Thema: Differentialrechnung 3: Anwendungen der Differentialrechnung

Helmut Heugl ☒ TI-Nspire™ CAS

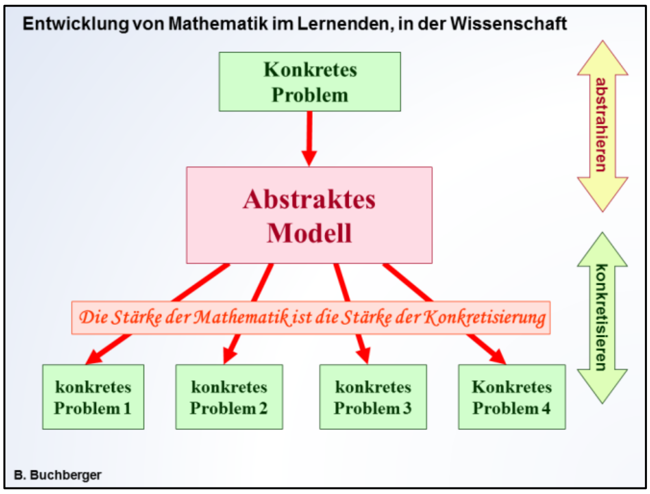
Schlagworte:

Differentialrechnung, mittlere und momentane Äderungsrate, Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitungsfunktion, Polynomfunktion, rationale Funktion, Exponentialfunktion, Trigonometrische Funktion, Logarithmusfunktion, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kostenfunktion.

Didaktischer Kommentar:

„Es gäbe die Mathematik nicht, wenn sie nicht anwendbar wäre.“ [Dorninger]

Aufbau der Differentialrechnung:



Ausgangspunkt ist ein konkretes Problem (Sekanten-/Tangentenproblem, mittlere / Momentangeschwindigkeit). Um es zu lösen wird zuerst ein abstraktes Modell entwickelt („abstrahieren“). Erst das abstrakte Modell eröffnet das Tor zur Nutzung der Differentialrechnung bei vielen Anwendungen („konkretisieren“).

Bruno Buchbergers These lautet: *„Die Stärke der Mathematik ist die Stärke der Konkretisierung“.*

In dieser Lernsequenz werden verschiedene „Konkretisierungen“ der Differentialrechnung vorgestellt.

Der Aufbau dieser Lernsequenz erfolgt nach verschiedenen Funktionsarten, die sich als mathematische Modelle eignen:

- Polynomfunktionen
- Rationale Funktionen
- Wurzelfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Trigonometrische Funktionen

Theoretische Überlegungen zu wichtigen Eigenschaften von Funktionen, die mit Hilfe der Differentialrechnung untersucht werden, findet man in allen Schulbüchern (Nullstellen, Monotonie, Extreme, Wendepunkte, Asymptoten, usw.). Innermathematische Kurvendiskussionen werden nicht behandelt. Die Nutzung von Technologie macht solche Aufgaben eigentlich überflüssig. Interessanter sind Aufgaben, bei denen Funktionsgleichungen mit Hilfe vorgegebener Eigenschaften gesucht werden, oder Aufgaben, bei denen oben beschriebene Eigenschaften untersucht und kontextgemäß gedeutet werden müssen.

Einen Überblick über die **Kompetenzanforderungen im neuen Lehrplan** und im **Erweiterten Grundkompetenzkatalog in der Handreichung zum Lehrplan** finden Sie im **Anhang**.

Aufgabenbeispiele

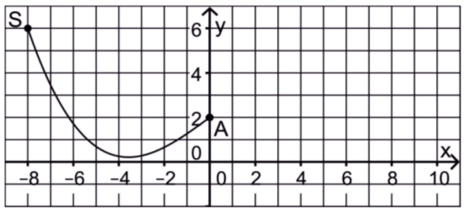
Didaktischer Kommentar:

Je besser man Wirklichkeit beschreiben will, desto komplexer werden die dafür nötigen Modelle. Daran scheitert im traditionellen Mathematikunterricht oft das Lösen wirklichkeitsnaher Anwendungsprobleme. Bei Verfügbarkeit von Technologie, insbesondere von CAS können solche Probleme deshalb bearbeitet werden, **weil man nicht mit den komplexen Ausdrücken arbeitet, sondern mit ihren Namen.** Das Operieren mit komplexen Termen erfolgt im Hintergrund durch die Technologie.

Aufgabe 1: BMX-Schanze

Quelle: IQB Gemeinsamer Aufgabenpool der Länder:
https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/grundlegend

BMX-Fahrräder sind speziell für das Gelände ausgelegte Sportgeräte. Für den professionellen Einsatz dieser Fahrräder wird auf horizontalem Untergrund eine 3m breite Sprungschanze installiert. Im Längsschnitt der Schanze kann deren Profillinie modellhaft durch die reelle Polynomfunktion beschrieben werden. f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{6}{256}x^3 + \frac{3}{4}x + 2$ mit $x \in [-8,0]$



Die Abbildung zeigt den zugehörigen Teil des Graphen von f.

