
Thema: Differentialrechnung 1: Grundlagen; Änderungsmaße

Helmut Heugl ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte:
Differentialrechnung, Änderungsmaße, mittlere und momentane Änderungsrate, Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitung, Grenzwert, mittlere Geschwindigkeit, Momentangeschwindigkeit, Sekanten- und Tangentensteigung.

Didaktischer Kommentar:

Gerade beim Begriffsbildungsprozess kann Technologie als Visualisierungswerkzeug und als Tabellenwerkzeug sehr nützlich sein. Durch die Übernahme komplexerer Rechenoperationen können sich die Lernenden auf den Begriffsbildungsprozess konzentrieren.
Insbesondere beim Einstieg in die Differentialrechnung eignen sich fertige Applets sehr gut als Experimentierwerkzeug. Die Veränderung von Parametern mit Hilfe von Schiebereglern, das Bewegen von Punkten und anderen geometrischen Objekten im Graphikfenster führt zu Vermutungen und zu einem intuitiven Begriffsverständnis, auf dem dann eine spätere exaktifizierende Phase aufbauen kann.

Einen Überblick über die **Kompetenzanforderungen im neuen Lehrplan** (Stand 2017) und im **Grundkompetenzkatalog der Reifeprüfung** finden Sie im **Anhang**.

1. Grundlagen

Definition:
Es sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $[x_0, x_1] \subseteq A$.

- Die Zahl $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ heißt **Differenzenquotient** oder **mittlere Änderungsrate** von f in $[x_0, x_1]$. Andere Schreibweisen für den Differenzenquotienten:
  - $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ mit $\Delta x = x_1 - x_0$
  - $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ für $[x_0, x_0 + h] \subseteq A$
- Der Grenzwert $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ heißt **Differentialquotient** von f an der Stelle x oder **(momentane) Änderungsrate** von f an der Stelle x. Andere Schreibweisen für den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Didaktischer Kommentar

Vor allem im Hinblick auf die Aufgabenstellung bei der Reifeprüfung sollen die Schülerinnen und Schüler mit verschiedenen Schreibweisen für den Differentialquotienten vertraut werden.

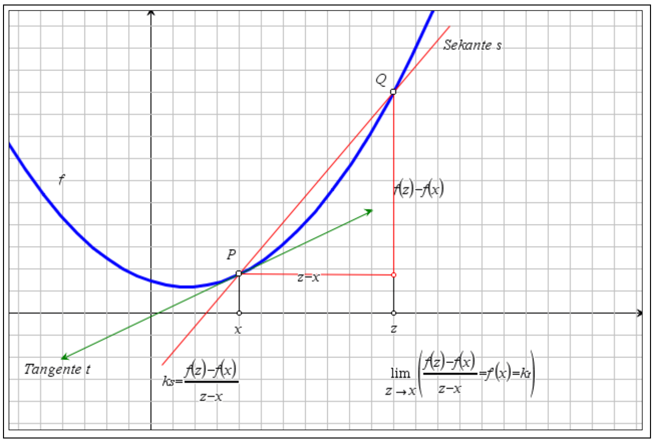
Zwei mögliche Zugänge

Geometrischer Zugang: Sekanten- und Tangentensteigung

Der **Differenzenquotient** (die mittlere Änderungsrate einer Funktion f in [x,z] ist gleich der **Steigung der Sekante** k_s von f in [x,z].

Nähert sich der Punkt Q unbegrenzt dem Punkt P, so nähert sich die zugehörige Sekante einer „Grenzgeraden" t.

Jene Gerade, die als Steigung k_t den **Differentialquotienten** an der Stelle x hat, bezeichnet man als **Tangente** an den Graphen von f an der Stelle x.

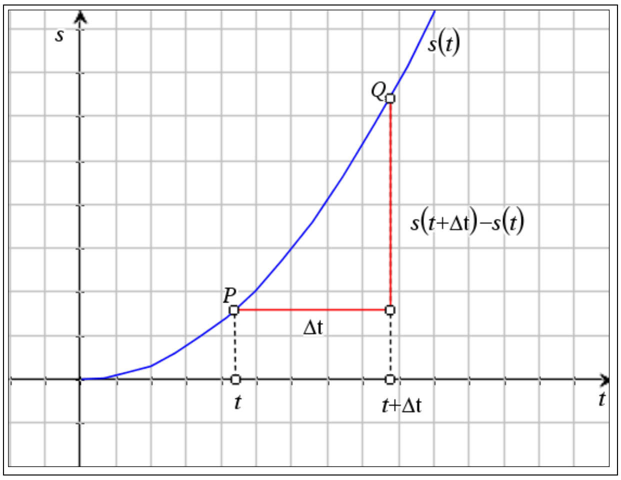


Physikalischer Zugang: Mittlere und Momentangeschwindigkeit

Bewegt sich ein Körper gemäß der Zeit-Orts-Funktion $s: t \to s(t)$ dann ist die **mittlere Geschwindigkeit** $\overline{v}$ im Intervall $[t, t+\Delta t]$: $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

