CAS – Projekt T^3 Österreich

Thema: Näherungsverfahren beim Lösen von Gleichungen

Gertrud Aumayr ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Gleichungen, Bisektionsverfahren, Sekantenverfahren, Regula Falsi

---

Unterrichtsmaterial

Aufgabe

Bei manchen Schülern und Schülerinnen entsteht der Eindruck, dass mit den ihnen bekannten Methoden alle Gleichungen exakt lösbar sind. Das ist leider nicht so.

Immer wieder ist man beim Lösen von Gleichungen auf iterative (schrittweise) Näherungsverfahren angewiesen, die zwar die exakte Lösung nicht erreichen, ihr aber beliebig nahe kommen.

Gegeben sei im Folgenden eine Gleichung der Form f(x)=0, wobei die Funktion f durchgehend gezeichnet werden kann.

In dieser Aufgabe werden exemplarisch Näherungsverfahren ausprobiert.

1. **Das Bisektionsverfahren** (Intervallhalbierungsverfahren):

i. Suche zwei beliebige Startwerte a und b,
sodass die Funktionswerte an diesen beiden Stellen unterschiedliches Vorzeichen haben (etwa f(a)<0 und f(b)>0 oder f(a)>0 und f(b)<0).
Im Intervall [a;b] muss dann mindestens eine Nullstelle der Funktion liegen.

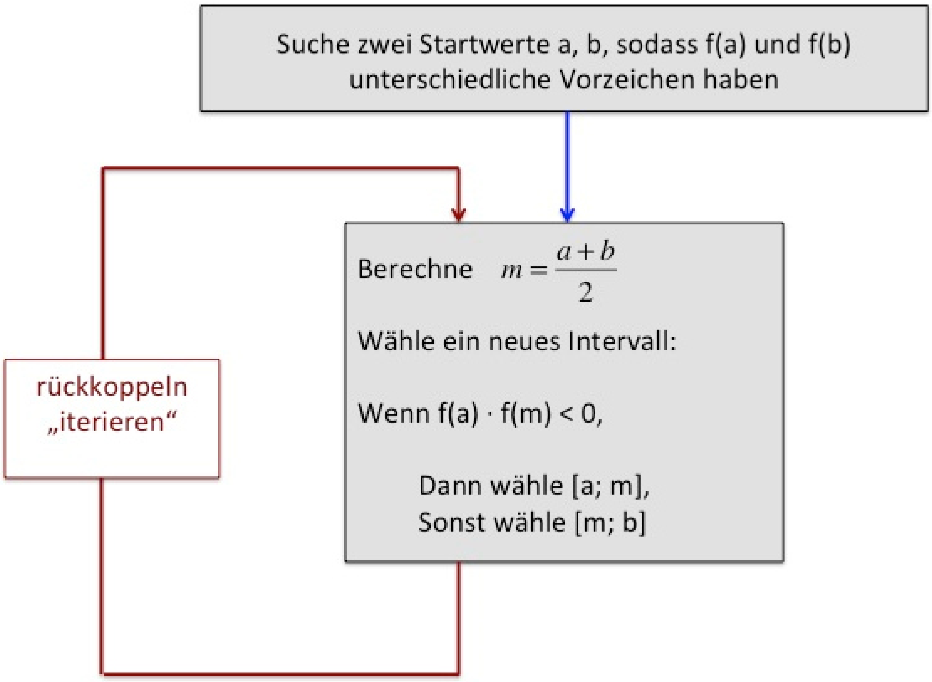
ii. Berechne nun die Intervallmitte $\frac{a+b}{2}$, sowie den Funktionswert an dieser Stelle: $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

iii. Es gibt die beiden Teilintervalle $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ und $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$. Je nach Vorzeichen von $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ lässt sich entscheiden, welches der beiden Intervalle auf jeden Fall eine Nullstelle enthält.

iv. Somit hat man ein kleineres Intervall gefunden, das mindestens eine Nullstelle enthält. Dieses Intervall verwendet man und beginnt erneut bei Punkt ii.

v. Dieses Verfahren setzt man solange fort, bis man ausreichend nahe an einer Nullstelle ist.

