
Thema: Differentialrechnung 2: Ableitungsregeln, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Gertrud Aumayr, Helmut Heugl ☒ TI-Nspire^{TM} CAS

Schlagworte:

Differentialrechnung, Änderungsmaße, mittlere und momentane Änderungsrate, Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitung, Grenzwert, Potenzregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Potenzfunktion, Polynomfunktion, Exponentialfunktion, Trigonometrische Funktion, Logarithmusfunktion, Grenzwert reeller Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit.

Didaktischer Kommentar:

Die Herleitung der Ableitungsregeln findet man in allen Schulbüchern. **Möglichst viele dieser Beweise sollten im Unterricht ohne Verwendung von CAS behandelt werden.** Natürlich ist diese Exaktifizierungsphase ein sehr schwieriges Kapitel. Aber vielleicht kann man durch innere Differenzierung wenigstens für begabtere Schülerinnen und Schüler eine anspruchsvollere Lernphase anbieten.

Auch wenn das Verständnis der Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit nicht zu den Grundkompetenzen zählt, ist dieser Lehrplaninhalt für das grundlegende Verständnis der Denktechnologie der Analysis unverzichtbar. Zumindest in einer experimentellen Phase, in der man die Visualisierungsmöglichkeiten technologischer Werkzeuge nutzt kann dieser doch schwierige Inhalt behandelt werden.

Der Vorteil von CAS zeigt sich in einer experimentellen Phase, in der die Schülerinnen und Schüler durch Experimentieren mit dem Werkzeug zu Vermutungen kommen können (*Freudenthal: „Vor dem Beweisen sollten die Lernenden zuerst vermuten lernen“*).

Die niedrige Dotierung des Faches Mathematik und der Zeitdruck, der durch die neue Reifeprüfung entstanden ist, führen ja oft dazu, dass die exaktifizierende Phase zu kurz kommt. Die vorgeschaltete experimentelle Phase ist durch die Nutzung des technologischen Werkzeuges zeitlich machbar und man erreicht damit auch schwächere Schülerinnen und Schüler.

Einen Überblick über die **Kompetenzanforderungen im neuen Lehrplan** und im **Erweiterten Grundkompetenzkatalog in der Handreichung zum Lehrplan** finden Sie im **Anhang**.

Aufgabenbeispiele

TEIL 1: Ableitungsregeln

Aufgabe 1: Ableitungsregeln für Potenzfunktionen

Didaktischer Kommentar:

Die Herleitung für Exponenten aus ▯ ist ja durch die Zerlegung mit Hilfe der Hornerschen Regel noch machbar, schwieriger wird es dann für Exponenten aus ▯. Mit Hilfe von CAS kann man aber zu Vermutungen kommen.

Differentialquotient von Potenzfunktionen:

Gegeben sind die Potenzfunktionen f1, f2, f3, f4

$$f1(x) = x^3$$
$$f2(x) = x^7$$
$$f3(x) = \frac{1}{x}$$
$$f4(x) = \sqrt{x}$$

Ermittle den jeweiligen Differenzenquotienten: $\operatorname{diffqf}(x,h) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

vereinfache den Term mit Hilfe von CAS um zu einer Vermutung über den Grenzwert für h□0 zu kommen. Berechne danach den Grenzwert mit dem „limes“-Befehl.

$f1(x):=x^3$	*Fertig*
$diffqf1(x,h):=\dfrac{f1(x+h)-f1(x)}{h}$	*Fertig*
$diffqf1(x,h)$	$3\cdot x^2+3\cdot h\cdot x+h^2$
$\lim\limits_{h\to 0}(diffqf1(x,h))$	$3\cdot x^2$

Die Vereinfachung des Terms erfolgt durch das Werkzeug.

Vermutung Für h→0 ist das Ergebnis $3\cdot x^2$

Das Werkzeug bestätigt die Vermutung.

$f2(x):=x^7$	*Fertig*
$diffqf2(x,h):=\dfrac{f2(x+h)-f2(x)}{h}$	*Fertig*
$diffqf2(x,h)$	$7\cdot x^6+21\cdot h\cdot x^5+35\cdot h^2\cdot x^4+35\cdot h^3\cdot x^3+21\cdot h^4\cdot x^2+7\cdot h^5\cdot x+h^6$
$\lim\limits_{h\to 0}(diffqf2(x,h))$	$7\cdot x^6$

Für n = 7 ist der Weg derselbe.

