CAS – Projekt T³ Österreich

Thema: Zahlenfolgen

Helmut Heugl

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte:

Zahlenfolgen, Termdarstellung, rekursive Darstellung, Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert, ε-Umgebung, Nullfolgen.

Unterrichtsmaterial:

Aufgabenbeispiele zum Thema, TI-Nspire-Files zu den Aufgaben, fertige Applets zum Experimentieren.

Didaktischer Kommentar:

Nach einem experimentellen Einstieg, bei dem die Lernenden Zahlenfolgen konstruieren sollen (z.B. Papier falten, Schlangenlinie, Geld sparen, usw.), werden Aufgaben mit den beiden Darstellungsformen – Termdarstellung und rekursive Darstellung – behandelt. Technologie ist dabei bei der Darstellung in Tabellen und als Graphen hilfreich. Vermutungen über Monotonie und Grenzwert werden unterstützt und Untersuchungen können exakt im Algebrafenster durchgeführt werden. Die Behandlung von Nullfolgen ist eine wichtige Vorbereitung auf den Grenzwert reeller Funktionen und auf die Differentialrechnung.

1. Grundlagen

Definition:

Eine fortlaufende Anordnung reeller Zahlen $\langle a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \rangle$ heißt *reelle Zahlenfolge*. Die Folge $\langle a_n | n \in \mathbb{N}^* \rangle$ kann auch als eine Funktion $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} | n \to a_n$ aufgefasst werden.

Darstellungsarten:

Termdarstellung (explizite Darstellung): Das n-te Glied der Folge ist durch einen Term von n gegeben: $a_n = f(n)$.

Rekursive Darstellung: Das Anfangsglied (die Anfangsglieder) sind gegeben. Das n-te Glied ist durch eine Funktion vom vorhergehenden Folgeglied (von vorherigen Gliedern) gegeben: $a_n = g(a_{n-1})$ (a_0 ist gegeben) oder $a_n = g(a_{n-1}, a_{n-2})$ (a_0 und a_1 ist gegeben) usf.

Aufgaben zur rekursiven Darstellung werden im Kapitel „**Wachstumsprozesse – diskrete Modelle**“ behandelt.

Monotonie:

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt streng monoton steigend, wenn $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

streng monoton steigend, wenn $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Schranken:

Eine reelle Zahl S_o heißt obere Schranke der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn $a_n \le S_o$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Eine reelle Zahl S_u heißt untere Schranke der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn $a_n \ge S_u$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Grenzwert

Intuitiver Grenzwertbegriff: Nähern sich die Glieder einer Folge immer mehr (das heißt unbegrenzt) einer bestimmten Zahl a, dann nennt man a den Grenzwert der Folge: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Exakterer Grenzwertbegriff: Eine Zahl a heißt Grenzwert einer Folge $\langle a_n \rangle$, wenn es zu jeder (noch so kleinen) positiven reellen Zahl ε einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Didaktischer Kommentar zum Grenzwertbegriff:

Mit Hilfe von Technologie kann man experimentell sehr gut zu intuitiven Grenzwertvermutungen kommen, weil man einerseits in Tabellen Werte für große n und zusätzlich den Graphen für große n untersuchen kann. Untersuchungen bezogen auf den exakten Grenzwertbegriff können im Algebrafenster durchgeführt werden. Wichtig ist, dass man den Wert n_0 auch für beliebige Werte von ε ermitteln kann. Nur nach einem bestimmten ε zu fragen, ist für das Verständnis des Grenzwertbegriffes eher schädlich.

2. Aufgaben zur Termdarstellung von Folgen

Didaktischer Kommentar:

Der große Vorteil der Technologie ist die leicht verfügbare graphische Darstellung und das parallele Arbeiten mit CAS und in Tabellen. Vermutungen können durch Untersuchung des Graphen und die Ermittlung von Funktionswerten in der Tabelle für große Werte von n gewonnen werden.

Da die entsprechenden Gleichungen und Ungleichungen vom CAS gelöst werden, können sich die Lernenden auf Kompetenzen in den Bereichen Interpretieren und Argumentieren konzentrieren. Damit stehen Fragen zu den Zahlenfolgen im Vordergrund und nicht Rechenfertigkeit.