Graphische Zusammenfassung des Verfahrens



Hinweis zu Näherungsverfahren:

- *Überlege dir zu Beginn, auf wie viele Stellen genau der Näherungswert berechnet werden soll – also ein sogenanntes Abbruchkriterium*
- *Erfahrung zeigt, dass es günstig ist, Startwerte in der Nähe der zu berechnenden Nullstelle zu wählen.*

Aufgabenstellung

Bestimme mit Hilfe des Bisektionsverfahrens die Nullstelle der Funktion $f(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x - 2$.

a) Begründe, dass 3 und 4 geeignete Startwerte sind.

b) Verwende die Tabellenkalkulation des TI-Nspire um das Verfahren durchzuführen.
Füge zunächst eine dritte Spalte ein mit der „Halbierungsformel“ und kopiere händisch die einzelnen Zellen.

c) Vergleiche nun mit dem Screenshot rechts. Begründe die Formel in der Zeile unten im Screenshot, die die Tabelle direkt erzeugt.

Hinweis:
Die entsprechenden Formeln müssen nur in der zweiten Zeile eingegeben werden, den Rest erhält man durch runterkopieren.

	A	B	C	D
=				
1	3.	4.		
2	3.	3.5		
3	3.25	3.5		
4	3.25	3.375		
5	3.3125	3.375		
6	3.3125	3.34375		
7	3.3125	3.32813		
8	3.3125	3.32031		
9	3.31641	3.32031		
10	3.31836	3.32031		
11	3.31934	3.32031		
12	3.31982	3.32031		

A2 $=\text{when}\left(f\left(\frac{a1+b1}{2}\right)\cdot f(a1)>0,\frac{a1+b1}{2},a1\right)$

2. Sekantenverfahren:

Zwischen zwei beliebigen Punkten des Funktionsgraphen (a,f(a)) und (b;f(b)) legt man eine Sekante, d. h. man ersetzt im Intervall [a; b] die Funktion durch eine Gerade und schneidet diese mit der x- Achse. Als neues Intervall verwendet man [b; x_{neu}] und beginnt von vorne.

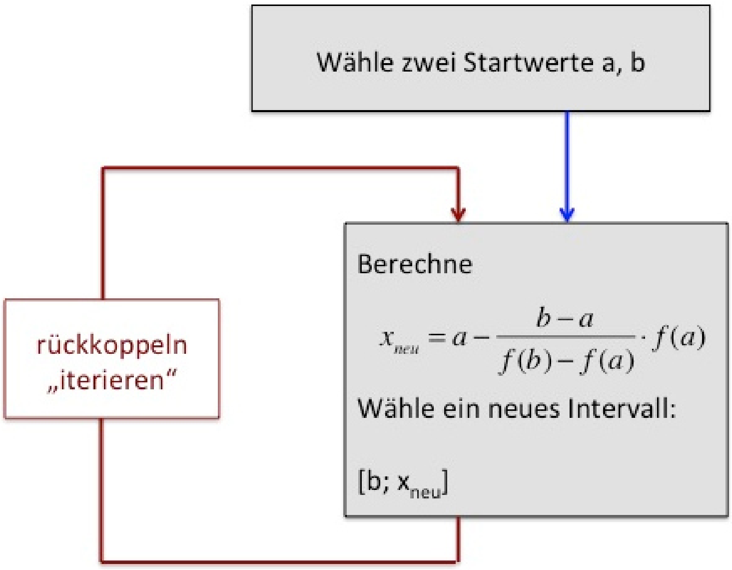
Kurzfassung

i. Suche zwei beliebige Startwerte a und b

ii. Berechne $x_{neu} = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a)$

vi. Ersetze a durch b und b durch x_{neu} und beginne erneut bei ii.

vii. Dieses Verfahren setzt man solange fort, bis man ausreichend nahe an der Nullstelle ist.



Aufgabenstellung

Bestimme mit Hilfe des Sekantenverfahrens die Nullstelle der Funktion $f(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x - 2$.

a) Wähle -2 und 4 als Startwert.

b) Verwende die Tabellenkalkulation des TI-Nspire um das Verfahren durchzuführen.
Begründe deine Vorgehensweise.