$f3(x):=\dfrac{1}{x}$	*Fertig*
$diffqf3(x,h):=\dfrac{f3(x+h)-f3(x)}{h}$	*Fertig*
$diffqf3(x,h)$	$\dfrac{1}{h\cdot(x+h)}-\dfrac{1}{h\cdot x}$
$\operatorname{factor}\left(\dfrac{1}{h\cdot(x+h)}-\dfrac{1}{h\cdot x}\right)$	$\dfrac{-1}{x\cdot(x+h)}$
$\lim\limits_{h\to 0}(diffqf3(x,h))$	$\dfrac{-1}{x^2}$

Für n = -1 lässt der durch CAS vereinfachte Term keine Vermutung zu. Man braucht algebraische Kompetenzen, um durch Faktorisieren zu einem Ergebnis zu kommen.
Die Vermutung lautet:
$(-1)\cdot x^{-2}$

$f4(x):=\sqrt{x}$	*Fertig*
$diffqf4(x,h):=\dfrac{f4(x+h)-f4(x)}{h}$	*Fertig*
$diffqf4(x,h)$	$\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
$\text{expand}\left(\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)$	$\dfrac{\sqrt{x+h}}{h}-\dfrac{\sqrt{x}}{h}$
⚠ $\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{h\to 0}\left(diffqf4(x,h)\right)$	$\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

Wieder liefert das Werkzeug keinen brauchbaren Ausdruck. Hier ist schon höhere algebraische Kompetenz erforderlich, unterstützt durch systematisches Probieren.
Die geeignete Erweiterung des Bruches führt zum „Rationalmachen" des Zählers und damit zu einem brauchbaren Term.
Dann lautet die Vermutung: $\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

Durch das Experimentieren mit solchen konkreten Zahlenbeispielen kann man zur Vermutung kommen, dass die Ableitungsregel für Potenzen nicht nur für natürliche Exponenten sondern für Exponenten aus □ gilt.

Didaktischer Kommentar:

Der mathematisch heikle Schritt zum Grenzwert hat schon zur Zeit von Leibnitz zu Diskussionen geführt, als Lichtenberg Leibnitz vorwarf, „*dass geringe Abweichungen von der Wahrheit mit der Wahrheit gleichgesetzt werden.*"

Das Kürzen des Bruches durch h setzt ja h ungleich 0 voraus. Danach durchläuft h eine Nullfolge, das heißt eine Folge mit Grenzwert 0.

Didaktischer Kommentar:

Die wichtigste Funktion von Technologie in der experimentellen Phase ist die Visualisierungsfunktion. In den folgenden Aufgaben kommen die Lernenden durch Experimentieren mit dem Graphen der Differenzenquotientenfunktion zu Vermutungen. Ein Schieberegler ermöglicht die Visualisierung der Näherung von h→0. Wichtig ist auch, dass der Graph der Differenzenquotientenfunktion für h = 0 verschwindet.

Aufgabe 2: Ableitung der Sinusfunktion - Vermutung durch Visualisierung

Experimentieren mit dem Graphen der Differenzenquotientenfunktion.

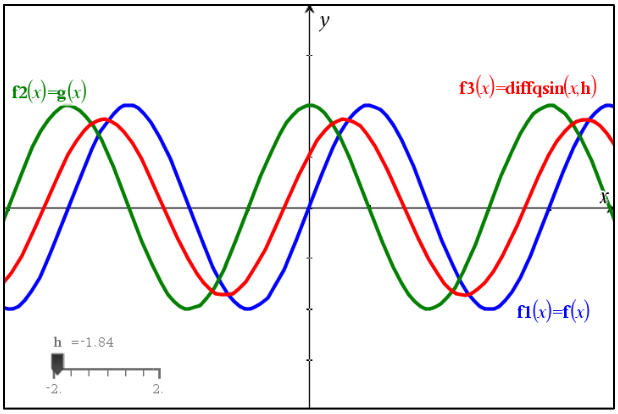
Definiere einen Schieberegler für h im Intervall [-2; 2].

