Thema: Ungleichungen

Helmut Heugl

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Ungleichungen, Äquivalenzumformungen für Ungleichungen, Grundgesetze für Ungleichungen, graphische Lösung, Fallunterscheidungen, Halbebenen

Themen:

Lösen von Ungleichungen mit Äquivalenzumformungen:

- Lineare Ungleichungen
- Ungleichungen mit Bruchtermen und Betragsungleichungen
- Quadratische Ungleichungen

Grafisches Lösen von Ungleichungen

Lösen von Ungleichungen mit dem „*solve*“-Befehl

Aufgabe „Ungleichungen“

a) Löse die folgenden Ungleichungen mit CAS durch Äquivalenzumformungen bzw. durch Fallunterscheidungen. Formuliere die Grundgesetze für Ungleichungen.

$$3\cdot(1-2x)<15$$

$$\frac{x-1}{x+2}>2$$

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{5}>4.8$$

$$2\le|x-3|<4$$

$$x^2-x-6<0$$

b) Löse die folgenden Ungleichungen grafisch

$$x-1\ge-0.5x+3$$

$$\frac{x-1}{x+2}>2$$

$$2\le|x-3|<4$$

$$x^2-x-6<0$$

c) Löse die Ungleichungen von Teil (a) mit dem „*solve*“-Befehl

Didaktischer Kommentar

Ungleichungen sollen zuerst ohne Nutzung des *„solve“*-Befehls mit Äquivalenzumformungen gelöst werden. Dabei sollen die Grundgesetze für Ungleichungen erarbeitet und genutzt werden. Beim Lösen von Ungleichungen mit Bruchtermen und Betragsungleichungen führt das Arbeiten mit CAS zu Fallunterscheidungen. Quadratische Ungleichungen löst man durch Faktorisieren und dann durch Fallunterscheidungen.

Beim grafischen Lösen gibt es verschiedene Visualisierungsmöglichkeiten für die Darstellung des Lösungsintervalls (siehe Lösungsvorschläge).

Erst nach dieser Lernphase soll der *„solve“*-Befehl als Black Box genutzt werden. Davor kann er schon zur Probe eingesetzt werden. Damit soll die für die Nutzung von Technologie nötige Werkzeugkompetenz erworben werden.

Lösungsvorschlag

a) Löse mit Äquivalenzumformungen

Eingabe	Ausgabe	
$3\cdot(1-2\cdot x)<15$	$-3\cdot(2\cdot x-1)<15$	
$\frac{-3\cdot(2\cdot x-1)<15}{-3}$	$2\cdot x-1>-5$	Was passiert bei der Division durch −3?
$(2\cdot x-1>-5)+1$	$2\cdot x>-4$	
$\frac{2\cdot x>-4}{2}$	$x>-2$	Formuliere Grundgesetze für Ungleichungen

Eingabe	Ausgabe	
$\frac{x-1}{x+2}>2$	$\frac{x-1}{x+2}>2$	
$\left(\frac{x-1}{x+2}>2\right)\cdot(x+2)$	$\left(\frac{x-1}{x+2}>2\right)\cdot(x+2)$	
$\left(\frac{x-1}{x+2}>2\right)\cdot(x+2)\vert x>-2$	$x-1>2\cdot(x+2)$ and $x>-2$	Warum reagiert das CAS bei der Multiplikation mit (x+2) nicht?
expand$(x-1>2\cdot(x+2))$	$x-1>2\cdot x+4$	
$(x-1>2\cdot x+4)-x-4$	$-5>x$	
$\left(\frac{x-1}{x+2}>2\right)\cdot(x+2)\vert x<-2$	$x-1<2\cdot(x+2)$ and $x<-2$	
expand$(x-1<2\cdot(x+2)$ and $x<-2)$	$x+4>-1$ and $x<-2$	
$(x+4>-1)-4$	$x>-5$	
$-5<x<-2$	$-5<x<-2$	
solve$\left(\frac{x-1}{x+2}>2,x\right)$	$-5<x<-2$	

$\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{5}>4.8\right)\cdot 5\cdot x$	$x\cdot\left(\frac{-(x-10)}{x}>24.\right)$	Fallunterscheidungen sind nötig:
$\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{5}>4.8\right)\cdot 5\cdot x \mid x>0$	$-(x-10)>24.\cdot x \text{ and } x>0$	Lösen der Ungleichung für x>0
$\text{expand}(-(x-10)>24.\cdot x)$	$10-x>24.\cdot x$	
$(10-x>24.\cdot x)+x$	$10>25.\cdot x$	
$\frac{10>25.\cdot x}{25}$	$\frac{2}{5}>x$	
$\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{5}>4.8\right)\cdot 5\cdot x \mid x<0$	$-(x-10)<24.\cdot x \text{ and } x<0$	Lösen der Ungleichung für x<0
$\text{expand}(-(x-10)<24.\cdot x)$	$10-x<24.\cdot x$	
$\frac{2}{5}<x \text{ and } x<0$	false	