Hinweise:
Der Screenshot rechts zeigt in der ersten Zeile die Startwerte und den berechneten Wert x_{neu}, in der zweiten Zeile die neuen Intervallgrenzen usw.
Entsprechende Formeln müssen nur in der zweiten Zeile eingegeben werden, den Rest erhält man durch runterkopieren.

	A aa	B bb	C xneu	D
=				
1	-2.	4.	0.571429	
2	4.	0.571429	2.23688	
3	0.571429	2.23688	14.6666	
4	2.23688	14.6666	2.31752	
5	14.6666	2.31752	2.39424	
6	2.31752	2.39424	3.96019	
7	2.39424	3.96019	3.09882	
8	3.96019	3.09882	3.27503	
9	3.09882	3.27503	3.32401	
10	3.27503	3.32401	3.32014	
11	3.32401	3.32014	3.3202	
12	3.32014	3.3202	3.3202	

C1 $=a1-f(a1)\cdot\frac{b1-a1}{f(b1)-f(a1)}$

c) Welche Bedeutung hat der Bruch $\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ in der Formel für x_{neu}.

Zusatzaufgabe

Beim Sekantenverfahren wird der Funktionsgraph jeweils im betrachteten Intervall durch eine Gerade ersetzt und die Nullstelle dieser Gerade berechnet.

Zeige, dass die Nullstelle der Gerade durch die beiden Punkte (a; f(a)) und (b; f(b)) gleich $x_{Nullstelle} = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a)$ ist.

3. Regula Falsi

Das Regula-Falsi-Verfahren kombiniert das Sekantenverfahren und das Bisektionsverfahren.

i. Suche zwei beliebige Startwerte a und b,
sodass die Funktionswerte an diesen beiden Stellen unterschiedliches Vorzeichen haben (etwa f(a)<0 und f(b)>0 oder f(a)>0 und f(b)<0).
Im Intervall [a;b] liegt dann mindestens eine Nullstelle der Funktion.

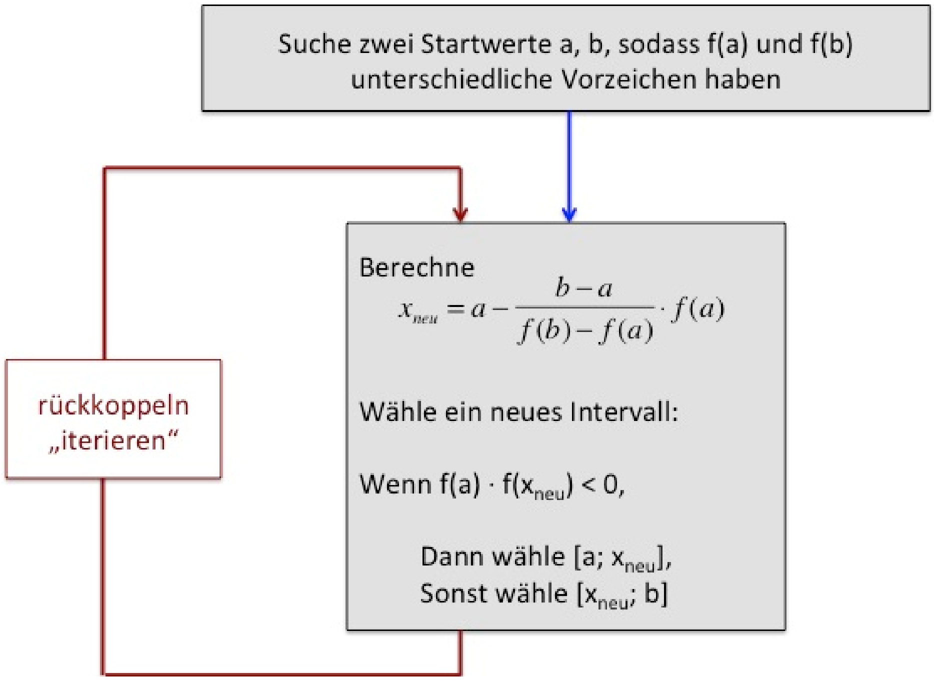
ii. Berechne $x_{neu} = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a)$ sowie den Funktionswert an dieser Stelle: $f\left(x_{neu}\right)$.

iii. Es gibt die beiden Teilintervalle $\left[a; x_{neu}\right]$ und $\left[x_{neu}; b\right]$. Je nach Vorzeichen von $f\left(x_{neu}\right)$ lässt sich entscheiden, welches der beiden Intervalle mindestens eine Nullstelle enthält.

iv. Somit hat man ein kleineres Intervall gefunden, das eine Nullstelle enthält. Dieses Intervall verwendet man und beginnt erneut bei Punkt ii.

v. Dieses Verfahren setzt man solange fort, bis man ausreichend nahe an der Nullstelle ist.

