

**Thema: Gaußsche Glockenkurve als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**

Gertrud Aumayr, Martha Löffler und Christian Zöpfl

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Einführung der Normalverteilung, Gaußsche Glockenkurve, Bestimmung der Wahrscheinlichkeit mittels der Dichtefunktion

**Unterrichtsmaterial:****Aufgabe/Arbeitsauftrag:.**

a) Zeichne die Funktion  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2}$  und erstelle für m und s je einen

Schieberegler ( $0 \leq m \leq 10$  mit Schrittweite 1,  $0 \leq s \leq 8$  mit Schrittweite 0,1).

Welche Auswirkung hat ein Verändern der Parameter m und s auf den Graphen der Funktion?

b) Mit der Funktion f kann die Wahrscheinlichkeit einer stetigen Zufallsvariablen berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable in einem Bereich von a bis b liegt, entspricht dem Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b.

Der Parameter m gibt den Erwartungswert der Zufallsvariablen an und der Parameter s die Standardabweichung.

Angenommen eine Abfüllanlage für Mineralwasserflaschen ist auf eine Füllmenge von  $m = 1505\text{ml}$  eingestellt und arbeitet mit einer Standardabweichung von  $s = 3\text{ml}$ . Zeichne die zugehörige Dichtefunktion und füge für eine Füllmenge zwischen den Grenzen a und b Schieberegler ein. Mittels Integralrechnung lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge im Intervall [a; b] liegt berechnen.

Ergänze die folgende Tabelle:

Intervall	$[m-s; m+s]$	$[m-2s; m+2s]$	$[m-3s; m+3s]$	$[-\infty; m]$	$[-\infty; \infty]$
Wahrscheinlichkeit					

c) Durch Verschieben der Grenzen a und b ändert sich die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Intervalls. Bestimme für eine untere Grenze von  $-\infty$  den Wert der oberen Grenze b, um eine Gesamtwahrscheinlichkeit wie in der Tabelle angegeben zu erhalten.

Wahrscheinlichkeit	30 %	50 %	80%	95%	100%
Obere Grenze b					

d) Da die Eingabe der Dichtefunktion der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

mühevoll ist, ist diese Funktion durch `normPdf`( $x, \mu, \sigma$ ) direkt aufrufbar.

Überprüfe dies, indem du in Aufgabenstellungen a) und b) die Funktion der Gauß<sup>schen</sup> Glockenkurve durch `normPdf` ersetzt.

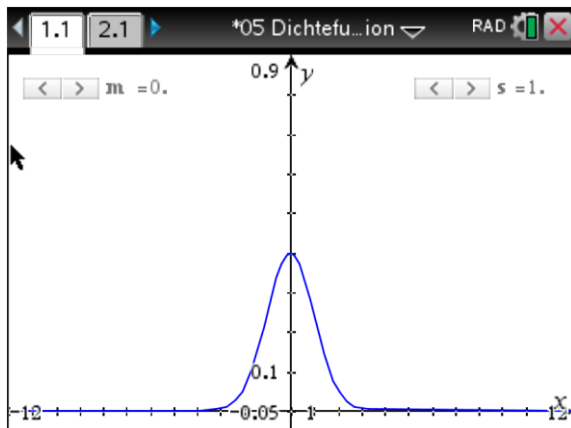
## Didaktischer Kommentar:

Durch das Variieren der Parameter  $m$ ,  $s$  sollen die Schülerinnen und Schüler deren Bedeutung für den Graphen der Gauß<sup>schen</sup> Glockenkurve und die Normalverteilung erkennen. Dabei entspricht der Parameter  $m$  dem Erwartungswert und  $s$  der Standardabweichung. Im zweiten Aufgabenteil werden  $m$  und  $s$  vorgegeben und der Zusammenhang zwischen Integral der Dichtefunktion und Wahrscheinlichkeit soll ergründet werden. Dabei kann auch die Bedeutung des näherungsweisen Lösungsverfahrens diskutiert werden. Dies spiegelt aber auch die Gegebenheiten bei der Verwendung von Standardnormalverteilungstabellen wieder.

## Vorschlag zur Umsetzung:

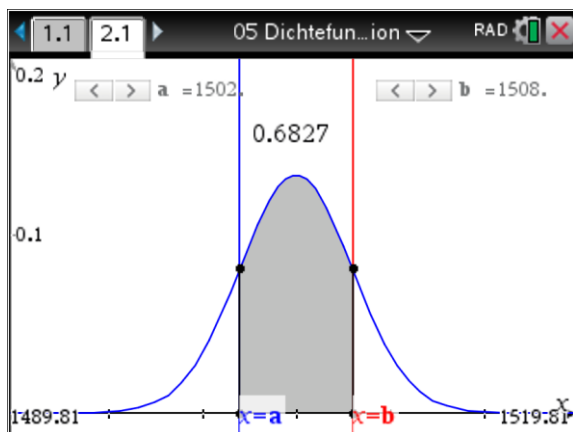
### ad a)

Die Funktion wird in einem Grafikfenster gezeichnet, wobei die Schieberegler für  $m$  und  $s$  automatisch erstellt werden. Der Parameter  $m$  verschiebt die Hochpunktstelle und  $s$  die Wendepunkte. Der Parameter  $m$  gibt den Erwartungswert der Zufallsvariablen vor und der Parameter  $s$  die Standardabweichung.



### ad b)

Intervall	$[m-s; m+s]$	$[m-2s; m+2s]$	$[m-3s; m+3s]$	$[-\infty; m]$	$[-\infty; \infty]$
Wahrscheinlichkeit	68,27 %	95,45 %	99,73 %	50 %	100 %

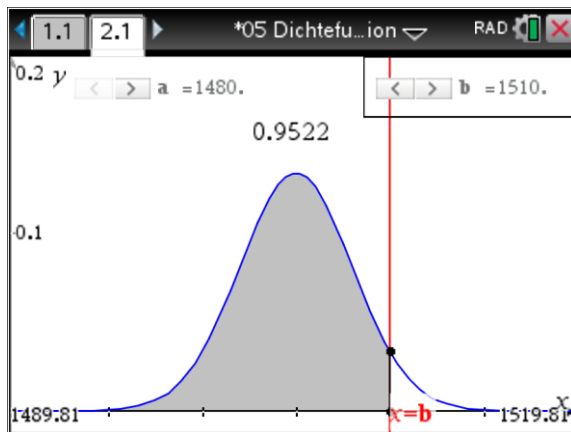


Aufgrund der Einschränkungen bei Schieberegleren können die Werte „ $-\infty$ “ und „ $\infty$ “ nicht eingestellt werden. Für die Berechnung reicht aber die Verwendung ausreichend kleiner bzw. großer Zahlenwerte.

**ad c)**

Wahrscheinlichkeit	30 %	50 %	80%	95%	100%
Obere Grenze b	1503,5 ml	1505 ml	1507,5 ml	1510 ml	$+\infty$

Durch die verwendete Schrittweite des Schiebereglers von 0,5 lassen sich die geforderten Wahrscheinlichkeiten nur näherungsweise einstellen. Die obere Grenze für 100 Prozent liegt theoretisch bei  $+\infty$ , in der graphischen Näherungslösung wird die geforderte Wahrscheinlichkeit bereits bei 1517 ml angezeigt. Lösungswerte größer als 1517 ml sind daher zulässig.



**ad d)**

