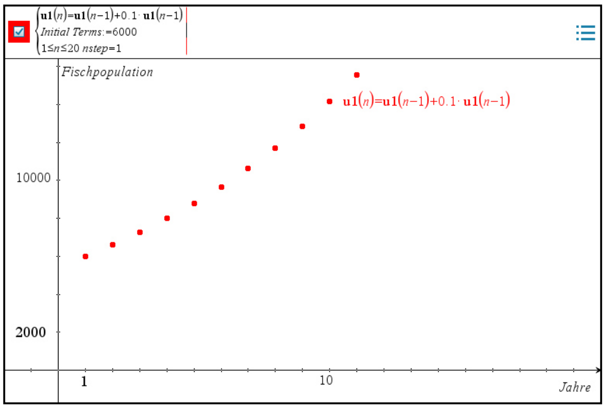
a) Entwickle ein mathematisches Modell für die Entwicklung der Fischpopulation.
   Erstelle eine Simulation des Populationswachstums samt graphischer Darstellung und zwar

   mit einer Tabellenkalkulation.

   mit einer rekursiven Folge.

b) Diskutiere die Brauchbarkeit dieses Modells für das Problem Fischpopulation.





Zu (3): Beschränktes Wachstum

Charakteristische Eigenschaften sind:

Das unbegrenzte Wachstum wie beim linearen oder exponentiellen Modell ist unrealistisch. In der Praxis gibt es meist eine natürliche Schranke des Wachstums.

Das Wachstum einer Bestandsgröße ist beschränkt, der Zuwachs ist proportional zum jeweiligen „Freiraum“. Der Zuwachs ist nicht konstant.

Didaktischer Kommentar

Man nimmt eine Maximalzahl von Individuen an, die in diesem Raum Platz haben (G), so versteht man unter dem Freiraum“ die Anzahl der noch freien Plätze (G – y(n)).

Realmodell	Mathematisches Modell
„Neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs“. *Der Zuwachs ist proportional zum jeweiligen Freiraum.*	$y(n) = y(n-1) + r\cdot(G - y(n-1))$; Wachstumsrate r, Wachstumsgrenze G; Startwert y(0) $y(n) - y(n-1) = r\cdot(G - y(n-1))$

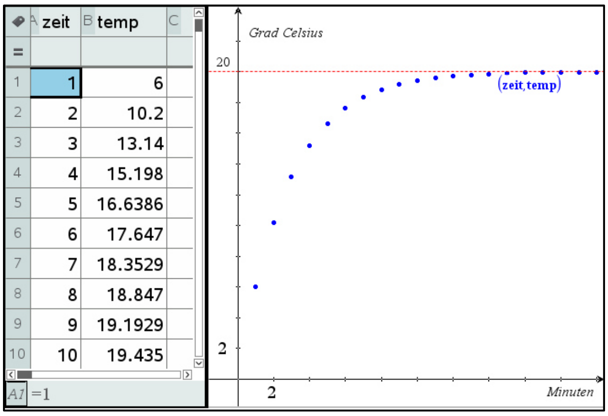
Aufgabe 2.3: Erwärmungsvorgang

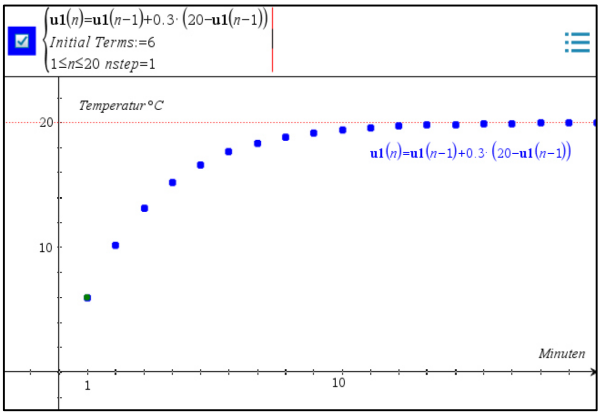
Ein Gegenstand hat im Kühlschrank eine Temperatur von 6°C. Er wird auf Zimmertemperatur (20°C) erwärmt. Der Temperaturzuwachs pro Minute beträgt 30% des Temperaturunterschieds zwischen der Umgebungstemperatur und der aktuellen Temperatur am Beginn der jeweiligen Minute.