Graphische Zusammenfassung des Verfahrens



Aufgabenstellung

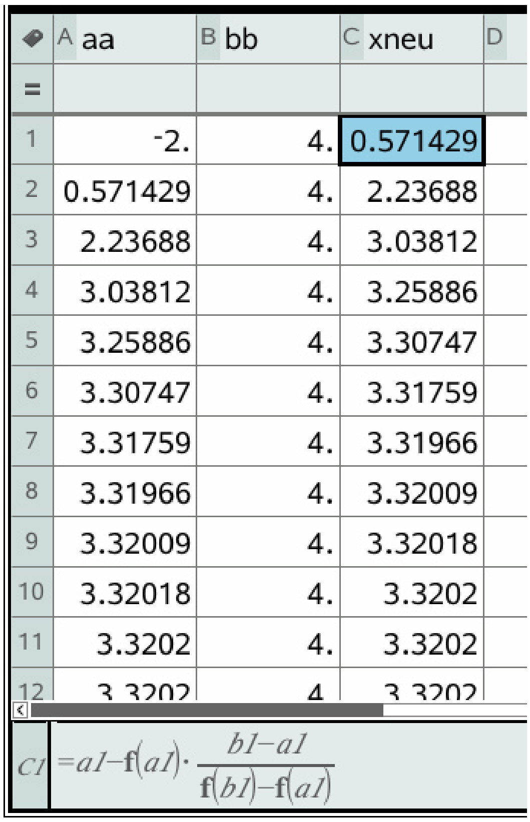
Bestimme mit Hilfe des Regula–Falsi-Verfahrens die Nullstelle der Funktion
$f(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x - 2$.

c) Begründe, dass -2 und 4 geeignete Startwerte sind.

d) Verwende die Tabellenkalkulation des TI-Nspire, um das Verfahren durchzuführen. Begründe deine Vorgehensweise.

Hinweise:
Der Screenshot rechts zeigt in der ersten Zeile die Startwerte und den berechneten Wert x_{neu}, in der zweiten Zeile die neuen Intervallgrenzen usw.

Entsprechende Formeln müssen nur in der zweiten Zeile eingegeben werden, den Rest erhält man durch runterkopieren.



	A aa	B bb	C xneu	D
=				
1	-2.	4.	0.571429	
2	0.571429	4.	2.23688	
3	2.23688	4.	3.03812	
4	3.03812	4.	3.25886	
5	3.25886	4.	3.30747	
6	3.30747	4.	3.31759	
7	3.31759	4.	3.31966	
8	3.31966	4.	3.32009	
9	3.32009	4.	3.32018	
10	3.32018	4.	3.3202	
11	3.3202	4.	3.3202	
12	3.3202	4.	3.3202	