Aufgabe 2.1: Darstellung von Folgen

Gegeben ist die Folge $u1(n) = 1 + \frac{3}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

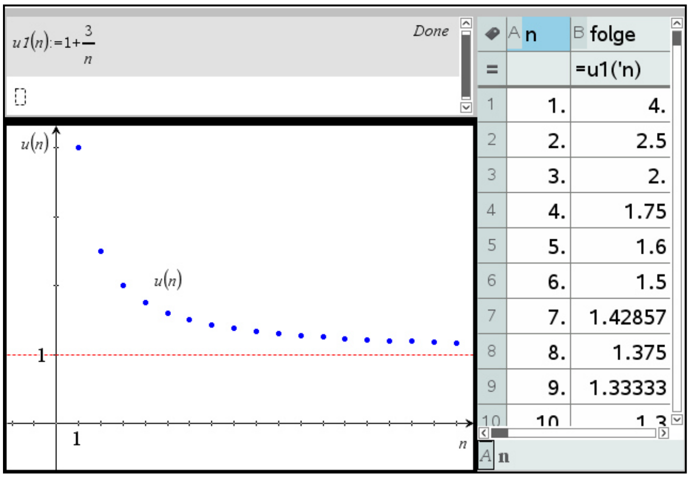
Zeichne den Graphen der Folge und ermittle eine Tabelle:

(1) Im Fenster "*Lists & Spreadsheets*": Definiere zwei Spalten für n und u(n) und zeichne den Punktgraphen mit der Eingabeeinstellung "*Scatterplot*".

(2) Im „*Graphikfenster*“ mit der Eingabeeinstellung "*Sequence*". Die Eingabe eines Anfangswerts ("*Initial Term*") ist nicht notwendig, man benötigt sie nur bei rekursiven Darstellungen.

(3) Mit dem „Sequence“-Operator

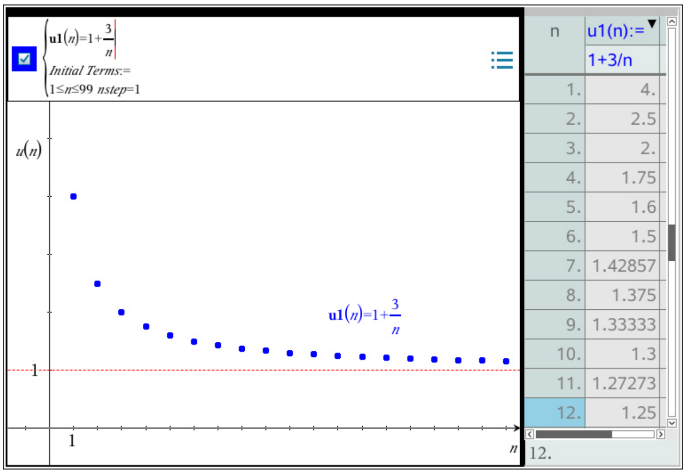
Aufgabe 2.1 (1)



Darstellung mit "*Lists & Spreadsheets*",

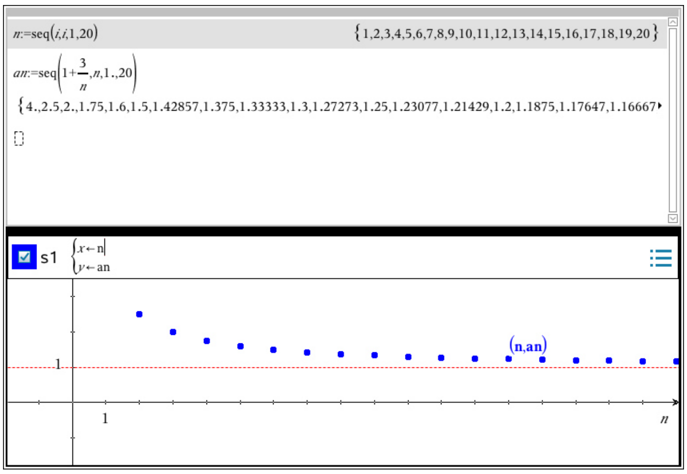
Grapheingabe „*Scatterplot*“

Aufgabe 2.1 (2)



Darstellung im „*Graphikfenster*“ mit der Eingabeeinstellung „*Sequence*“

Aufgabe 2.1 (3)



Mit dem „Sequence“-Operator („*seq(a(n),n,1,20)*“) erzeugt man zwei Folgen und zeichnet den zugehörigen „*Scatterplot*“.