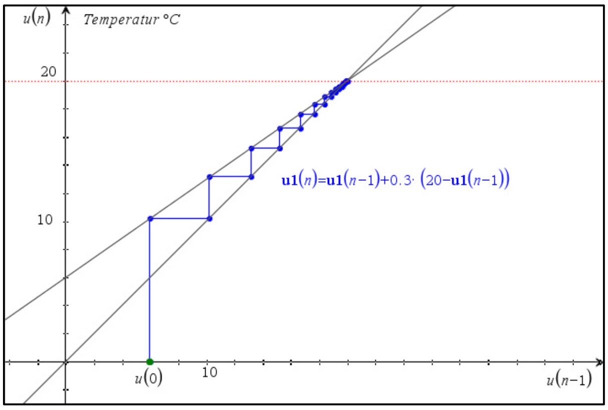
Entwickle ein mathematisches Modell für den Verlauf des Erwärmungsvorganges.

Erstelle eine Simulation des Erwärmungsvorganges samt graphischer Darstellung und zwar

– mit einer Tabellenkalkulation.
– mit einer rekursiven Folge im Graphikfenster.







Im „Web Modus“ sieht man sehr schön die Konvergenz gegen einen Grenzwert („Fix-punkt“).

Zu (4): Wachstum mit Störung

Charakteristische Eigenschaften sind:

Das Wachstum einer Bestandsgröße kann durch äußere Eingriffe gestört werden, wie zum Beispiel die Entwicklung einer Tierpopulation durch regelmäßige Jagd, die Zunahme des Forstbestandes durch regelmäßige Schlägerung.

Die Bestandsgröße wächst exponentiell und wird gleichzeitig durch konstante Beiträge (e) von außen vermehrt oder durch Erntevorgänge verringert.

Realmodell	**Mathematisches Modell**
„Neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs“ *Der Zuwachs ist proportional zum alten Bestand und wird gleichzeitig durch konstante Beträge vermehrt oder verringert.*	$y(n)-y(n-1)=c\cdot y(n-1)-e$ $y(n)=y(n-1)+c\cdot y(n-1)-e$ $y(n)=(1+c)\cdot y(n-1)-e$

Anwendungen in der Finanzmathematik

Didaktischer Kommentar

Da der Schwerpunkt die technologische Behandlung von Wachstumsprozessen ist, wird auf Beispiele mit Monatsraten und auf die Berücksichtigung des effektiven Zinssatzes und der Kapitalertragssteuer verzichtet, um die Komplexität der Aufgaben nicht zu stark zu erhöhen.

Aufgabe 2.4: Rente aus Lottogewinn

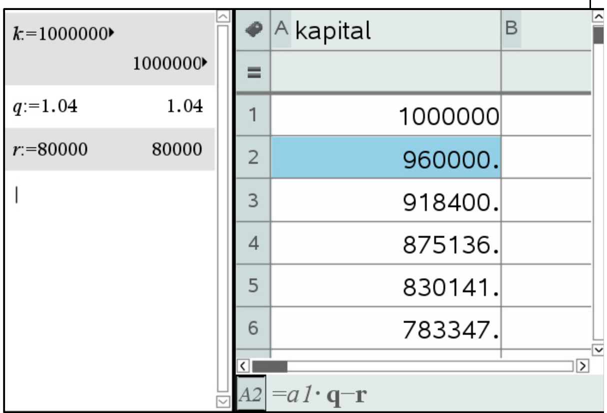
Herr Glückspilz veranlagt seinen Lottogewinn k von 1 000 000 €. Es wird ein gleichbleibender Zinssatz von 4% angenommen. Er möchte daraus jeweils am Ende des Jahres eine gleichbleibende Rente r von 80 000 € beziehen.