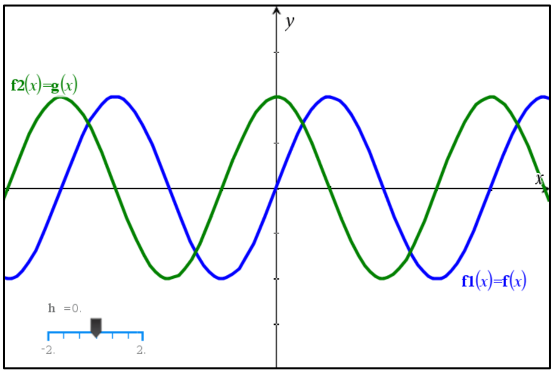
Zeichne die Graphen der Sinusfunktion f, der Ableitungsfunktion g und der Differenzenquotientenfunktion diffqsin:

$f(x) = \sin(x)$, $\quad g(x)=\dfrac{d}{dx}(f(x))$, $\quad \text{diffqsin}(x,h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Was passiert wenn h gegen 0 strebt?

$f(x):=\sin(x)$	*Fertig*
$g(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$g(x)$	$\cos(x)$
$diffqsin(x,h):=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	*Done*





Der Graph von diffqsin wandert für h→0 gegen die Ableitungsfunktion. Für h = 0 verschwindet er, weil diffqsin nicht definiert ist.

Aufgabe 3: Ableitung der Exponentialfunktion - Vermutung durch Visualisierung

Experimentieren mit dem Graphen der Differenzenquotientenfunktion.

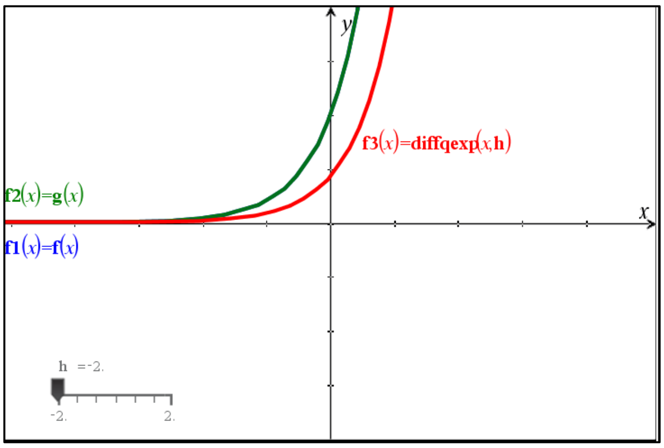
Definiere einen Schieberegler für h im Intervall [-2; 2].

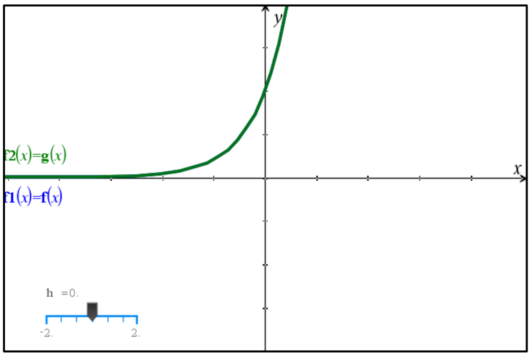
Zeichne die Graphen der Exponentialfunktion f, der Ableitungsfunktion g und der Differenzenquotientenfunktion diffqexp:

$f(x)=e^x$, $\quad g(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$, $\quad \text{diffqexp}(x,h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Was passiert wenn h gegen 0 strebt?

$f(x):=e^x$	*Done*
$g(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Done*
$g(x)$	e^x
$diffqexp(x,h):=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	*Done*





Der Graph von diffqexp wandert für h→0 gegen die Ableitungsfunktion. Für h = 0 verschwindet er, weil diffqexp nicht definiert ist.

Aufgabe 4: Ableitung der Logarithmusfunktion - Vermutung durch Visualisierung

Experimentieren mit dem Graphen der Differenzenquotientenfunktion.