Aufgabe 2.2: Monotonie und Schranken von Folgen

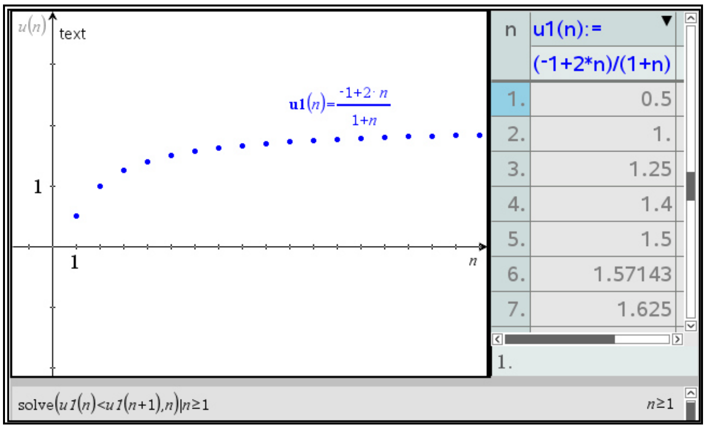
Gegeben sind die Folgen:

(1) $u1(n)=\dfrac{-1+2n}{1+n}$ (2) $u2(n)=1-n^2$ (3) $u3(n)=\dfrac{1}{25-2n}$

a) Zeichne die Graphen der Folgen und untersuche, ob die Folgen streng monoton sind. Beweise deine Vermutungen.

b) Gibt es für diese Folgen untere und obere Schranken? Beweise deine Vermutungen.

Folge (1)



Behauptung: u1 ist streng monoton steigend:

Der Beweis zeigt: Die Behauptung ist richtig für alle n∈ *.

$u1(n):=\frac{-1+2\cdot n}{1+n}$ Done

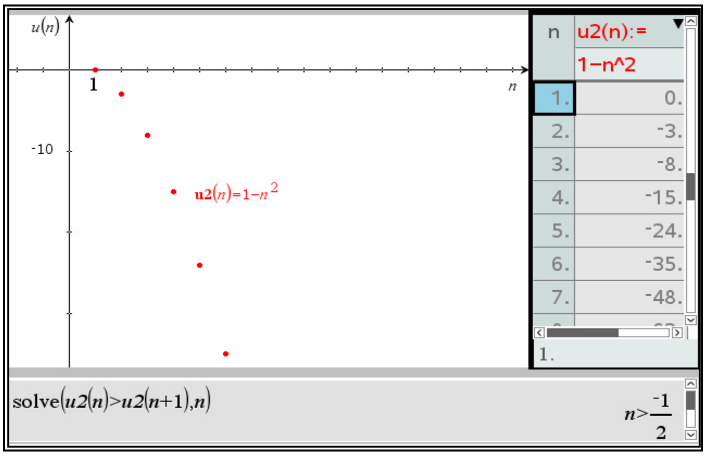
$\text{solve}\left(\frac{-1+2\cdot n}{1+n}\geq 0,n\right)|n\geq 0$ $n\geq\frac{1}{2}$

$\text{solve}\left(\frac{-1+2\cdot n}{1+n}\leq 2,n\right)|n\geq 0$ $n\geq 0$

Vermutung (1):
0 ist untere Schranke:
Richtig für alle n∈ℕ*.

Vermutung (2):
2 ist obere Schranke:
Richtig für alle n∈ℕ*

Folge (2)



Behauptung:

u2 ist streng monoton fallend:

Der Beweis zeigt: Die Behauptung ist richtig für alle n∈ *.

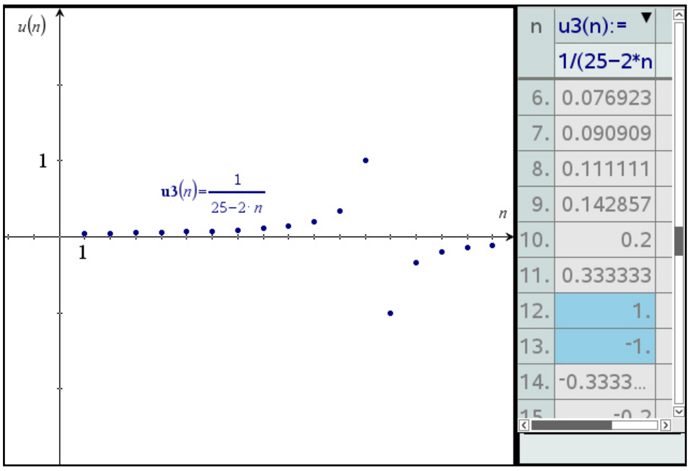
$u2(n):=1-n^2$	*Done*
$\text{solve}(1-n^2\le 0,n)\mid n\ge 0$	$n\ge 1$
$\text{solve}(1-n^2\ge a,n)\mid n\ge 0$	$0\le n\le \sqrt{1-a}$ and $a\le 1$