Wird das Zeitintervall Δt immer kleiner, das heißt strebt Δt gegen 0, so nennt man den Grenzwert **Momentangeschwindigkeit** zum Zeitpunkt t:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$



Aufgabenbeispiele

Aufgabe 1: Experimentieren mit Sekantensteigung/Tangentensteigung
Quelle: Gertrud Aumayr

Durch zwei Punkte A und B auf dem Graphen der Funktion f wird eine Sekante gelegt. Welche Bedeutung hat das graue Dreieck? Nutze den Schieberegler zur experimentellen Untersuchung der folgenden Fragen:

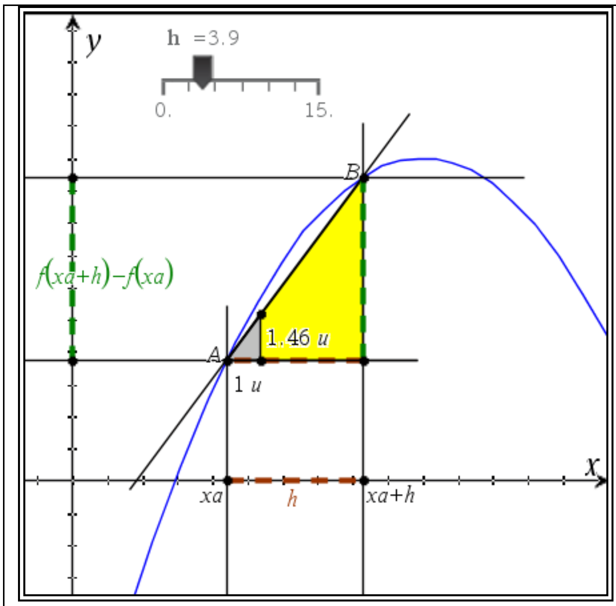
- Wie verändert sich die Steigung der Sekante, wenn der Punkt B gegen den Punkt A wandert?
- Was passiert, wenn der Punkt B den Punkt A erreicht?
- Was ist der Unterschied zwischen den beiden Applets?

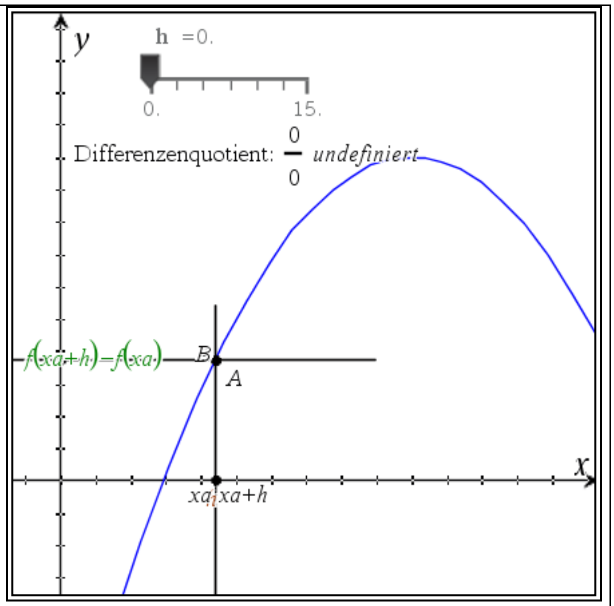
Didaktischer Kommentar:

Es werden zwei scheinbar gleiche, aber didaktisch sehr verschiedene Applets eingesetzt:

- Das erste Applet wird verwendet, bevor man den Grenzwertbegriff entwickelt hat.
- Beim zweiten Applet ist das Ergebnis der "beliebigen" Näherung der Grenzwert des Differenzenquotienten - der Differentialquotient

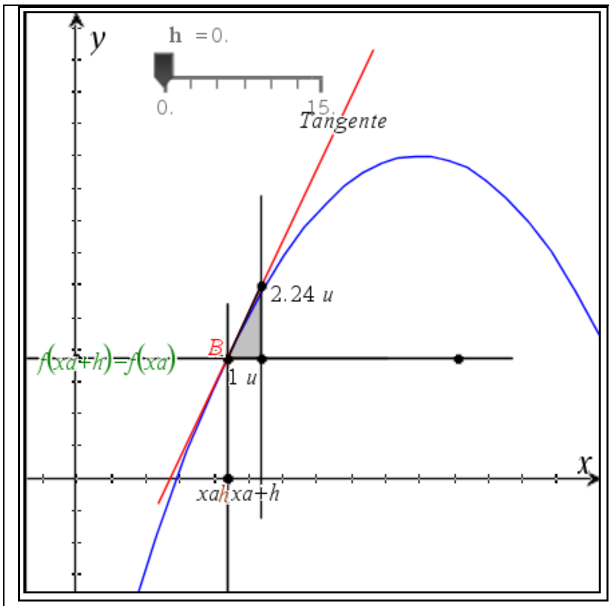
Applet 1:





Wenn der Punkt B den Punkt A erreicht ($h \to 0$), ist der Differenzenquotient nicht definiert ($\frac{0}{0}$)

Applet 2:



Ziehe im Diagramm links am Schieberegler.