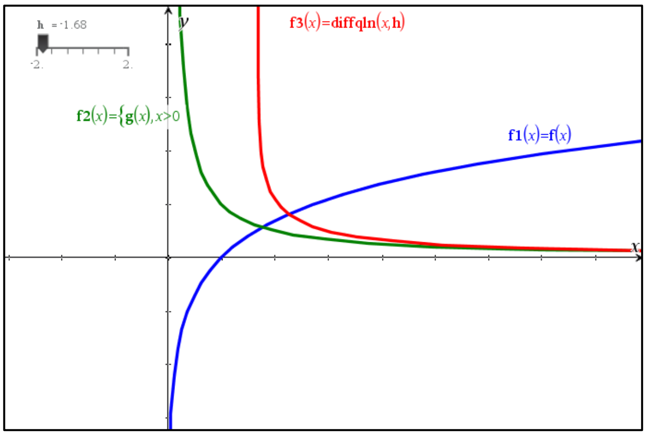
Definiere einen Schieberegler für h im Intervall [-2; 2].

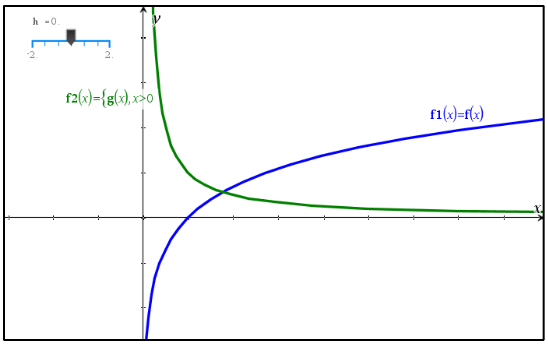
Zeichne die Graphen der Logarithmusfunktion f, der Ableitungsfunktion g und der Differenzenquotientenfunktion diffqln:

$f(x) = \ln(x)$, $\qquad g(x) = \frac{d}{dx}(f(x))$, $\qquad \mathrm{diffqln}(x,h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Was passiert wenn h gegen 0 strebt?

$f(x):=\ln(x)$	*Done*
$g(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Done*
$g(x)$	$\frac{1}{x}$
$diffqln(x,h):=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	*Done*





Der Graph von diffqln wandert für h→0 gegen die Ableitungsfunktion. Für h = 0 verschwindet er, weil diffqln nicht definiert ist.

TEIL 2: Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Grundlagen:

Didaktischer Kommentar:

Basierend auf einem so genannten “intuitiven“ Grenzwertbegriff ist es nicht leicht, „*die Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung*“ (siehe Lehrplan) zu unterrichten. Zumindest sollte doch der Unterschied zwischen dem Grenzwert von Zahlenfolgen und dem Grenzwert reeller Funktionen angesprochen werden. Der Exaktifizierungsschritt zur „ε, δ - Definition“ von Weierstraß ist bei den wenigen Mathematikstunden, die wir in Österreich haben, schwer zu erreichen und ist auch nur sinnvoll, wenn Konvergenzuntersuchungen auf der Grundlage dieser Definition durchgeführt werden.

Man könnte aber mit Hilfe von Technologie, basierend auf dem Grenzwert von Zahlenfolgen mit der folgenden Definition sehr wohl eine Grenzwertidee für reelle Funktionen nutzen, um das Thema „Stetigkeit/Differenzierbarkeit“ zu behandeln.

Definition: Grenzwert reeller Funktionen mit Hilfe von Nullfolgen

Gegeben sei eine reelle Funktion $f: A \to \mathbb{R}$. Die Zahl g heißt **Grenzwert von f an der Stelle $x_0 \in A$** ($\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right)$), wenn für jede beliebige Nullfolge h gilt:

$$\lim_{h \to 0}(f(x_0 + h)) = \lim_{h \to 0}(f(x_0 - h)) = g$$

Definition: Stetigkeit reeller Funktionen mit Hilfe von Nullfolgen

Eine reelle Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** an der Stelle x_0, wenn

- f an der Stelle x_0 definiert ist,
- der Grenzwert von f an der Stelle x_0 existiert und
- dieser Grenzwert mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 übereinstimmt

$$\lim_{h \to 0}\left(f(x_0 + h)\right) = \lim_{h \to 0}\left(f(x_0 - h)\right) = f(x_0)$$

Definition: Differenzierbarkeit reeller Funktionen mit Hilfe von Nullfolgen

Eine reelle Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** an der Stelle x_0, wenn

Der Differentialquotient $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert.