Vermutung (1):

0 ist obere Schranke: Richtig für n∈ℕ*

Gibt es eine untere Schranke?
Die Lösung der Ungleichung zeigt: es gibt keine Zahl a, so dass gilt: u2(n)≥a für alle ℕ*.

Folge (3)



Vermutung:

u3 ist streng monoton steigend.

Der Beweis zeigt: Die Vermutung ist richtig für alle n∈ , außer für n=12 ⇒ die Folge ist nicht monoton.

$\text{solve}(u3(n+1)>u3(n),n)$	$n<\frac{23}{2}$ or $n>\frac{25}{2}$

Vermutung:
Die Folge ist streng monoton steigend.
Die Vermutung ist richtig für alle n aus *, außer für n = 12 ⇒ die Folge ist nicht streng monoton steigend.

$\text{solve}(u3(n)\le 1,n)\mid n\ge 0$	$0\le n\le 12$ or $n>\frac{25}{2}$
$\text{solve}(u3(n)\ge -1,n)\mid n\ge 0$	$0\le n<\frac{25}{2}$ or $n\ge 13$

Aus der Tabelle ergibt sich die Vermutung:
+1 ist obere Schranke und -1 ist untere Schranke.
Beide Vermutungen sind richtig für alle n∈ℕ*.

Didaktischer Kommentar zu Aufgabe 2.3:

Die folgende Aufgabe (Quelle: Gertrud Aumayr T3) ist ein fertiges Applet, das durch experimentelles Arbeiten zum besseren Verständnis der Grenzwertdefinition beitragen soll. Mit Hilfe von Schiebereglern können die Schülerinnen und Schüler die ε-Umgebung um den vermuteten Grenzwert verändern und das passende n_0 suchen.

Aufgabe 2.3: Grenzwert 1 – experimentieren mit ε-Umgebungen

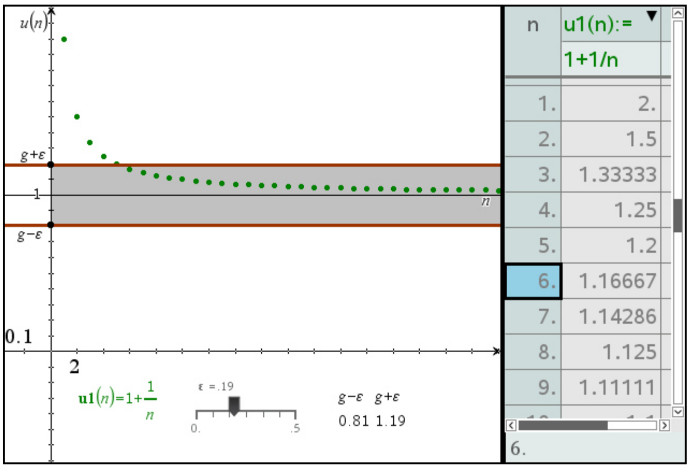
Gegeben sind die Zahlenfolgen

(1) $u1(n)=1+\frac{1}{n}$ (2) $u1(n)=(0.5)^n$ (3) $u1(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (4) $u1(n)=(-1)^n$

Nutze die fertigen Applets zum Experimentieren:

Falls ein Grenzwert α existiert, wird er im Notesfenster mit Hilfe von CAS ermittelt. Verändere mit Hilfe der eingebauten Schieberegler die ε-Umgebungen im Graphikfenster und suche den passenden Index n_0, so dass entsprechend der Grenzwertdefinition gilt:
$|u(n)-\alpha|<\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Im Notesfenster wird n_0 durch Lösen der Ungleichung mit Hilfe von CAS ermittelt.