Funktion:

$f(x):=-0.2\cdot(x-10)^2+10$ ▸ *Done*

Differenzenquotient:

h ▸ $0.$ xa ▸ 4.3985

$\frac{f(xa+h)-f(xa)}{h}$ ▸ undef

Differentialquotient:

$\lim_{hh \to 0^+}\left(\frac{f(xa+hh)-f(xa)}{hh}\right)$ ▸ 2.2406

Im Notesfenster kann man die Entwicklung der Folge der Differenzenquotienten beobachten.

Beim Applet 2 wird auch der Differentialquotient berechnet.

Wenn der Punkt B den Punkt A erreicht ($h \to 0$), erscheint eine neue Gerade, die den Grenzwert des Differenzenquotienten als Steigung hat – die Tangente.

Aufgabe 2: Folge von Sekantensteigungen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=0.2\cdot(x-3)^2+2$. Wähle $x_0=5$.

a) Ermittle die Steigung der Sekante durch die Punkte $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ und $Q\left(x_0+\Delta x, f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$. Wähle als Startwert für $\Delta x=3$.

b) Untersuche eine Folge von Differenzenquotienten, bei der Δx immer kleiner wird, zum Beispiel $\Delta x=(3;\ 0.3;\ 0.003;\ ....)$. Lässt sich ein Grenzwert vermuten?

Kommentar: Im List&Spreadsheet Werkzeug ist das Symbol Δ nicht zugelassen. Daher wird der griechische Buchstabe δ verwendet.

	A x0	B δx	C x1	D y0	E y1	F δy	G diffquot
=			=x0+δx	=f(x0)	=f('x1)	='y1−y0	=δy/δx
1	5.	3	8.	2.8	7.	4.2	1.4
2	5.	0.3	5.3	2.8	3.058	0.258	0.86
3	5.	0.03	5.03	2.8	2.82418	0.02418	0.806
4	5.	0.003	5.003	2.8	2.8024	0.002402	0.8006
5	5.	0.0003	5.0003	2.8	2.80024	0.00024	0.80006
6	5.	0.00003	5.00003	2.8	2.80002	0.000024	0.800006
7	5.	0.000003	5.	2.8	2.8	0.000002	0.800001
8	5.	3.E-7	5.	2.8	2.8	2.4E-7	0.8
9	5.	3.E-8	5.	2.8	2.8	2.4E-8	0.8
10	5.	3.E-9	5.	2.8	2.8	2.4E-9	0.8

Ergebnis:
Für beliebig kleine Δx strebt der Differenzenquotient gegen den Wert 0.8.

Vermutung:
Der Grenzwert des Differenzenquotienten (der Differentialquotient) ist 0.8.

Didaktischer Kommentar:

Natürlich können solche Aufgaben auch mit dem traditionellen Taschenrechner gelöst werden. Bei Nutzung von Technologie kann aber zusätzlich die Werkzeugkompetenz für das Arbeiten mit Tabellenkalkulation (List&Spreadsheets) ein ergänzendes Ziel sein (rekursives Definieren, usw.)

Aufgabe 3: „Mittlere Geschwindigkeit/Momentangeschwindigkeit“

Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v_0 = 30 m/s lotrecht nach oben geworfen. Die Höhe h wird durch die Funktionsgleichung $h(t)=30\cdot t-5\cdot t^2$ beschrieben. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach t_0 = 3 Sekunden?

Versuche einen Näherungswert für die Momentangeschwindigkeit in einer Tabelle für $\delta t \to 0$ zu finden. Nähere dich dem Wert t_0 zuerst von rechts, dann von links und dann von beiden Seiten.

Versuche eine geometrische Deutung des Ergebnisses im Graphikfenster. Zeichne den Graphen von h, die Sekanten für die linksseitige, rechtsseitige und beidseitige Näherung, sowie die Tangente an der Stelle t_0.