C1 $=a1-f(a1)\cdot\frac{b1-a1}{f(b1)-f(a1)}$

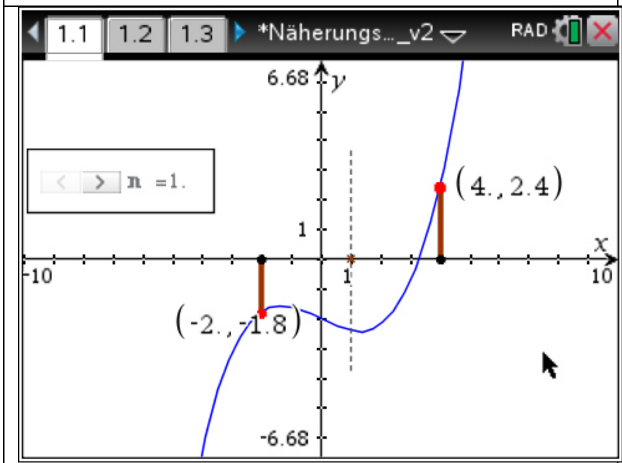
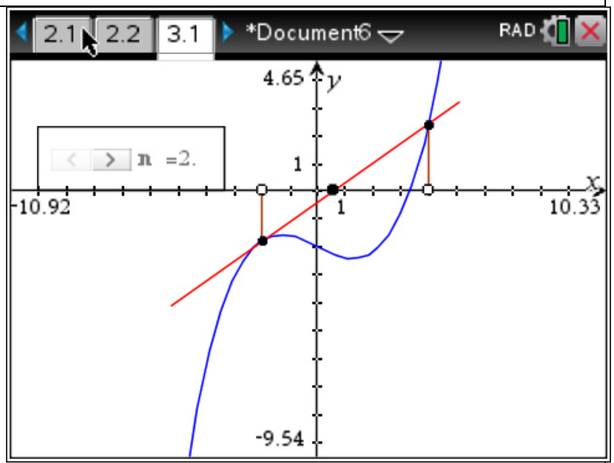
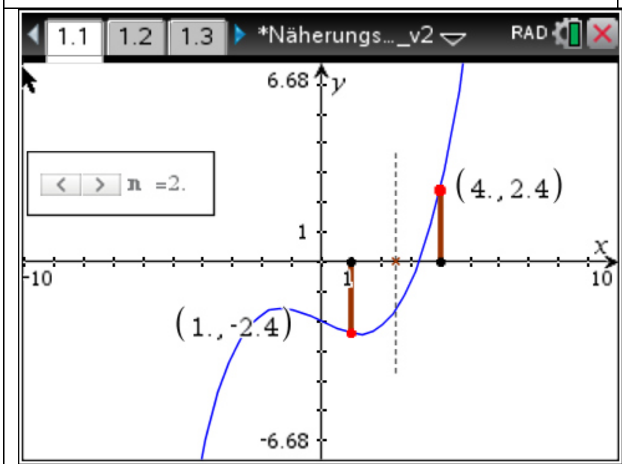
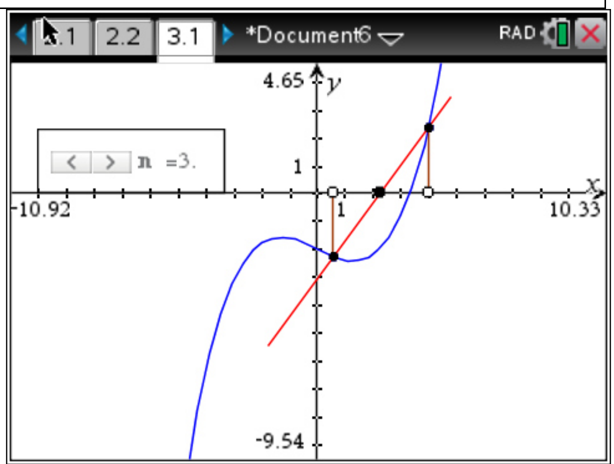
✂--