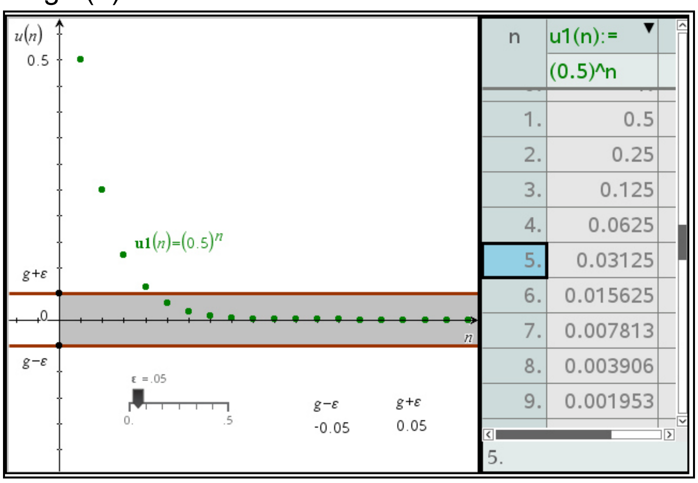
Folge (1)



Man erkennt im Graphikfenster und in der Tabelle:

Für ε = 0.19 ist n_0 = 6. Die Rechnung im Notes-Fenster bestätigt die Beobachtungen.

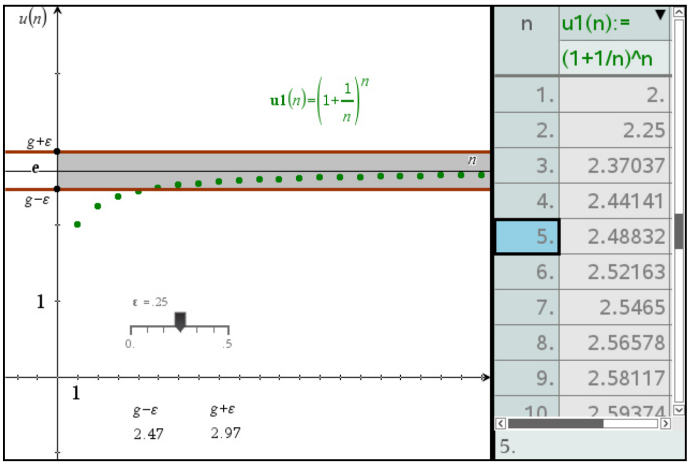
Folge (2)



Man erkennt im Graphikfenster und in der Tabelle:

Für ε = 0.05 ist n_0 = 5. Die Rechnung im Notes-Fenster bestätigt die Beobachtungen.

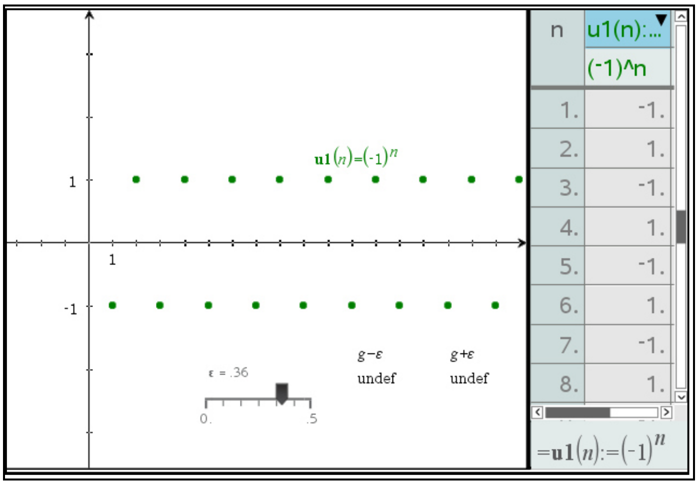
Folge (3)



Man erkennt im Graphikfenster und in der Tabelle:

Für ε = 0.25 ist n_0 = 5. Die Rechnung im Notes-Fenster ergibt einen komplexen Term, n_0 kann nicht direkt ermittelt werden.

Folge (4)



Schon die Rechnung im Notesfenster zeigt, dass kein Grenzwert existiert.

Die Graphik bestätigt die Vermutung: Es kann um einen vermuteten Grenzwert (z.B. g = 1) keine beliebig kleine ε-Umgebung geben, so dass fast alle Glieder der Folge in der ε-Umgebung liegen.