$2\leq\lvert x-3\rvert<4$	$2\leq\lvert x-3\rvert<4$	Wegen der Defintion des Betrages sind Fallunterscheidungen nötig.
$2\leq\lvert x-3\rvert<4 \mid x>3$	$5\leq x<7$	
$2\leq\lvert x-3\rvert<4 \mid x<3$	$x-3\leq -2 \text{ and } -1<x<3$	
$(x-3\leq -2)+3$	$x\leq 1$	Interpretiere das Ergebnis und gib eine Lösungsmenge an.

$\text{factor}(x^2-x-6<0)$	$(x-3)\cdot(x+2)<0$	Schritt 1: Faktorisieren
$x-3<0 \text{ and } x+2>0$	$-2<x<3$	Schritt 2: Fallunterscheidungen: Wann ist ein Produkt negativ?
$x-3>0 \text{ and } x+2<0$	false	

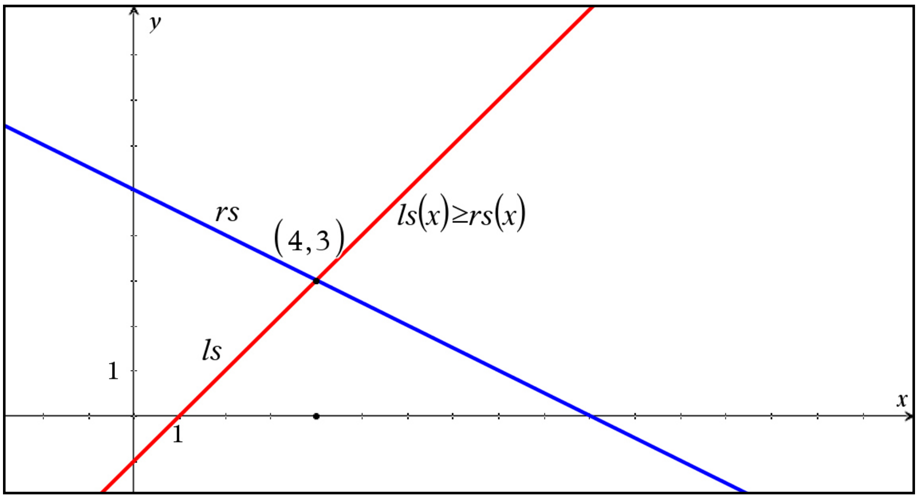
b) Löse grafisch:

$x-1\ge\frac{-1}{2}\cdot x+5$	$x-1\ge 5-\frac{x}{2}$
$ls(x):=x-1$	*Done*
$rs(x):=\frac{-1}{2}\cdot x+5$	*Done*

Weg 1:

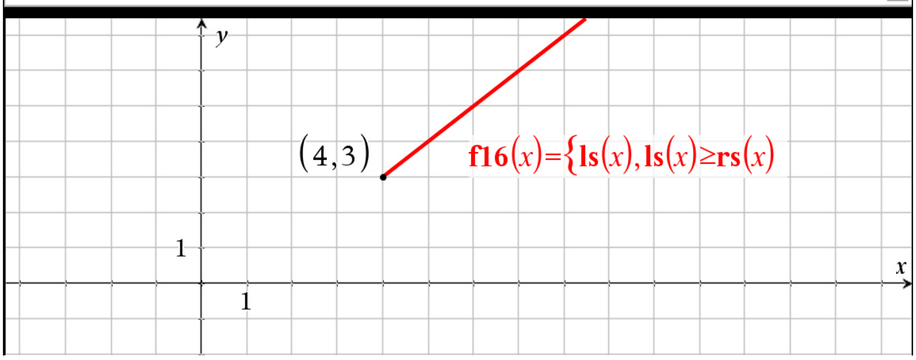
Man definiert zwei Funktionen: "ls" und "rs" und zeichnet ihre Graphen.