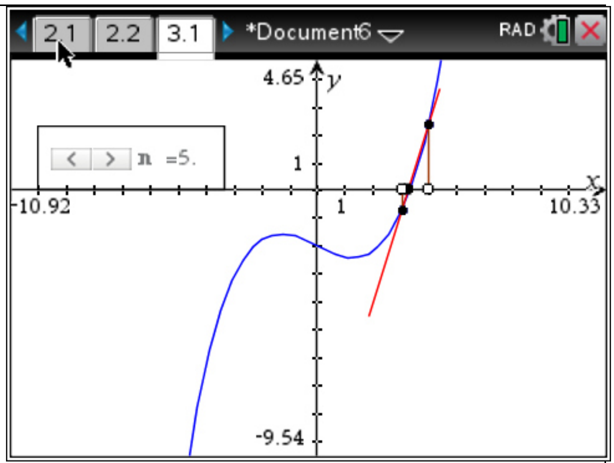
Vorschlag zur Umsetzung

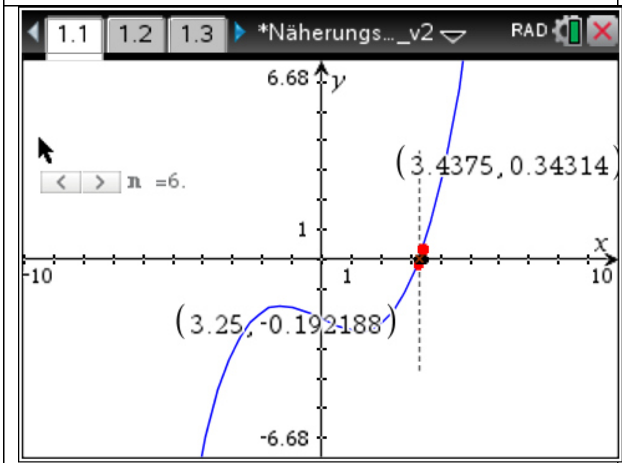
Zum Einstieg in die Aufgabe verwendet man die mitgelieferten TNS-Datei, die als Präsentation gedacht ist. Dort findet man im Problem Bisektionsverfahren_Demo eine Visualisierung des Bisektionsverfahren, im Problem Sekantenverfahren_Demo eine Visualisierung des Sekantenverfahrens - sowie im Problem Regula Falsi_Demo eine Visualisierung des Regula Falsi Verfahrens.
Es ist jeweils im Graphikfenster der Schieberegler zu betätigen.

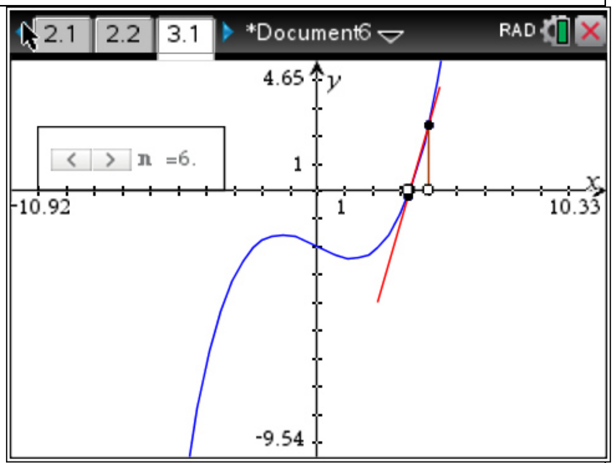
Der Vollständigkeit halber ist in diesem File auch jeweils die Rechnung (Problemname = ... Rechnung) durchgeführt, so wie sie von den Schülern und Schülerinnen erwartet wird.

Exemplarisch einige Screenshots für Bisektionsverfahren und Regula Falsi.

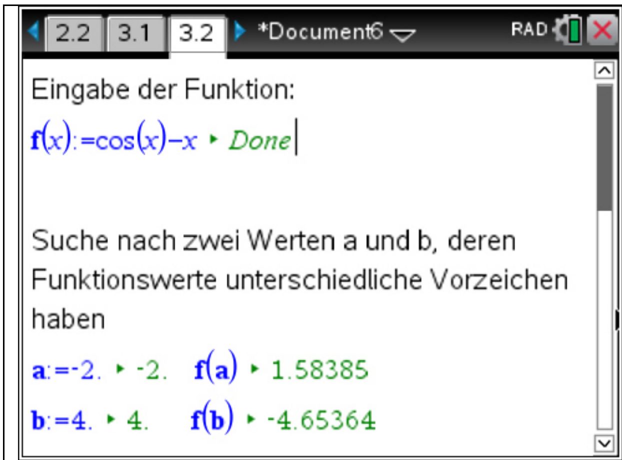
Bisektionsverfahren	**Regula Falsi**
	
	