Didaktischer Kommentar zu Aufgabe 2.4:

Die für einen Einstieg in die Analysis besonders wichtigen Folgen sind die **Nullfolgen** (siehe Aufgabe 2.4), weil sie für das Verständnis des Grenzwerts reeller Funktionen und damit für das Verständnis des Differentialquotienten sehr hilfreich sind.

Außerdem können sie unter Verwendung der Grenzwertsätze bei der Ermittlung von Grenzwerten von Zahlenfolgen mit rationalen Funktionstermen genutzt werden. Solche in der Vergangenheit häufig vorkommende Aufgaben verlieren aber ihre Bedeutung bei Verfügbarkeit von CAS-Werkzeugen.

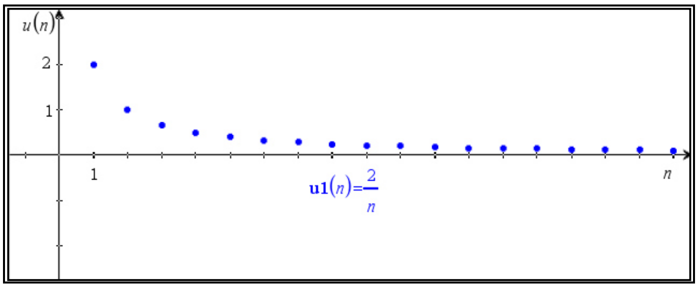
Aufgabe 2.4: Grenzwert 2 – Nullfolgen

Gegeben sind die Folgen

(1) $u1(n) = \frac{2}{n}$ (2) $u2(n) = \frac{(-1)^n}{n^2}$

Zeichne die Graphen der beiden Folgen und beweise mit Hilfe der Grenzwertdefinition, dass es sich um Nullfolgen handelt.

Folge (1)

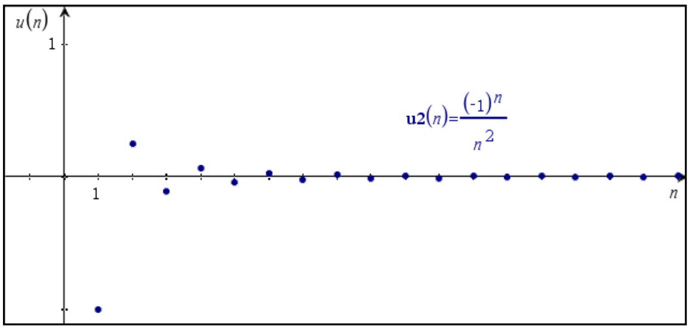


Der Grenzwert 0 wird durch den Beweis bestätigt. Für jede (noch so kleine) ε-Umgebung gilt: Es liegen fast alle Elemente der Folge in der ε-Umgebung, außerhalb nur endlich viele.

$\text{solve}(\lvert u1(n)-0\rvert<\varepsilon,n)\mid n\geq 1$	$n>\frac{2}{\varepsilon}$ and $n\geq 1$ and $\varepsilon>0$
$n>\frac{2}{\varepsilon}\mid\varepsilon=0.001$	$n>2000.$

Für einige Werte von ε kann auch ein konkreter Wert n_0 ermittelt werden.

Folge (2)



Auch bei Folge (2) wird die Vermutung (Grenzwert ist 0) durch die Rechnung bestätigt

$\text{solve}(\lvert u2(n)-0\rvert<\varepsilon,n)\mid n\geq 1$	$n>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ and $n\geq 1$ and $\varepsilon>0$
$n>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\mid\varepsilon=0.001$	$n>31.6228$

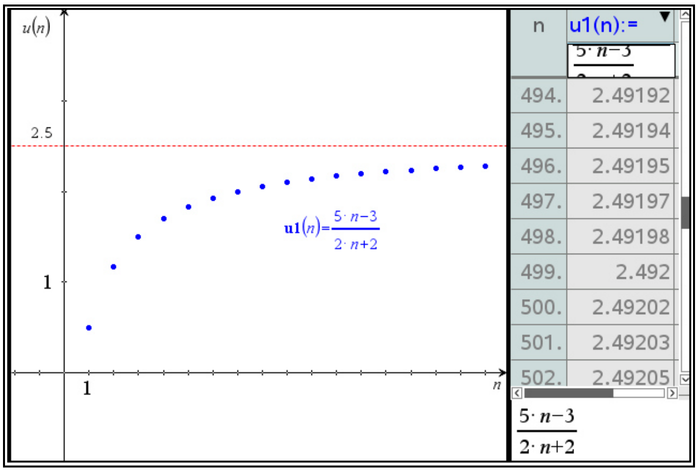
Aufgabe 2.5: Grenzwert 3 – Beweise mittels Grenzwertdefinition