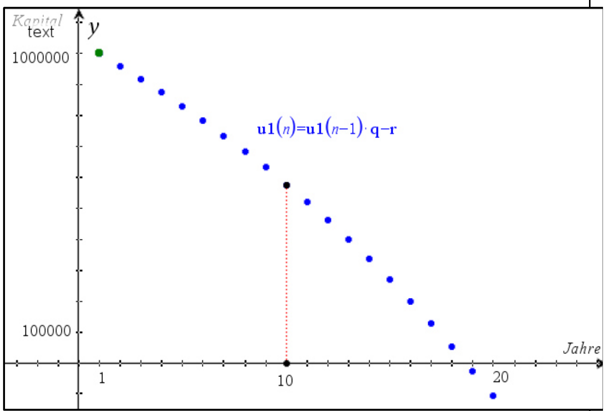
a) Wie lange könnte er diese Rente beziehen?
b) Wie hoch ist der Restwert nach 10 Jahren?

Anleitung

Das Problem kann entweder mit Tabellenkalkulation („*Lists&Spreadsheet*“) gelöst werden oder durch graphische Simulation in der „*Graph*“-Applikation.

Tabellenkalkulation	Graphische Simulation





Aufgabe 2.5: Bausparkredit

Herr Mathemat benötigt ein Bauspardarlehen k in der Höhe von € 140.000 mit einer Laufzeit von 30 Jahren. Derzeit beträgt der Zinssatz p=3,5%. Der Zinssatz kann gemäß dem Index Euribor auf bis zu 6% steigen. Der Kredit soll in 30 Jahren zurückgezahlt sein.

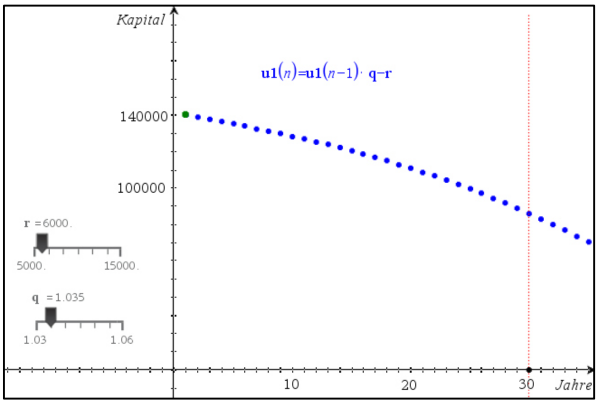
a) Wie hoch ist die Jahresrate r, wenn der Kredit bei einem gleichbleibenden Zinssatz von 3,5% nach 30 Jahren zurück gezahlt sein soll?

b) Wie ändert sich die Situation, wenn der Zinssatz auf 6% steigt? Wie hoch müsste dann die Jahresrate bei 30-jähriger Tilgung sein, wenn der Zinssatz schon von Anfang an 6% wäre?

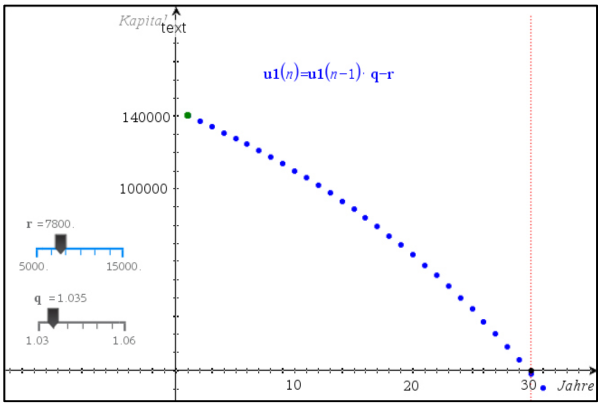
Anleitung

Definiere zwei Schieberegler für die Jahresrate r und den Wachstumsfaktor q = (1+p/100). Suche ein mathematisches Modell für die Entwicklung des Kredits und zwar zuerst für p = 3.5% und danach für bis zu 6% wachsenden Zinssatz.