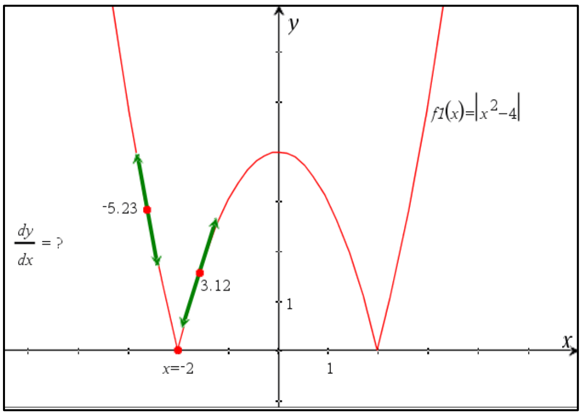
Wenn man die Grenzwertberechnungen auf das CAS-Werkzeug auslagert, kann man sowohl Untersuchungen zur Stetigkeit als auch zur Differenzierbarkeit reeller Funktionen durchführen. Der erste Schritt ist aber eine experimentelle Untersuchung im Graphikfenster.

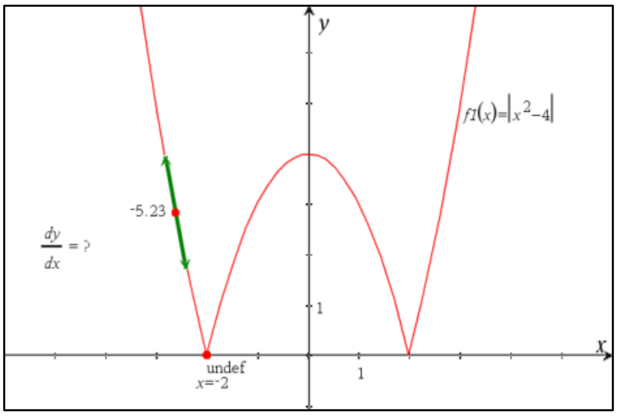
Aufgabe 5: Untersuchung der Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Gegeben ist die reelle Funktion g mit $g(x) = \left|x^2 - 4\right|$.

Untersuche die Funktion g an der Stelle x = -2 bezüglich Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Schritt 1: Experimentieren im Graphikfenster





Mit der „*Geometry*"-Toolbox kann man eine Tangente in einem Punkt des Graphen zeichnen, man sieht auch die Gleichung. Dann kann man den Punkt samt Tangente bewegen.

Zieht man den roten Kurvenpunkt (von rechts) gegen x = -2, so verschwindet die Tangente an der Stelle x = -2 (nicht aber der Punkt) und die Meldung lautet „undefiniert". Bei weiterer Bewegung nach links erscheint die Tangente wieder mit negativer Steigung.

Schritt 2: Grenzwertberechnungen mit Hilfe von CAS

$g(x):=\lvert x^2-4\rvert$	*Done*
$g(-2)$	0
$\lim\limits_{h\to 0^-}(g(-2+h))$	0
$\lim\limits_{h\to 0^+}(g(-2+h))$	0

Das CAS-Werkzeug ermöglicht die Berechnung des links- und rechtsseitigen Grenzwerts.

Die Grenzwerte stimmen mit dem Funktionswert überein.

Folgerung: Die Funktion **g ist stetig an der Stelle x = -2**

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}\right)$	undef
$\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}\right)$	4
$\lim\limits_{h\to 0^-}\left(\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}\right)$	-4

$g1(x):=\frac{d}{dx}(g(x))$	*Done*
$g1(x)$	$2\cdot x\cdot \mathrm{sign}(x^2-4)$
$g1(-2)$	± 4

Ermittelt man den Grenzwert des Differenzenquotienten für beliebige Nullfolgen h, so ist das Ergebnis: „undefiniert an der Stelle -2".

Berechnet man allerdings nur den rechtsseitigen Grenzwert, so erhält man den Wert +4, bei Berechnung des linksseitigen Grenzwerts erhält man den Wert -4.