Der Startpunkt, von dem aus die Schanze durchfahren wird, wird durch den Punkt S(-8/f(-8)) dargestellt, der Absprungpunkt durch A(0/f(0)). Der Untergrund wird im Längsschnitt durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1m in der Wirklichkeit.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts, der im Modell den tiefsten Punkt der Schanze darstellt. Bestimmen Sie rechnerisch die Höhendifferenz zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkt der Schanze.

b) Veranschaulichen Sie in der Abbildung die mittlere Steigung der Schanze zwischen Startpunkt und Absprungpunkt. Bestimmen Sie diese Steigung.

c) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Schanze im Startpunkt mit der Horizontalen einschließt.

Mögliche Lösung:

$f(x):=\frac{-5}{256}\cdot x^3+\frac{3}{4}\cdot x+2.$	*Done*
$f1(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Done*
$\text{zeros}(f1(x),x)$	$\{-3.57771,3.57771\}$
$f(-3.57771)$	0.211146
$f(-8)-f(-3.57771)$	5.78885
$km=\frac{f(-8)-f(0)}{-8}$	$km=-0.5$
$\tan^{-1}(f1(-8))$	-71.5651

Der Funktionsterm ist nur für die Eingabe (Definition der Funktion f) nötig. Danach wird mit den Namen der Funktionen gearbeitet.

Um Näherungslösungen zu erhalten, genügt es, Zahlen auch als Dezimalzahlen einzugeben (hier 2.)

Aufgabe 2: Grippeepidemie

Quelle: Unterrichtsaufgabe zur Aufgabe 2 der Probeklausur AHS 2014

Betrachtet man den Verlauf einer Grippewelle in einer Stadt mit 5 000 Einwohnern, so lässt sich die Anzahl an Erkrankten E in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschreiben.

Folgende Informationen liegen vor:

1) Zu Beginn der Beobachtungen sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert.

2) Nach einem Tag sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt.

3) Am 3. Tag nimmt die Anzahl an Erkrankten am stärksten zu.

4) Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum.

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion E aus den verfügbaren Informationen und zeichnen Sie den Graphen.

b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate für die ersten 8 Tage und die momentane Änderungsrate am 8.Tag. Interpretieren Sie die mittlere und die momentane Änderungsrate kontextbezogen.

c) An welchem Tag geht die progressive Zunahme der Anzahl an Erkrankten (das heißt: der Zuwachs an Erkrankten wird von Tag zu Tag größer) in eine degressive Zunahme (das heißt: der Zuwachs an Erkrankten nimmt pro Tag wieder ab) über?

Mögliche Lösung:

a)

$$f(x):=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \qquad \textit{Done}$$

$$f1(x):=\frac{d}{dx}(f(x)) \qquad \textit{Done}$$

$$f2(x):=\frac{d}{dx}(f1(x)) \qquad \textit{Done}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} f(0)=10 \\ f(1)=100 \\ f2(3)=0 \\ f1(10)=0 \end{cases},\{a,b,c,d\}\right)$$

$$a=\frac{-45}{64} \text{ and } b=\frac{405}{64} \text{ and } c=\frac{675}{8} \text{ and } d=10$$

$$e(x):=f(x)|a=\frac{-45}{64} \text{ and } b=\frac{405}{64} \text{ and } c=\frac{675}{8} \text{ and } d=10 \qquad \textit{Done}$$

$$e(x) \qquad \frac{-45\cdot x^3}{64}+\frac{405\cdot x^2}{64}+\frac{675\cdot x}{8}+10$$

Modellbilden: Übersetzen der Informationen in die Sprache der Mathematik:

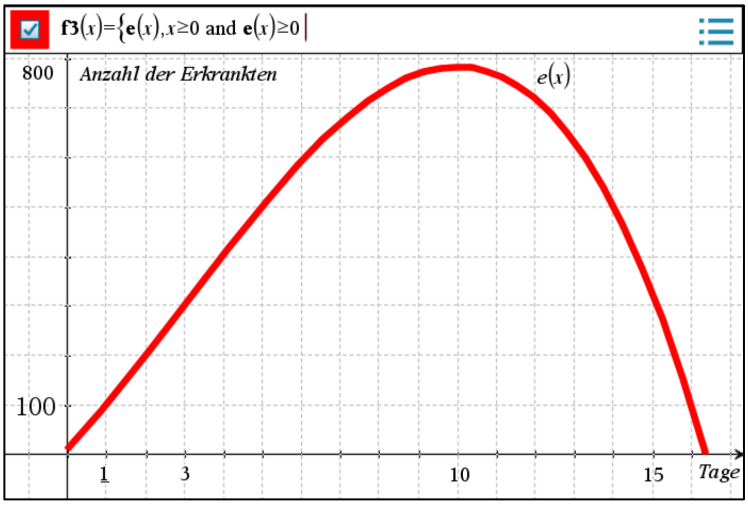
1) Zu Beginn der Beobachtungen sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert.