Gegeben sind die Folgen

(1) $u1(n) = \dfrac{5n-3}{2n+2}$ (2) $u2(n) = \sqrt{n+1}$

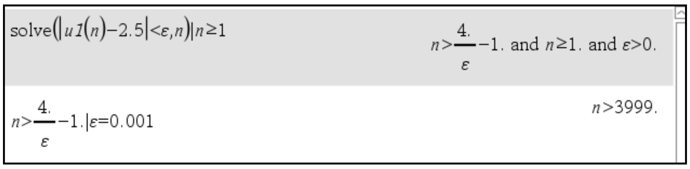
Zeichne die Graphen der beiden Folgen und stelle eine Vermutung für einen eventuellen Grenzwert auf.

Beweise die Vermutung mit Hilfe der Grenzwertdefinition.

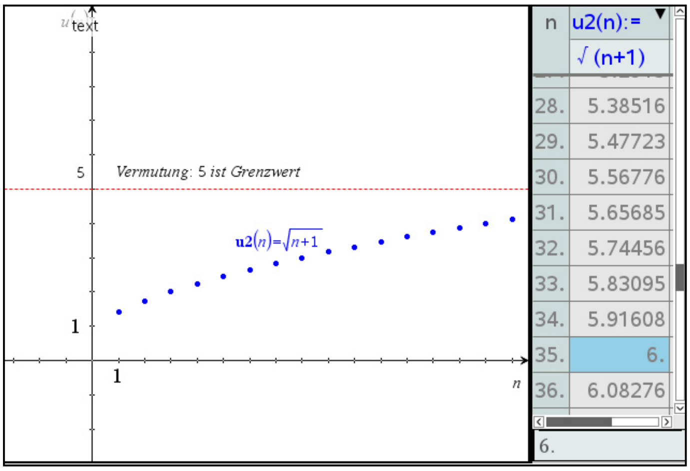


Folge (1)

Die Vermutung, 2.5 wäre Grenzwert, wird erhärtet, indem man in der Tabelle Werte für große n sucht.



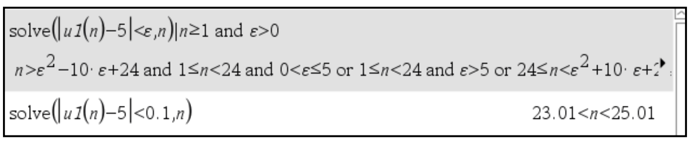
Der Beweis im CAS-Fenster bestätigt die Vermutung.



Folge (2)

Vermutung: 5 ist Grenzwert.

Die Vermutung, 5 wäre Grenzwert, wird schon in der Tabelle nicht bestätigt: u2(35) = 6 (angenommen die Folge wäre streng monoton steigend).



Die für den Beweis nötige Lösung der Ungleichung führt zu sehr komplexen Ausdrücken. Man kann aber erkennen, dass die Lösungsmenge nach oben beschränkt ist.

Um zu beweisen, dass die Behauptung falsch ist, genügt jedoch schon ein Widerspruch für ein bestimmtes ε , z.B. für $\varepsilon = 0.1$ erkennt man: Nur das 25. Glied liegt in der ε-Umgebung.

Didaktischer Kommentar zur Bedeutung des Themas für die neue Reifeprüfung:

Aufgabenbeispiele zur Reifeprüfung findet man nicht, da dieser Lehrplaninhalt (leider) nicht in der Grundkompetenzliste der Reifeprüfung zu finden ist. Andererseits ist in der Analysis der Grenzwertbegriff unverzichtbar. Das zeigt sich auch bei den Grundkompetenzen, wo man Formulierungen wie „intuitiver Grenzwertbegriff“ oder „Grenzwert von Summen“ usw. findet. Daraus folgt aber, dass im Unterricht das Thema auch im Hinblick auf die neue Reifeprüfung wichtig ist.