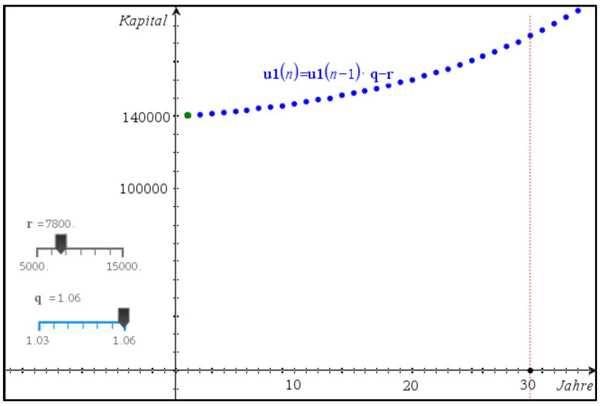
p = 3,5%; r = 6000€



p = 3,5%; r =7800€



p = 6%; r = 7800€



Zu (5): Interagierende Systeme

Häufig beeinflussen sich die Wachstumsprozesse zweier oder mehrerer Populationen gegenseitig. Im Folgenden betrachten wir zwei Populationen, deren Bestandsgrößen B_n und R_n bezeichnet werden. Im Hinblick auf mögliche Wechselwirkungen zwischen Populationen (Bestandsgrößen) ist ein möglicher Fall ein Räuber-Beute-System:

Aufgabe 2.6: Räuber-Beute-System

Quelle: http://www.pnas.org/content/94/10/5147.full

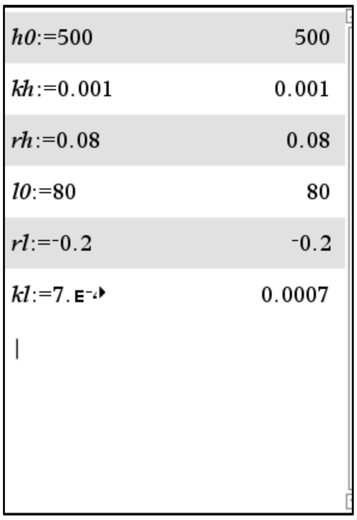
In Kanada beobachtete man eine solche Wechselwirkung zwischen der Beutepopulation B_n der „Schneeschuhhasen" und der Räuberpopulation der „kanadischen Luchse" R_n:

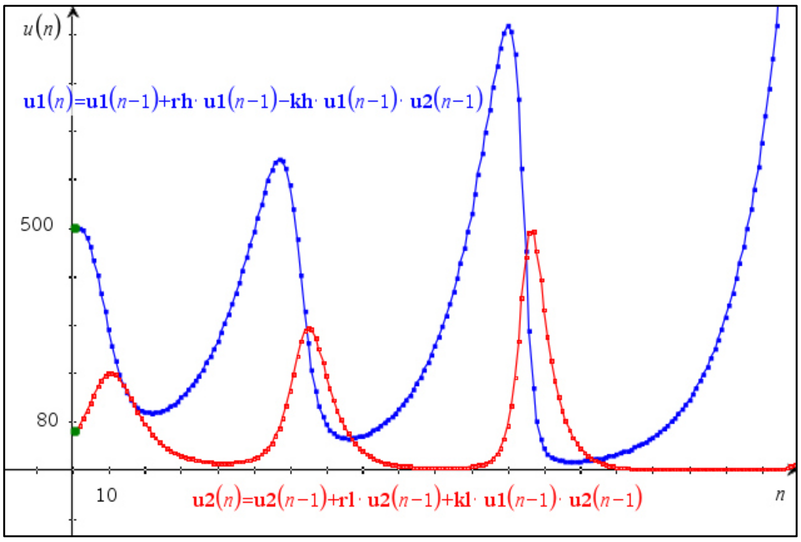
Nicht interagierende Systeme	Interagierende Systeme
In einer Region gäbe es Anfangs h_0 = 500 Hasen und l_0 = 80 Luchse. Ohne Wechselwirkung würde die Population der Hasen um 8% exponentiell wachsen, das heißt r_h = 0,08. Ohne Beute würde die	Treffen die beiden Populationen aufeinander, so nimmt die Zahl der Hasen proportional zur Populationsgröße der Hasen und Luchse ab, die Zahl der Luchse nimmt proportional zur Menge der Hasen und Luchse zu:

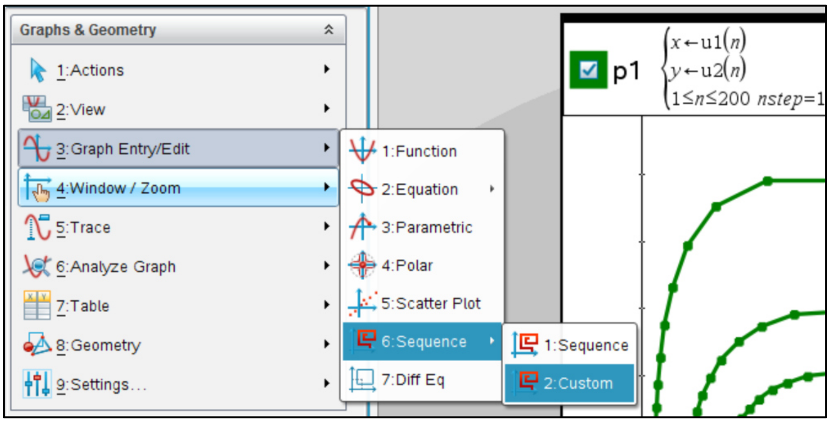
Population der Luchse um 20% abnehmen (r_l = -0,20): $B_n = B_{n-1} + rh \cdot B_{n-1}$ $R_n = R_{n-1} + rl \cdot R_{n-1}$	$B_n = B_{n-1} + rh \cdot B_{n-1} - kh \cdot B_{n-1} \cdot R_{n-1}$ $R_n = R_{n-1} + rl \cdot R_{n-1} + kl \cdot B_{n-1} \cdot R_{n-1}$ Die Proportionalitätsfaktoren kh und kl sind ein Maß für die „Wirksamkeit" dieser Wechselwirkung, sie werden experimentell ermittelt. Für dieses Problem wurde ermittelt: kh = 0,001 und kl = 0,0007

Didaktischer Kommentar

Empfehlenswert ist, die Wachstumsraten und Proportionalitätsfaktoren zuerst unter einem entsprechenden Variablennamen zu speichern. Dann ist eine Änderung dieser Parameter leichter möglich und es können auch Schieberegler definiert werden, um die Abhängigkeit des Wachstums von diesen Parametern zu untersuchen.

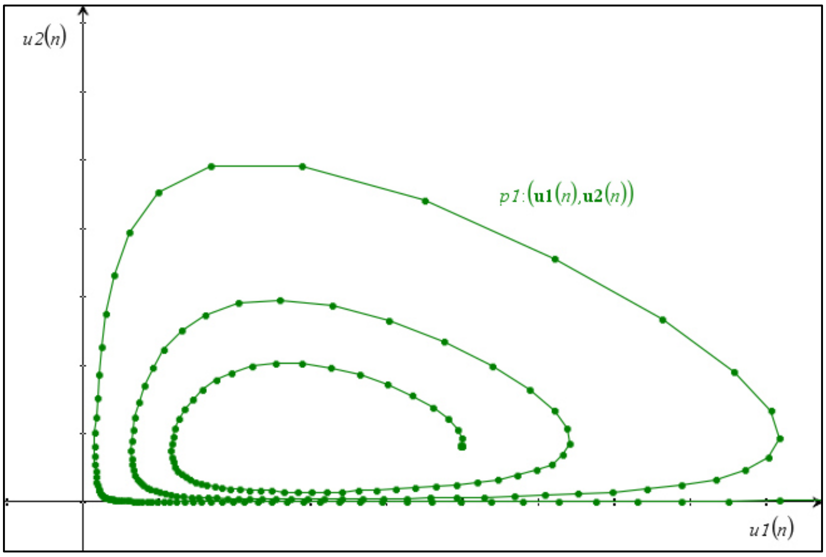






Technologiehilfe:

Mit dem TI Nspire ist auch die Darstellung als „Phasendiagramm" möglich:
$u2(n) = p(u1(n))$