2) Nach einem Tag sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt.

3) Am 3. Tag nimmt die Anzahl an Erkrankten am stärksten zu.

4) Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum.

Lösen des Gleichungssystems mit Hilfe von CAS



Wichtig ist auch, eine Beschriftung der Graphiken sowie eine sinnvolle Definitionsmenge zu verlangen.

b) und c)

$e(x)$	$\frac{-25\cdot x^3}{32}+\frac{225\cdot x^2}{32}+\frac{375\cdot x}{4}$
$e1(x):=\frac{d}{dx}(e(x))$	*Fertig*
$e2(x):=\frac{d}{dx}(e1(x))$	*Fertig*
$e1(8.)$	56.25
$\frac{e(8.)-e(0)}{8}$	100.
solve$(e2(x)=0,x)$	$x=3$

b) Momentane und mittlere Änderungsrate

c) Wendepunkt mit Hilfe der 2. Ableitung

Aufgabe 3: Unterrichtsaufgabe zur Aufgabe „Ortsumfahrung“
Quelle: Aufgabenpool zur schriftlichen Reifeprüfung BHS

Eine große Ortschaft $P = (2|2)$ liegt auf einer geraden Straße zwischen den Dörfern $W = (0|4)$ und $S = (4|0)$. Es soll um die Ortschaft P eine Umfahrungsstraße gebaut werden, die über den Punkt $D = (2|1)$ führt und bei W bzw. S wieder in die gerade Straße tangential einmündet. Die Koordinatenwerte sind in Kilometern angegeben.

Aufgabenstellung:

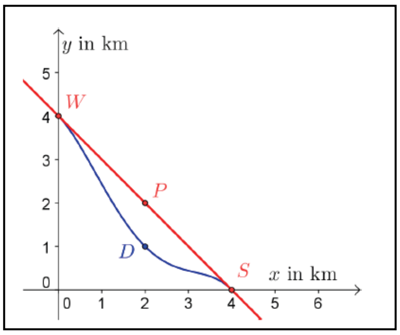
Ermittle die Funktionsgleichung der Umfahrungsstraße unter Verwendung der gegebenen Informationen und zeichne den Graphen der Umfahrungsfunktion sowie der geraden Straße (x:y = 1:1).

Didaktischer Kommentar:

Je nach Anspruchsniveau können eine passende Skizze und der Grad der Polynomfunktion angegeben werden. Gerade bei einer Unterrichtsaufgabe ist eine wichtige Kompetenz beim Modellbilden basierend auf den gegebenen Informationen eine Skizze zu erstellen und den Grad der Polynomfunktion je nach Anzahl der Informationen zu wählen.

Mögliche Lösung:

Schritt 1: Skizze



Schritt 2: Ermitteln der Funktionsgleichung

$$f(x):=a\cdot x^4+b\cdot x^3+c\cdot x^2+d\cdot x+e \qquad \textit{Fertig}$$

$$f1(x):=\frac{d}{dx}(f(x)) \qquad \textit{Fertig}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} f(0)=4 \\ f(2)=1 \\ f(4)=0 \\ f1(0)=-1 \\ f1(4)=-1 \end{cases},\{a,b,c,d,e\}\right)$$

$$a=-0.0625 \text{ and } b=0.5 \text{ and } c=-1. \text{ and } d=-1. \text{ and } e=4$$

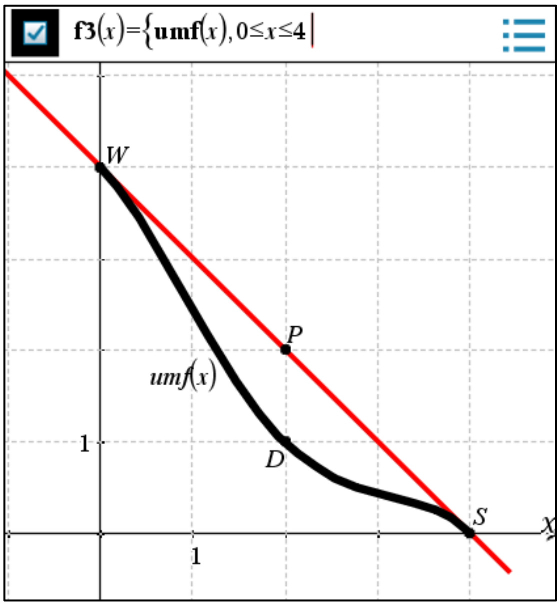
$$umf(x):=f(x)|a=-0.0625 \text{ and } b=0.5 \text{ and } c=-1. \text{ and } d=-1. \text{ an}$$

Fertig

$$umf(x) \qquad -0.0625\cdot x^4+0.5\cdot x^3-x^2-x+4.$$

Im Text finden sich 5 Informationen ⇨ ein mögliches Modell ist eine Polynomfunktion 4. Grades.