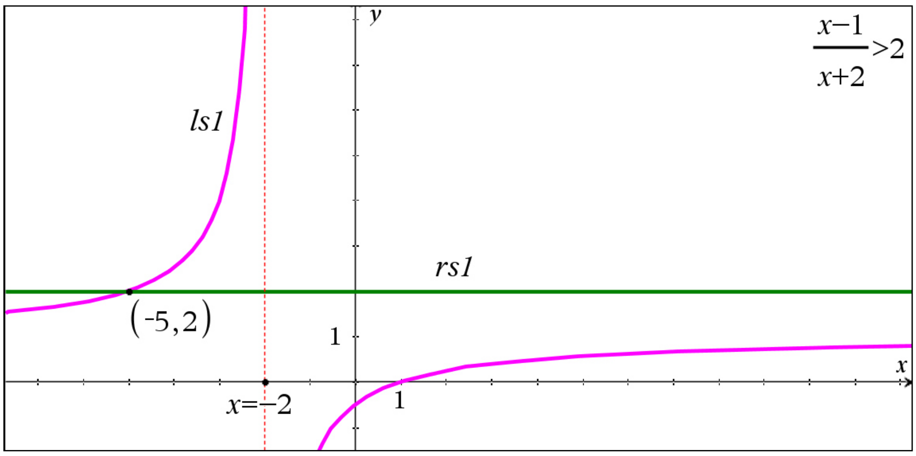
Für welche x gilt ls(x)≥rs(x) ?



Weg 2:

Man definiert zwei Funktionen: "ls" und "rs" und zeichnet den Graphen von "ls" unter der Bedingung, dass ls≥rs ist.





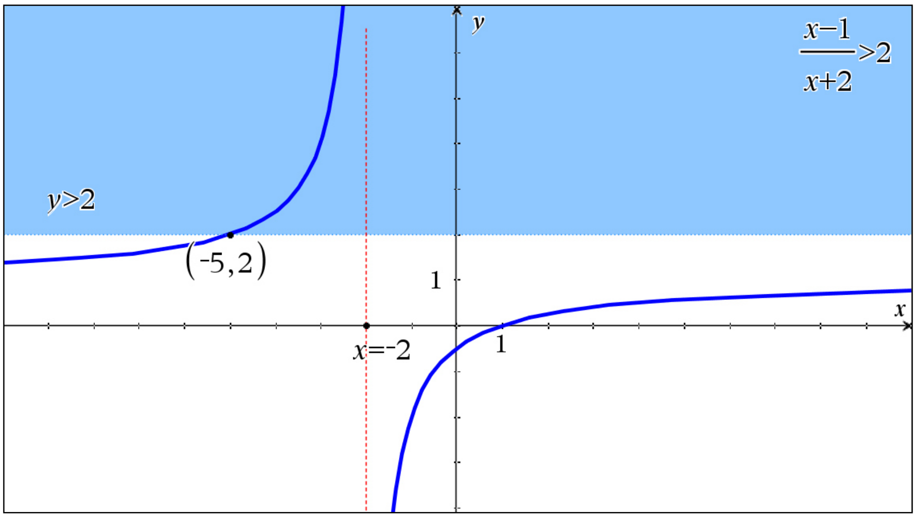
Weg 2:

Man definiert die Funktion "ls1" und zeichnet ihren Graphen.

Man visualisiert die Halbebene für die gilt y>2

Für welche x verläuft der Graph ls1(x) in dieser Halbebene?

Dabei muss die Lage der senkrechten Asymptote (x=−2) berücksichtigt werden.



$2\leq\lvert x-3\rvert<4$	$2\leq\lvert x-3\rvert<4$
$ls3(x):=2$	*Done*
$m3(x):=\lvert x-3\rvert$	*Done*
$rs3(x):=4$	*Done*

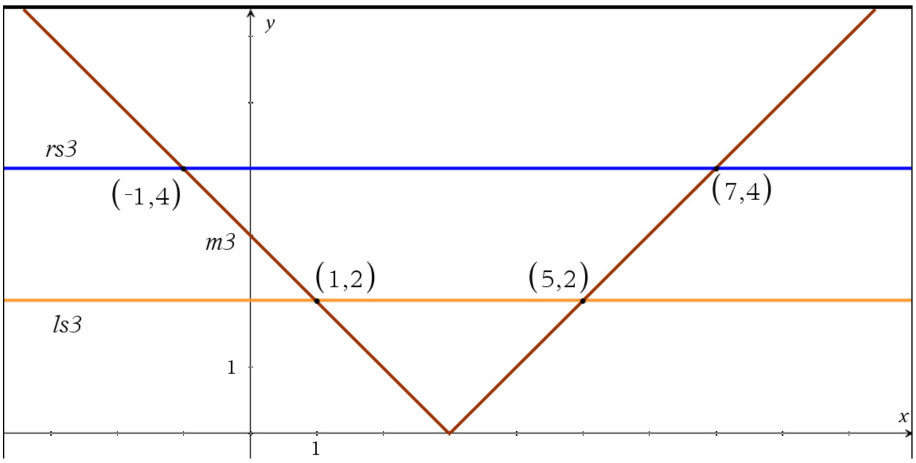
Weg 1:

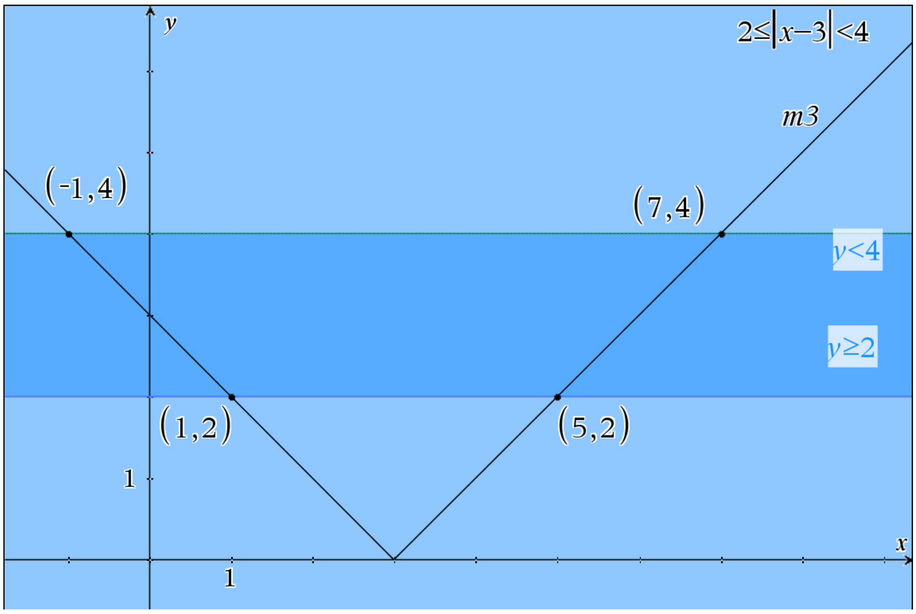
Man definiert drei Funktionen: "ls3" "m3" und "rs3" und zeichnet ihre Graphen.

Für welche x gilt ls3(x)≤m3(x)>rs3(x)?

Mit Hilfe von "Analyze Graph" ⇒ "Intersection" kann man die

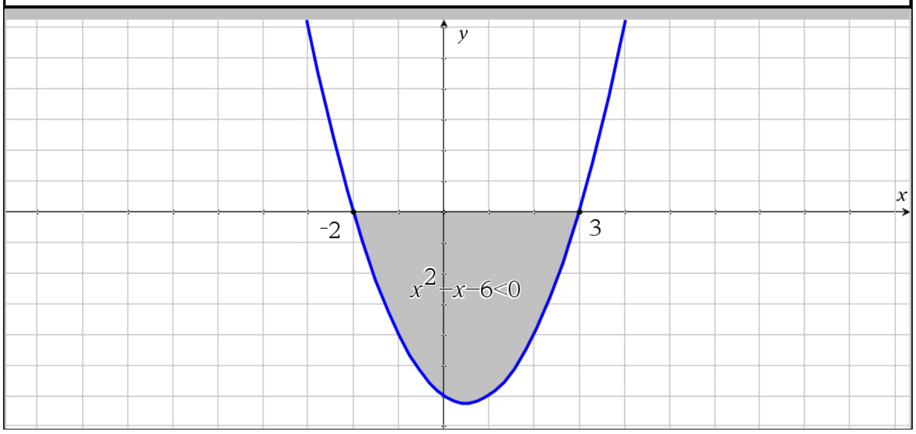
Schnittpunkte ermitteln





$x^2-x-6<0$

Man zeichnet den Graphen f der Funktion der linken Seite und sucht x für die gilt f(x)<0



d) Löse die Ungleichungen von Teil (a) mit dem „*solve*“-Befehl

c) Löse die folgenden Ungleichungen mit dem "solve"-Befehl (G=ℝ)

$3\cdot(1-2\cdot x)<15$

$\frac{x-1}{x+2}>2$

$\frac{2}{x}-\frac{1}{5}>4.8$

$2\le|x-3|<4$

$x^2-x-6<0$

$\text{solve}(3\cdot(1-2\cdot x)<15,x)$	$x>-2$
$\text{solve}\left(\frac{x-1}{x+2}>2,x\right)$	$-5<x<-2$
$\text{solve}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{5}>4.8,x\right)$	$0.<x<0.4$
$\text{solve}(2\le\|x-3\|<4,x)$	$-1<x\le 1$ or $5\le x<7$
$\text{solve}(x^2-x-6<0,x)$	$-2<x<3$