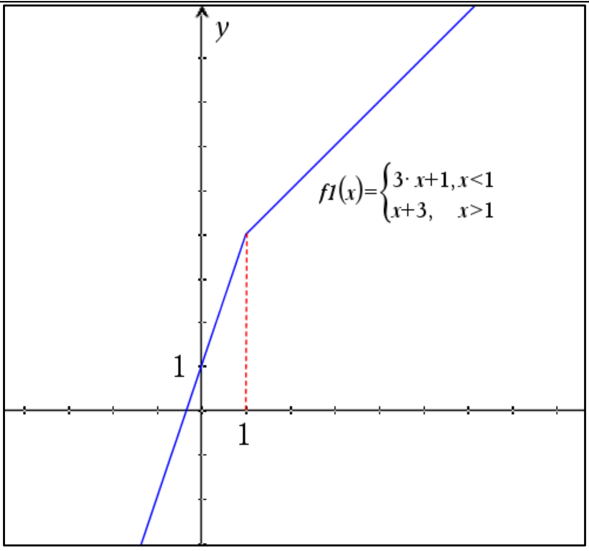
Folgerung: Der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht, daher ist die Funktion **g an der Stelle x =** -2 **nicht differenzierbar.**

Man könnte den Differentialquotienten mit dem CAS-Werkzeug als Black Box auch direkt berechnen und erhält dasselbe Ergebnis.

Aufgabe 6: Weitere Untersuchungen zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Untersuche die folgenden Funktionen bezüglich Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

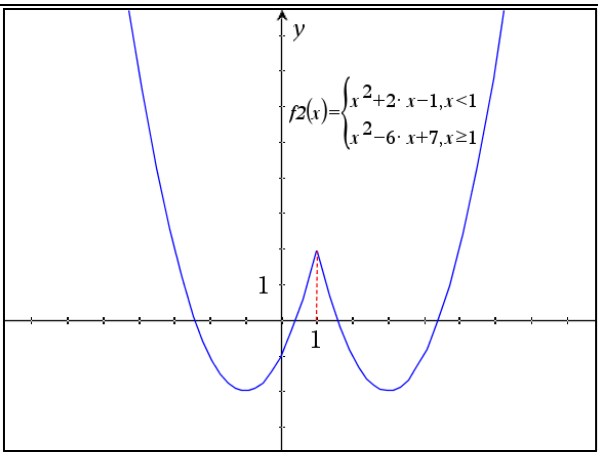
a) $f1(x):=\begin{cases}3\cdot x+1, & x<1\\ x+3, & x>1\end{cases}$ an der Stelle x=1



$f1(x):=\begin{cases}3\cdot x+1, & x<1\\ x+3, & x>1\end{cases}$	*Done*
$f1(1)$	undef
$\lim\limits_{h\to 0^-}(f1(1+h))$	4
$\lim\limits_{h\to 0^+}(f1(1+h))$	4

Stetigkeit: Der links- und rechtsseitige Grenzwert an der Stelle x=1 stimmen zwar überein, aber der Funktionswert existiert nicht , daher ist f1 nicht stetig an der Stelle x=-1

b) $f2(x):=\begin{cases}x^2+2\cdot x-1, & x<1\\ x^2-6\cdot x+7, & x\geq 1\end{cases}$ an der Stelle x=1

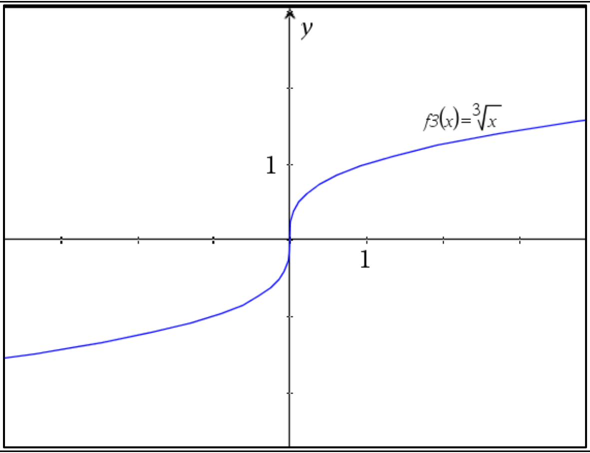


$f2(x):=\begin{cases}x^2+2\cdot x-1, & x<1\\ x^2-6\cdot x+7, & x\geq 1\end{cases}$	*Done*
$f2(1)$	2
$\lim\limits_{h\to 0^-}(f2(1+h))$	2
$\lim\limits_{h\to 0^+}(f2(1+h))$	2
$\lim\limits_{h\to 0^-}\left(\frac{f2(1+h)-f2(1)}{h}\right)$	4
$\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\frac{f2(1+h)-f2(1)}{h}\right)$	-4

Stetigkeit: f2(1) existiert, links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen überein → f2 ist stetig an der Stelle x=1.