Schritt 3: Graph der Umfahrungsstraße



Sinnvoller Definitionsbereich für die Funktion umf(x): Das Intervall [0,4]

Eine Aufgabe zur Kosten- und Preistheorie

Grundlagen

Die **Gesamtkostenfunktion** K(x) beschreibt den Zusammenhang zwischen einer bestimmten Menge x eines Gutes und den für deren Produktion aufgewendeten gesamten Kosten: K(x).

Die Gesamtkosten K lassen sich aufspalten in die **Fixkosten** F (= K(x = 0)) und die **variablen Kosten** $K_v(x)$: $K(x) = K_v(x) + F$

Wachsen die Kosten verhältnismäßig langsamer als die Stückzahl (Gründe: z.B. rationellere Arbeitsweise), so spricht man von einem **degressiven** Kostenverlauf. Das Wachstum der Kosten nimmt ab ⇨ K'(x)<0
Wachsen hingegen die Kosten verhältnismäßig schneller als die Stückzahl (Gründe: z.B. höhere Abnutzung der Maschinen ab einer bestimmten Produktionsmenge, Überstunden), so ist der Kostenverlauf **progressiv**. Zunehmendes Wachstum ⇨ K'(x)>0.

Die **Kostenkehre** ist der Übergang vom degressiven zum progressiven Kostenverlauf: K''(x)=0

Die **Stückkosten** (oder auch Durchschnittskosten) sind die Kosten pro Produktionseinheit und werden daher definiert als $\overline{K}(x) = \dfrac{K(x)}{x}$.

Das Minimum der Stückkostenfunktion bezeichnet man als **Betriebsoptimum**: $\overline{K}'(x) = 0$

Wenn der Preis *p* konstant bleibt, dann spricht man von einer *vollständigen Konkurrenz.* Dann ergibt sich für den **Erlös** E: E(x)=p·x

Wird der Preis des Gutes allerdings durch die Nachfrage bestimmt, dann ergibt sich für den Gesamterlös: E(x)=p(x)·x .

Die **Gewinnfunktion** *G*(*x*) wird dann natürlich als Differenz von Gesamterlös und Gesamtkosten definiert: $G(x) = E(x) – K(x)$.

Die untere Nullstelle der Gewinnfunktion bezeichnet man als **Gewinnschwelle („Break-Even-Punkt")**, die obere Nullstelle heißt Gewinngrenze.

x_{max} ist jene Stückzahl bei der **maximaler Gewinn** erzielt wird ⇔ $G'(x_{max})=0$.

Der Punkt auf der Preisfunktion, an dem sich das Unternehmen im Gewinnmaximum befindet heißt **Cournotscher Punkt**: $C(x_{max}/p(x_{max}))$

Aufgabe 4: Ein „Kosten-/Preisproblem"
Unterrichtsaufgabe zu den Aufgaben 2_012 und 2_016 aus dem Aufgabenpool AHS (https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/)

Die Analyse der Produktionskosten k für ein bestimmtes Produkt ergab für unterschiedliche Produktionsmengen x (in ME) die Gesamtkosten $k(x) = x^3 - 59x^2 + 1315x + 2000$

Der Produzent hat fast ein Monopol auf dieses Produkt, daraus ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der abgesetzten bzw. angebotenen Menge x und dem durch Marktforschung ermittelten Preis p: $p(x) = 1000 - 2 \cdot x$

Aufgabenstellung:

a) Zeichne den Graphen der Kostenfunktion. Ermittle die Kostenkehre. Für welche Stückzahlen ist der Kostenverlauf degressiv, für welche progressiv?

b) Ermittle die Stückkostenfunktion sk. Bei welcher Stückzahl werden die Stückkosten minimal? (Betriebsoptimum)

c) Ermittle die zugehörige Erlösfunktion e sowie die Gewinnfunktion g. Zeichne die Kosten-, die Erlös- und die Gewinnfunktion in einem Koordinatensystem ein. Für welche Stückzahl ist der Gewinn maximal? Gib auch die Gewinnschwelle (Break-Even-Point) und die Gewinngrenze an. Ermittle den Cournotschen Punkt.

d) Ermittle die Tangentengleichungen an die Kosten- und die Erlösfunktion an der Stelle des Gewinnmaximums und zeichne sie. Zeige allgemein, dass diese Tangenten stets parallel sind.