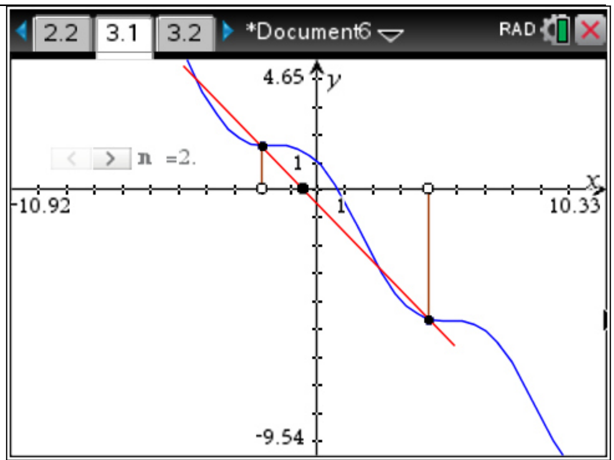


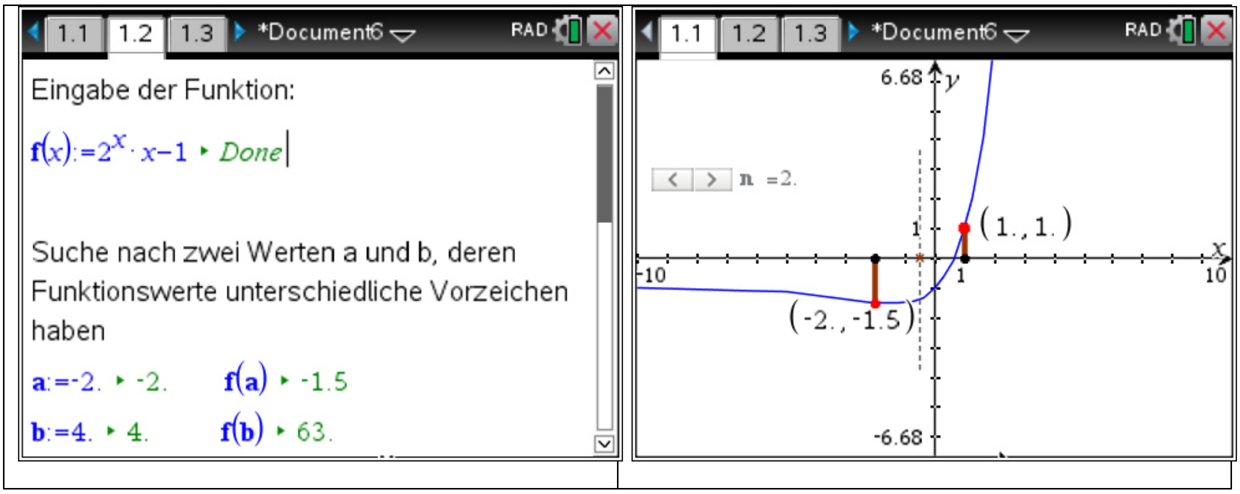




Man kann in dieser Datei auch experimentieren, indem man die Funktion ändert etwa auf $f(x) = \cos(x) - x$ oder $f(x) = 2^x \cdot x - 1$.







Sobald die Verfahren verstanden wurden, sollen die Schüler und Schülerinnen in der Tabellenkalkulation arbeiten und möglichst einfach diese Verfahren ausführen.

Hilfestellungen bieten die Screenshots.

Didaktischer Kommentar

Die meisten Gleichungen, mit denen man in der Schule zu tun hat, sind exakt lösbar, das heißt, man kann die Lösung durch Grundrechnungsarten und Wurzelziehen finden. Es könnte daher der Eindruck entstehen, dass dies immer so ist. Näherungsverfahren bieten die Möglichkeit einmal auch Gleichungen zu betrachten, die eben nicht exakt lösbar sind.