Differenzierbarkeit: Links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten sind verschieden → f2 ist an der Stelle x=2 nicht differenzierbar.

c) $f3(x):=\sqrt[3]{x}$ →

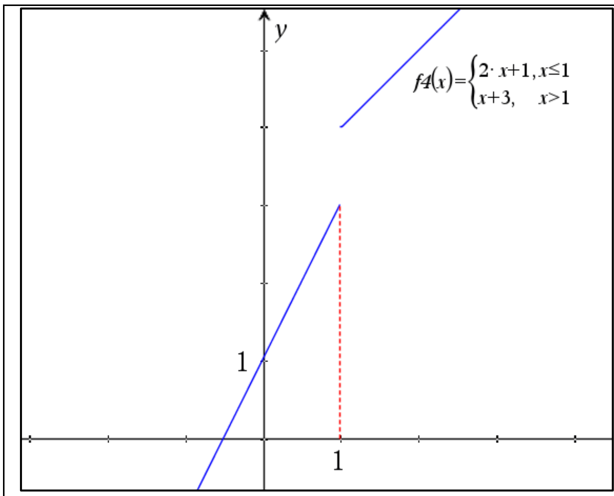


$f3(x):=\sqrt[3]{x}$	*Done*
$f3(0)$	0
$\lim\limits_{h\to 0^-}(f3(0+h))$	0
$\lim\limits_{h\to 0^+}(f3(0+h))$	0
$\lim\limits_{h\to 0^-}\left(\frac{f3(0+h)-f3(0)}{h}\right)$	∞

Stetigkeit: f3(0) existiert, links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen mit dem Funktionswert überein f3 ist stetig an der Stelle x=0.

Differenzierbarkeit: Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht → f3 ist an der Stelle x=0 nicht differenzierbar.

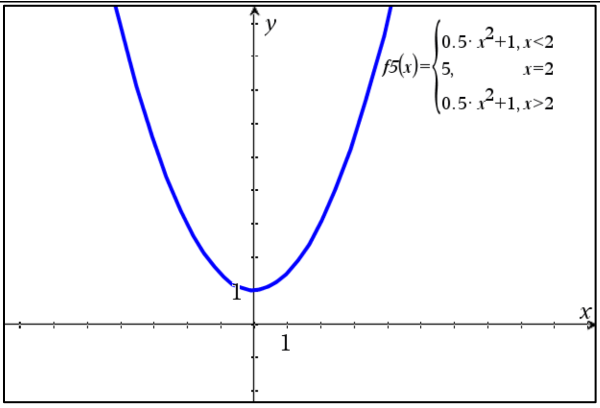
d) $f4(x):=\begin{cases}2\cdot x+1, & x\le 1\\ x+3, & x>1\end{cases}$ an der Stelle x=1

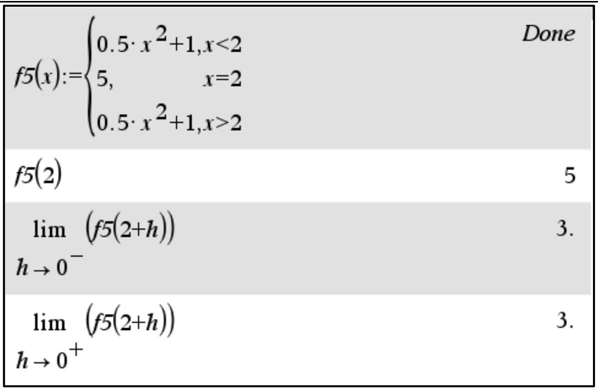


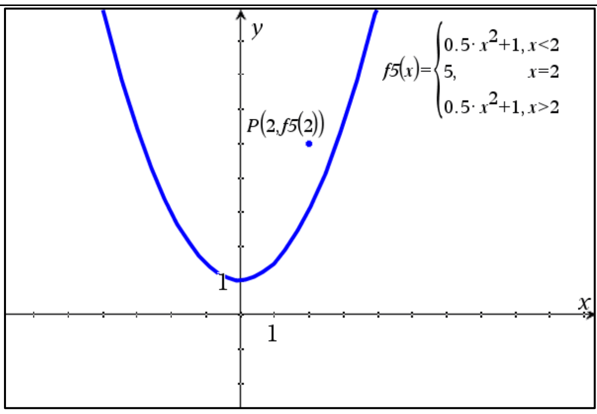
$f4(x):=\begin{cases}2\cdot x+1, & x\le 1\\ x+3, & x>1\end{cases}$	*Done*
$f4(1)$	3
$\lim\limits_{h\to 0^-}(f4(1+h))$	3
$\lim\limits_{h\to 0^+}(f4(1+h))$	4