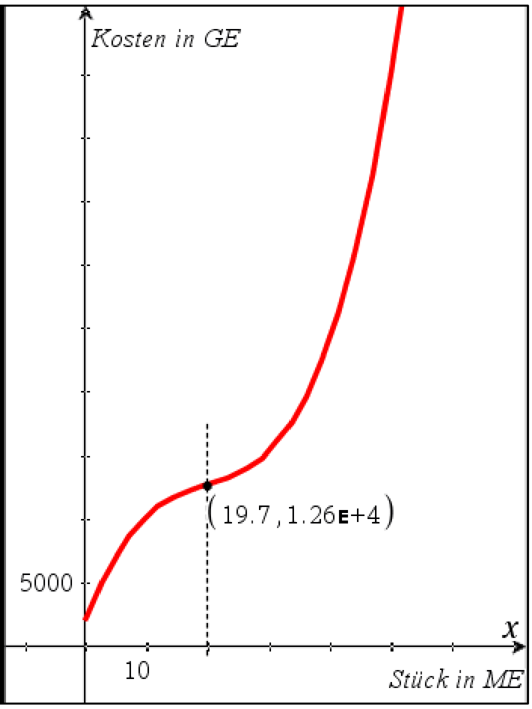
e) Ermittle die Tangente an die Kostenfunktion k an der Stelle des Betriebsoptimums einerseits graphisch und andererseits rechnerisch. Geht der Graph der Tangente durch den Koordinatenursprung?

Beweise ohne Technologie: Es sei k eine beliebige Kostenfunktion, dann geht die Tangente an die Kostenfunktion k an der Stelle des Betriebsoptimums stets durch den Koordinatenursprung.

Mögliche Lösung:

a)

$k(x):=x^3-59\cdot x^2+1315\cdot x+2000.$	*Done*
$k1(x):=\frac{d}{dx}(k(x))$	*Done*
$k2(x):=\frac{d}{dx}(k1(x))$	*Done*
$\text{zeros}(k2(x),x)$	$\{19.6667\}$
$\text{solve}(k2(x)>0,x)$	$x>19.6667$
$\text{solve}(k2(x)<0,x)$	$x<19.6667$



Die Kostenkehre kann sowohl graphisch *(„Analyze Graph“ → „Inflection Point“)* als auch mit Hilfe von CAS ermittelt werden b)

$sk(x):=\frac{k(x)}{x}$	*Done*
$sk1(x):=\frac{d}{dx}(sk(x))$	*Done*
zeros$(sk1(x),x)$	$\{30.5701\}$

Bei etwa 31 ME wird das Betriebsoptimum erreicht

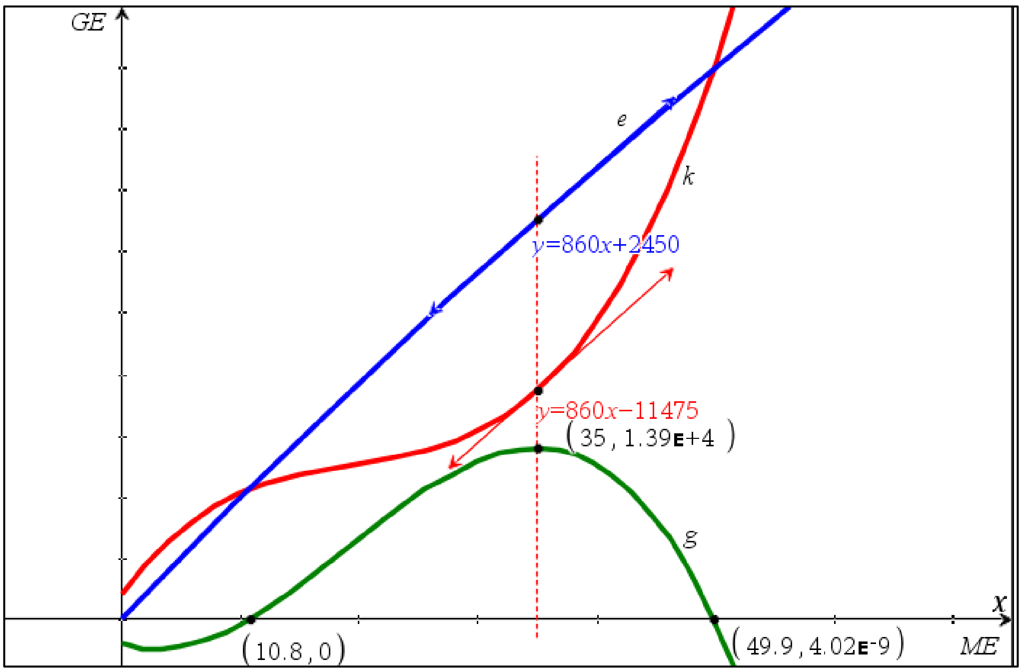
c) und d)