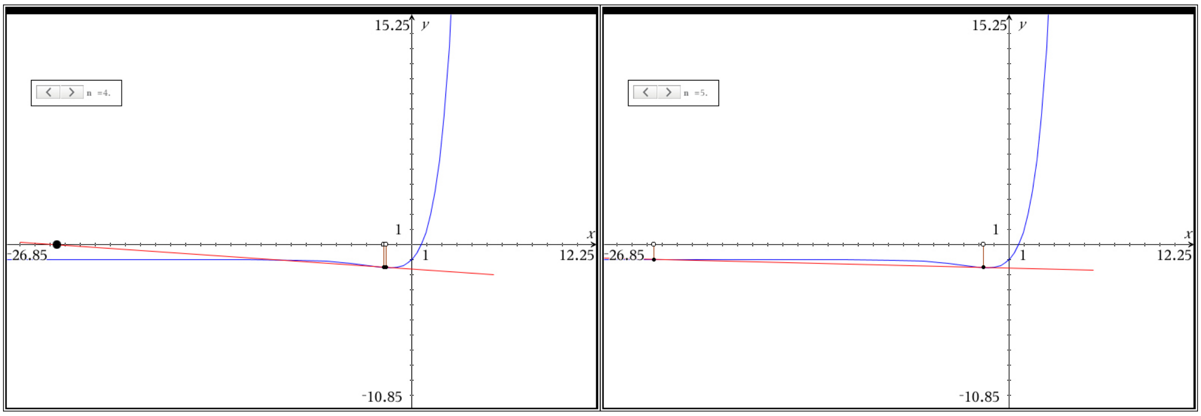
Die Umsetzung im Unterricht könnte so erfolgen, dass die Schüler und Schülerinnen zunächst die schrittweise Beschreibung und die graphische Zusammenfassung des Verfahrens durcharbeiten. Anschließend könnte man im Plenum die Verfahren durchbesprechen und die Lehrperson könnte die Visualisierung der beiden Verfahren in der fertigen Datei präsentieren und damit experimentieren. Diese Datei dient eher der Präsentation und soll daher nicht ausgeteilt werden. Die Schüler und Schülerinnen sollen die Rechnung eigenständig in einer neuen Datei erarbeiten.

Die Umsetzung der Rechnung in der Tabellenkalkulation sollten die Schüler und Schülerinnen selbstständig durchführen. Der Umgang mit einer Tabellenkalkulation sollte aus dem Informatik- bzw. Mathematikunterricht bekannt sein. In der Angabe ist außerdem jeweils ein Screenshot angefügt, der jeweils eine benötigte Formel vorgibt. Die restlichen Formeln sollen selber erarbeitet und **begründet** werden.

Die Zusatzaufgabe wurde angefügt, um bewusst zu machen, welche Idee hinter der Methode steckt und dass die verwendete Formel nicht aus der Luft gegriffen ist. Im Rahmen eines differenzierten Unterrichts schafft es vielleicht auch jemand, diese Zusatzaufgabe zu lösen.

In den gängigen Schulbüchern, die auf Näherungsverfahren eingehen, wird oft zwischen Sekantenverfahren und Regula Falsi nicht getrennt. Manchmal wird das Sekantenverfahren als Regula Falsi bezeichnet. Meist wird nur das Bisektionsverfahren und Regula Falsi besprochen.
Im Gegensatz zum Regula-falsi-Verfahren kann es beim Sekantenverfahren auftreten, dass die Nullstelle für einige Iterationsschritte nicht mehr zwischen x_n und x_{n+1} liegt.
Hier wurden bewusst alle drei Verfahren durchgearbeitet und es liegt im Ermessen der Lehrperson, welche sie durchbespricht.

In den Schulbüchern wird dieses Kapitel kurz gehalten. D.h. auf Fragen wie etwa, ob diese Verfahren immer funktionieren oder ob man auch die Nullstelle findet, die man sucht, werden kaum behandelt.
Mit dem beigelegten File könnte exemplarisch zumindest graphisch gezeigt werden, dass man bei der Funktion $f(x)=2^x\cdot x-1$ beim Sekantenverfahren keine Lösung erhält, da bei jedem Schritt die Sekante flacher wird, während sich beim Bisektionsverfahren keine Probleme ergeben..



Das Sekantenverfahren bietet sich an, als Vorbereitung des Newton–Verfahrens als Anwendung in der Differentialrechnung in der 7. Klasse.
Zusammenhang mit dem Newtonverfahren:

Sekantenverfahren: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\cdot f(x_n)$

Newtonverfahren („Tangentenverfahren"): $x_{n+1}=x_n-\dfrac{1}{f'(x_n)}\cdot f(x_n)$

Technologiehilfe

Präsentation mit der fertigen Datei *„Naeherungsverfahren.tns".*

Rechnung

Bisektionsverfahren: Formel in der Zelle b2:

$$B2 = \text{when}\left(f\left(\frac{a1+b1}{2}\right)\cdot f(b1)>0, \frac{a1+b1}{2}, b1\right)$$

Sekantenverfahren:

Zelle a2:=b1 und b2:=c1

Regula Falsi Methode: Formeln in den Zellen a2 und b2:

$$A2 = \text{when}(f(a1)\cdot f(c1)>0, c1, a1)$$