3. Aufgabenbeispiele zur Reifeprüfung

Didaktischer Kommentar

Quellen: Die Aufgabenbeispiele stammen von den Reifeprüfungsterminen der 2013 bis 2015 und vom Aufgabenpool des **BIFIE:**
https://www.bifie.at/downloads?projekt[]=69&schulfach[]=110&schultyp[]=134
http://aufgabenpool.bifie.at/srp_ahs/
Es sind Beispiele aus dem Teil 1 der Prüfungen, bei dem derzeit keine Technologienutzung vorgesehen ist. Trotzdem zeigen die ausgewählten Aufgaben, dass Technologie manches Mal vorteilhaft genutzt werden kann und dass die Behandlung des Kapitels „Wachstum – Differenzengleichungen" im Unterricht sehr wichtig, aber ohne Technologie kaum möglich ist.

Aufgabe 3.1: Nikotin

Haupttermin 2014 Teil 1, Aufgabe 15

Die Nikotinmenge x (in mg) im Blut eines bestimmten Rauchers kann modellhaft durch die Differenzengleichung $x_{n+1} = 0.98 \cdot x_n + 0.03$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung

Geben Sie an, wie viel Milligramm Nikotin täglich zugeführt werden und wie viel Prozent der im Körper vorhandenen Nikotinmenge täglich abgebaut werden!

Lösungserwartung: 0,03 mg werden täglich zugeführt und 2% werden täglich abgebaut.

Aufgabe 3.2: Kredit

Haupttermin 2015 Teil 1, Aufgabe 15

Ein langfristiger Kredit soll mit folgenden Bedingungen getilgt werden: Der offene Betrag wird am Ende eines jeden Jahres mit 5 % verzinst, danach wird jeweils eine Jahresrate von € 20.000 zurückgezahlt.

Aufgabenstellung

y_2 stellt die Restschuld nach Bezahlung der zweiten Rate zwei Jahre nach Kreditaufnahme dar, y_3 die Restschuld nach Bezahlung der dritten Rate ein Jahr später. Stellen Sie y_3 in Abhängigkeit von y_2 dar!

Lösungserwartung $y_3 = 1.05 \cdot y_2 - 20000$

Aufgabe 3.3: Holzbestand

Kompensationsprüfung Juni 2015, Aufgabe 4

Der Holzbestand eines Waldes wird in Kubikmetern (m^3) angegeben. Zu Beginn eines bestimmten Jahres beträgt der Holzbestand 10 000 m^3. Jedes Jahr wächst der Holzbestand um 3 %. Am Jahresende werden jeweils 500 m^3 Holz geschlägert. Dabei gibt a_n die Holzmenge am Ende des n-ten Jahres an.

Aufgabenstellung

Stellen Sie die Entwicklung des Holzbestandes durch eine Differenzengleichung dar! Erläutern Sie die Bedeutung der auftretenden Größen!

Leitfrage

Geben Sie an, bei welchen jährlichen prozentuellen Wachstumsraten der Holzbestand im Laufe der Zeit abnimmt, zunimmt bzw. konstant bleibt! Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungserwartung

$$a_n = a_{n-1} + 0.03 \cdot a_{n-1} - 500$$
$$a_0 = 10000$$

Lösungserwartung Leitfrage

Der Holzbestand bleibt bei einer jährlichen Schlägerung von 500 m^3 konstant, wenn $\frac{p}{100} \cdot a_0 - 500 = 0 \;\Rightarrow\; p = 5\%$. Bei einem Wachstum von mehr als 5% nimmt der Holzbestand zu, bei weniger als 5% nimmt er ab.

Didaktischer Kommentar

Natürlich braucht man für solche Aufgaben keine Technologie um die Lösungen zu finden. Aber die Aufgaben zeigen, dass im Unterricht Differenzengleichungen zur Modellierung diskreter Prozesse behandelt werden müssen. Auch die Übersetzungsregeln, die schon in der Sekundarstufe I gelernt werden müssen, werden hier gebraucht:

„vermehre/vermindere um p% ⇔ multipliziere mit $\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$"

Aufgabe 3.4: Wirkstoffe im Körper

Aufgabenpool Bifie, Aufgabe 1_006

Ein Patient, der an Bluthochdruck leidet, muss auf ärztliche Empfehlung ab sofort täglich am Morgen eine Tablette mit Wirkstoffgehalt 100 mg zur Therapie einnehmen. Der Körper scheidet im Laufe eines Tages 80 % des Wirkstoffs wieder aus.