$p(x):=1000-2\cdot x$	*Done*
$e(x):=p(x)\cdot x$	*Done*
$g(x):=e(x)-k(x)$	*Done*
$e(x)$	$^{-}2\cdot x\cdot(x-500)$
$g(x)$	$^{-}x^3+57\cdot x^2-315\cdot x-2000.$
zeros$(g(x),x)$	$\{^{-}3.70452,10.8233,49.8812\}$
$g1(x):=\frac{d}{dx}(g(x))$	*Done*
zeros$(g1(x),x)$	$\{3.,35.\}$
$p(35)$	930

Break-Even-Point bei x ≈ 11 ME,
Gewinngrenze bei x ≈ 50 ME.

Gewinnmaximum bei x ≈ 35 ME.

Cournotscher Punkt:
Bei x ≈ 35 ME wird ein Preis von 930 GE erzielt.

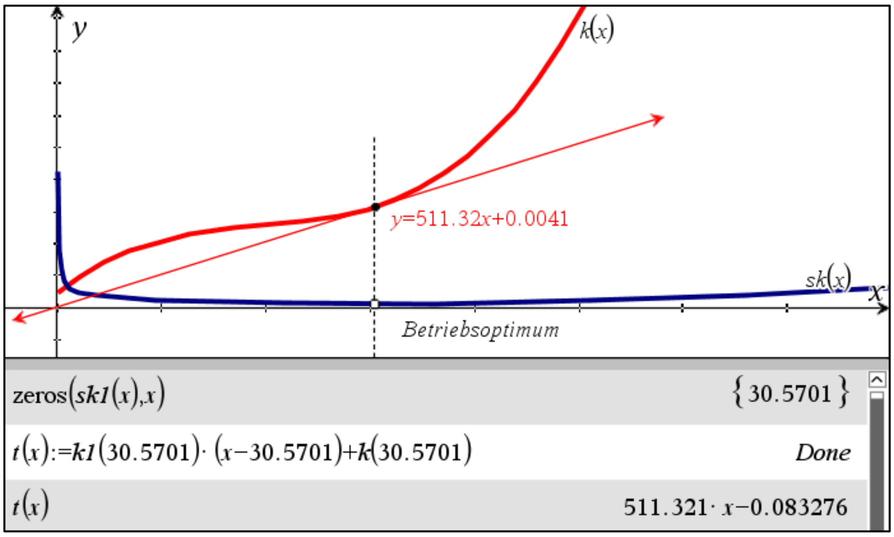


Bei maximalem Gewinn sind die Tangenten an die Kostenfunktion k und an die Erlösfunktion e parallel.

Allgemeiner Beweis ohne Technologie:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$
$$G'(x_{\max}) = E'(x_{\max}) - K'(x_{\max}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E'(x_{\max}) = K'(x_{\max})$$

e)



Weder die graphisch noch die rechnerisch ermittelte Tangente geht durch den Koordinatenursprung.

Beweis: Differenzieren mit Hilfe der Quotientenregel

$$sK(x) = \frac{K(x)}{x}$$
$$sK'(x) = \frac{K'(x) \cdot x - 1 \cdot K(x)}{x^2}$$
$$sK'(x_{opt}) = 0$$
$$K'(x_{opt}) \cdot x_{opt} - 1 \cdot K(x_{opt}) = 0$$
$$K'(x_{opt}) = \frac{K(x_{opt})}{x_{opt}}$$

Tangente im Betriebsoptimum:

$t(x) := K'(x_{opt}) \cdot (x - x_{opt}) + K(x_{opt})$

wobei $K'(x_{opt}) \cdot x_{opt} - K(x_{opt}) = 0$

ergibt

$t(x) := K'(x_{opt}) \cdot x$

Didaktischer Kommentar:

Die Lernenden sollen erleben, dass graphische oder numerische Lösungen oft nur zu Vermutungen führen und dass man auf exaktes Beweisen nicht verzichten kann.

Teil 2: Anwendungen mit rationalen Funktionen

Aufgabe 5: Verkehrsdichte

Quelle: Malle, G., 2011: „Mathematik verstehen“ 7. S. 88 Aufgabe 4.33. ÖBV Verlag.

Für den Sicherheitsabstand s zweier Autos, die auf trockener Straße fahren, gilt die Faustformel

$$s(v) = \frac{v^2}{100} + \frac{v}{3.6} + 6$$

Dabei ist v die Geschwindigkeit (in km/h). Die Formel beinhaltet den Bremsweg, den Reaktionsweg und die Länge des Fahrzeuges.