Stetigkeit: f4(1) existiert, der linksseitige Grenzwert stimmt mit dem Funktionswert überein, aber der rechtsseitige nicht → f4 ist an der Stelle x=1 nicht stetig.

e) $f5(x):=\begin{cases}0.5\cdot x^2+1, & x<2\\ 5, & x=2\\ 0.5\cdot x^2+1, & x>2\end{cases}$ an der Stelle x=2







Zeichnet man den Graphen der Funktion f5, so sieht man an der Stelle x=2 den definierten Funktionswert nicht, der Graph sieht „glatt" aus.

Erst wenn man mit Hilfe der „*Geometry-Toolbox*" den Punkt P durch die Eingabe der Koordinaten P(2,f5(2)) zeichnet, erkennt man die „Unstetigkeitsstelle".

Stetigkeit: f5(2) existiert, links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen überein, aber nicht mit dem Funktionswert → f3 ist an der Stelle x=2 nicht stetig.

Anhang

Lehrplan Mathematik Oberstufe AHS

Kompetenzorientierung und Semestrierung.
11. Schulstufe, 5. Semester

Grundlagen der Differentialrechnung	• Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen kennen und anwenden können • Den Begriff der Ableitungsfunktion kennen; höhere Ableitungen kennen • Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen kennen und anwenden können	Experimentierwerkzeug beim Entwickeln von Differentiationsregeln. CAS als Rechenwerkzeug beim Differenzieren Als Experimentierwerkzeug zur Entdeckung von Ableitungsfunktionen Als Graphikwerkzeug zur Darstellung der Graphen der Ableitungsfunktionen. CAS als Rechenwerkzeug für das Ermitteln komplexerer Ableitungen
Erweiterungen und Exaktifizierungen der Differentialrechnung	• Ableitungsregeln für Exponential- und Logarithmusfunktion sowie Sinus- und Cosinusfunktion kennen • Weitere Ableitungsregeln (insbesondere die Kettenregel) kennen und für Funktionsuntersuchungen in verschiedenen Bereichen verwenden können.	Als Graphikwerkzeug zum experimentellen Entdecken von Ableitungsfunktionen CAS als Rechenwerkzeug bei der Herleitung der Ableitungsregeln
	• Den Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können • *Den Begriff Differenzierbarkeit sowie den Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit kennen*	Als Graphikwerkzeug zur experimentellen Erforschung der Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit. CAS als Rechenwerkzeug zur Berechnung von Grenzwerten.

Erweiterter Grundkompetenzkatalog

Der folgende Grundkompetenzkatalog fasst die Grundkompetenzen, die für die zentrale Reifeprüfung erforderlich sind (AN-R), sowie jene Grundkompetenzen, die im Rahmen des Lehrplans neben den Reifeprüfungskompetenzen wesentlich sind (AN-L), zusammen.

AN 2 Regeln für das Differenzieren

AN-R 2.1	Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln [k·f(x)]' und [f(k·x)]' (vgl. Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten)
[AN-R 2.1]	*Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Ableitungsregeln bei multiplikativen Konstanten:* $g(x)=k\cdot f(x)\Rightarrow g'(x)=k\cdot f'(x),\quad h(x)=f(k\cdot x)\Rightarrow h'(x)=k\cdot f'(k\cdot x)$
AN-L 2.2	Kettenregel kennen und anwenden können

BHS

Kompetenzkatalog Teil A - Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern

Analysis

4.1	**Grenzwert und Stetigkeit** von Funktionen auf der Basis eines intuitiven Begriffsverständnisses argumentieren
4.2	Differenzen- und Differentialquotient als **Änderungsraten** interpretieren, damit anwendungsbezogen modellieren, rechnen und damit argumentieren
4.3	Die **Ableitungsfunktionen** von Potenz-, Polynom- und Exponentialfunktionen und Funktionen, die aus diesen zusammengesetzt sind, berechnen