Die Wirkstoffmenge W_n im Körper des Patienten nach n Tagen kann daher (rekursiv) aus der Menge des Vortags W_{n-1} nach folgender Beziehung bestimmt werden:

$$W_n = 0.2 \cdot W_{n-1} + 100; \; W_0 = 100 \; (W_i \text{ in mg})$$

In welcher Weise wird sich die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten langfristig entwickeln?

Aufgabenstellung

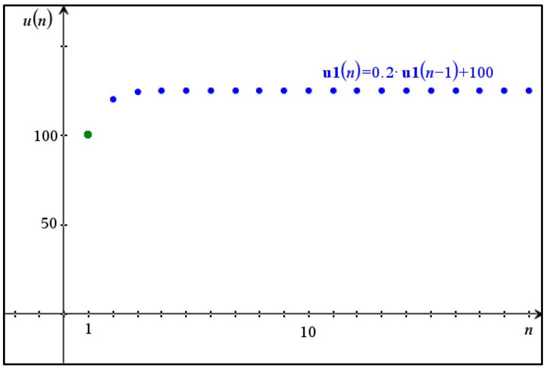
Die beiden Textfelder sind so zu ergänzen, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht. Kreuzen Sie dazu in der ersten und der zweiten Spalte jeweils die passende Aussage an!
Die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten wird langfristig __ 1 __ weil __ 2 __ .

1	
unbeschränkt wachsen	☐
beschränkt wachsen	☐
wieder sinken	☐

2	
der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr abbaut und damit der Abbau letztlich die Zufuhr übersteigt.	☐
dem Körper täglich zusätzlicher Wirkstoff zugeführt wird, der nur zu 80 % abgebaut werden kann, und somit die Zufuhr im Vergleich zum Abbau überwiegt	☐
der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr davon abbaut, auch wenn der Prozentsatz gleich bleibt.	☐

Didaktischer Kommentar

Hier ist schon alleine das Aufgabenformat sehr schwierig und die Begründungen sind auch nicht leicht zu interpretieren. Technologie ist eine wesentliche Hilfe, weil der Graph der Wachstumsfunktion schnell und leicht gezeichnet werden kann und danach die Interpretation und Beantwortung der Fragen leichter ist.



Lösungserwartung:

Die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten wird langfristig beschränkt wachsen, weil der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr davon abbaut, auch wenn der Prozentsatz gleich bleibt.

Aufgabe 3.4: Wachstum

Aufgabenpool Bifie, Aufgabe 1_005 (http://aufgabenpool.bifie.at/srp_ahs/)

Wachstum tritt in der Natur fast nie unbegrenzt auf, es erreicht einmal eine gewisse Grenze (Sättigung). Diese Sättigungsgrenze sei K. Der vorhandene Bestand zum Zeitpunkt n sei x_n. Zur Beschreibung vieler Vorgänge (Wachstum von Populationen, Ausbreitung von Krankheiten oder Informationen, Erwärmung etc.) verwendet man folgendes mathematisches Modell:

$x_{n+1} - x_n = r \cdot (K - x_n)$ *mit* $r \in \mathbb{R}^+$ *und* $0 < r < 1$ (r ist ein Proportionalitätsfaktor)

Aufgabenstellung

Kreuzen Sie die auf dieses Modell zutreffende(n) Aussage(n) an!

Diese Gleichung kann als eine lineare Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ gedeutet werden.	☐
Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum momentanen Bestand.	☐
Es liegt ein kontinuierliches Wachstumsmodell vor, d. h. man kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt die Größe des Bestands errechnen.	☐
Der Zuwachs bei diesem Wachstum ist proportional zur noch verfügbaren Restkapazität (= Freiraum).	☐
Mit zunehmender Zeit wird der Zuwachs immer geringer.	☐

Didaktischer Kommentar

Um solche Aufgaben lösen zu können, muss man schon im Unterricht mit Modellen zum beschränkten Wachstum gearbeitet haben.