Die Verkehrsdichte d beschreibt die Anzahl der Fahrzeuge pro Stunde in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v. Sie ist durch folgende Formel gegeben:

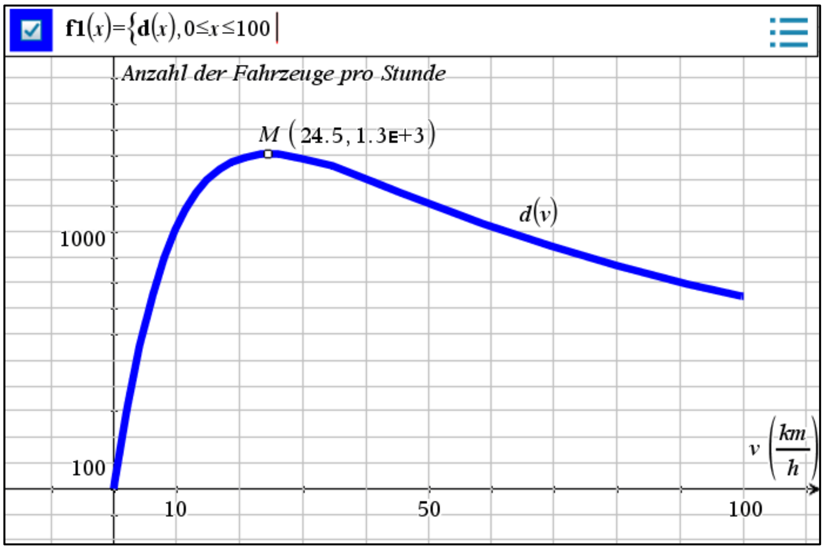
$d(v) = \dfrac{1000 \cdot v}{s(v)}$ (Fahrzeuge pro Stunde).

a) Zeichne den Graphen der Verkehrsdichte d für $5 \le v \le 100$

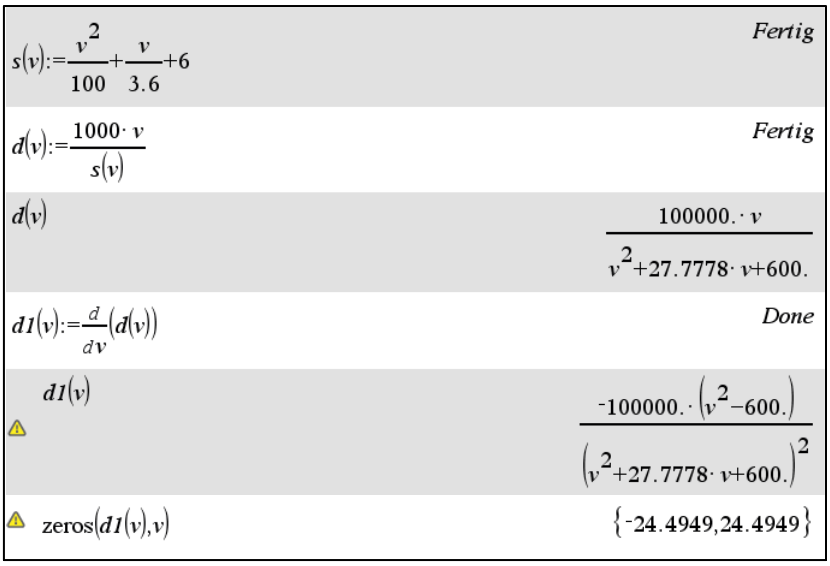
b) Für welche Geschwindigkeit ist die Verkehrsdichte am größten?

c) Überlege, warum die häufige Meinung, die Verkehrsdichte wäre bei hoher Geschwindigkeit sehr groß, falsch ist.

Mögliche Lösung für a und b:



Das Maximum der Verkehrsdichte kann graphisch ermittelt werden *(„Analyze Graph“ → „Maximum“), oder rechnerisch mit Hilfe von CAS.*

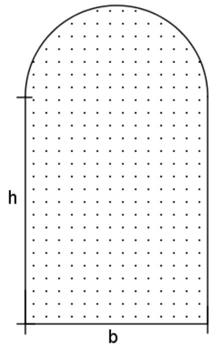


Die komplexen Terme d(v) und d1(v) müsste man gar nicht sehen, man arbeitet ja nur mit den Namen der Objekte.

Maximale Verkehrsdichte bei etwa 25 km/h

Aufgabe 6: Kanal – Optimierungsaufgabe

Der Querschnitt eines Kanals hat die Form eines Rechtecks (Breite b, Höhe h) mit oben aufgesetztem Halbkreis. Der Flächeninhalt A ist vorgegeben. Welche Maße muss der Kanal haben, damit der Umfang minimal wird, das heißt es soll zur Herstellung möglichst wenig Material verwendet werden.