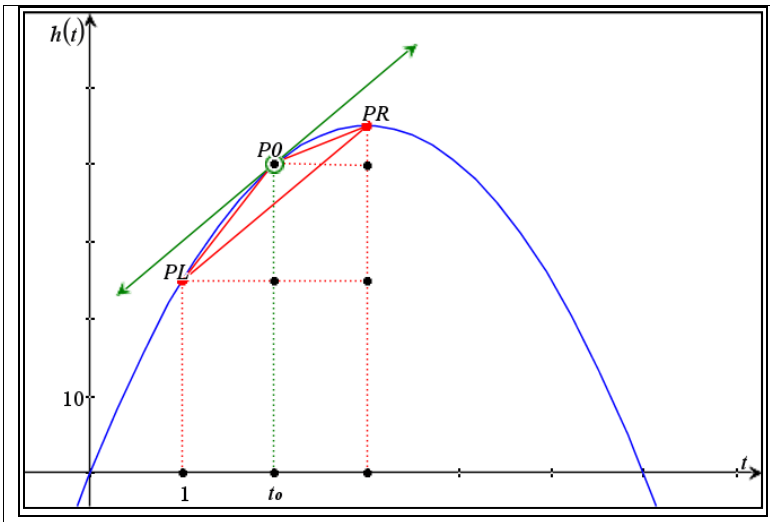
Kommentar: Da der TI Nspire das Zeichen „Δ“ als Variablenname nicht akzeptiert, bezeichnen wir das Zeitintervall anstatt Δt mit δt.

$h(t):=30\cdot t-5\cdot t^2$	Done
$t0:=2$	2
$vr(t):=\frac{h(t+\delta t)-h(t)}{\delta t}$	Done
$vl(t):=\frac{h(t)-h(t-\delta t)}{\delta t}$	Done
$vbs(t):=\frac{h(t+\delta t)-h(t-\delta t)}{2\cdot \delta t}$	Done

	A δt	B vrechts	C vlinks	D vbeids...
=		=vr(t0)	=vl(t0)	=vbs(t0)
1	1	5	15	10
2	0.1	9.5	10.5	10.
3	0.01	9.95	10.05	10.
4	0.001	9.995	10.005	10.
5	0.0001	9.9995	10.0005	10.
6	0.00001	9.99995	10.0001	10.
7	0.000001	10.	10.	10.
8	1.E-7	10.	10.	10.

Ergebnis: Bei Näherung von links und von rechts strebt der Wert der mittleren Geschwindigkeit gegen v = 10m/s. Der Wert der mittleren Geschwindigkeit ist bei beidseitiger Näherung stets 10m/s.

Vermutung: Die Momentangeschwindigkeit (der Grenzwert des Differenzenquotienten) hat nach 2s den Wert v = 10m/s.



Geometrische Deutung:

Die Steigung der Sekante von PL nach P0 entspricht dem Wert der mittleren Geschwindigkeit vl, die Steigung der Sekante von P0 nach PR entspricht vr, die Steigung der Sekante von PL nach PR entspricht vbs.

Die Steigung der Tangente entspricht der Momentangeschwindigkeit v.

Da die Sekante von PL nach PR parallel zur Tangente ist, ist der Wert von vbs gleich dem Wert der Momentangeschwindigkeit v.

Anhang

Ein Blick in den Lehrplan: Im Lehrplanentwurf für die modulare Oberstufe findet man ähnliche Kompetenzanforderungen wie im derzeit gültigen Lehrplan:

Lehrplanentwurf Mathematik Oberstufe AHS

Kompetenzorientierung und Semestrierung. Stand Februar 2016
11. Schulstufe, 5. Semester

Grundlagen der Differentialrechnung	*Den Differenzenquotienten (die mittlere Änderungsrate) und den Differentialquotienten (die lokale bzw. momentane Änderungsrate) definieren können.*	*Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient (lokale bzw. momentane Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und kontextbezogen (verbal sowie in formaler Schreibweise) anwenden können.*
	Den Differenzen- und Differentialquotienten als Sekanten- bzw. Tangentensteigung sowie in außermathematischen Bereichen deuten können.	*Den Begriff der Tangente als Grenzlage von Sekanten kennen und erläutern können.* *Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können.*

Grundkompetenzliste der Reifeprüfung

Hier findet man sogar eine ausführlichere Interpretation der Kompetenzanforderungen des Lehrplans:

Inhaltsbereich *Analysis* (AN)
AN 1 Änderungsmaße

AN 1.1	Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können.
AN 1.2	Den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane" Änderungsrate)* auf der Grundlage eines **intuitiven Grenzwertbegriffes** kennen und damit (verbal und auch in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können.
AN 1.3	Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können.

BHS

Kompetenzkatalog Teil A - Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern
Analysis

4.1	**Grenzwert und Stetigkeit** von Funktionen auf der Basis eines intuitiven Begriffsverständnisses argumentieren
4.2	Differenzen- und Differentialquotient als **Änderungsraten** interpretieren, damit anwendungsbezogen modellieren, rechnen und damit argumentieren
4.7	Das bestimmte Integral auf der Grundlage eines **intuitiven Grenzwertbegriffes** als Grenzwert einer Summe von Produkten interpretieren und damit argumentieren.