Mögliche Lösung:

$f(r,h)=2\cdot r+2\cdot h+r\cdot \pi$	$f(r,h)=(\pi+2)\cdot r+2\cdot h$
$a=2\cdot r\cdot h+\frac{r^2\cdot \pi}{2}$	$a=\frac{\pi\cdot r^2}{2}+2\cdot h\cdot r$
$\text{solve}\left(a=2\cdot r\cdot h+\frac{r^2\cdot \pi}{2},h\right)$	$h=\frac{-(\pi\cdot r^2-2\cdot a)}{4\cdot r}$
$f(r):=2\cdot r+2\cdot h+r\cdot \pi \mid h=\frac{-(\pi\cdot r^2-2\cdot a)}{4\cdot r}$	*Done*
$f1(r):=\frac{d}{dr}(f(r))$	*Done*
$\text{solve}(f1(r)=0,r)$	$r=\frac{-\sqrt{2\cdot a}}{\sqrt{\pi+4}}$ and $a\geq 0$ or $r=\frac{\sqrt{2\cdot a}}{\sqrt{\pi+4}}$ and $a\geq 0$
$h=\frac{-(\pi\cdot r^2-2\cdot a)}{4\cdot r} \mid r=\frac{\sqrt{2\cdot a}}{\sqrt{\pi+4}}$	$h=\frac{\sqrt{2\cdot a}}{\sqrt{\pi+4}}$

b = 2.r
Zielfunktion

Nebenbedingung

Ergebnis:
Die Breite b ist doppelt so groß wie die Höhe h.

Teil 3: Anwendungen mit Wurzelfunktionen

Grundlagen für die physikalischen Aufgaben:

Fermatscher Satz vom ausgezeichneten Lichtweg:

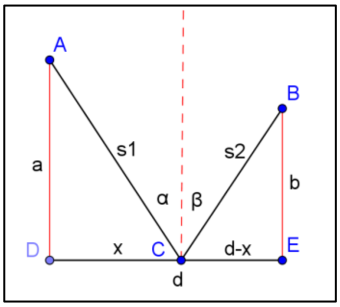
> Licht, welches durch Spiegelung oder Brechung von einem Raumpunkt zu einem anderen gelangt, schlägt den Weg ein, welcher am schnellsten zum Ziel führt.

Aufgabe 7: Beweis des Brechungsgesetzes

Beweise das **Reflexionsgesetz**:

Ein Lichtstrahl geht vom Punkt A zum Punkt B und wird am Spiegel DE reflektiert.

Einfallender Strahl und reflektierter Strahl bilden mit dem Einfallslot gleiche Winkel; einfallender Strahl, Einfallslot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.



Mögliche Lösung:

$s1:=\sqrt{x^2+a^2}$	$\sqrt{x^2+a^2}$
$s2:=\sqrt{(d-x)^2+b^2}$	$\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+b^2+d^2}$
$t1:=\frac{s1}{v}$	$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v}$
$t2:=\frac{s2}{v}$	$\frac{\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+b^2+d^2}}{v}$
$time(x):=t1+t2$	$Done$
$time(x)$	$\frac{\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+b^2+d^2}+\sqrt{x^2+a^2}}{v}$
$time1(x):=\frac{d}{dx}(time(x))$	$Done$
$\text{solve}(time1(x)=0,x)$	$x=\frac{a\cdot d}{a-b}\text{ or }x=\frac{a\cdot d}{a+b}$
$d-\frac{a\cdot d}{a+b}$	$\frac{b\cdot d}{a+b}$
$\tan(\alpha)=\frac{\frac{a\cdot d}{a+b}}{a}$	$\tan(\alpha)=\frac{d}{a+b}$
$\tan(\beta)=\frac{\frac{b\cdot d}{a+b}}{b}$	$\tan(\beta)=\frac{d}{a+b}$

Minimale Zeit: Man verwendet die Formel: *„Weg=Geschwindigkeit mal Zeit“*

$$s=v\cdot t\Rightarrow t=\frac{s}{v}$$

Ergebnis:

$$\tan(\alpha)=\tan(\beta)\Rightarrow\alpha=\beta$$

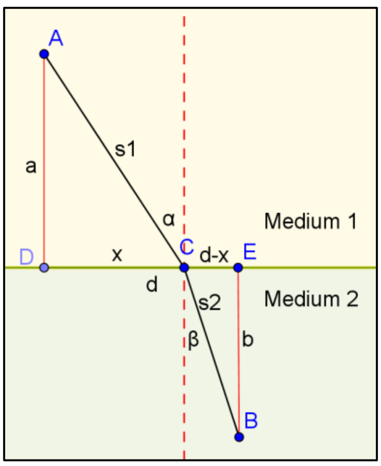
Aufgabe 8: Beweis des Reflexionsgesetzes

Beweise das Brechungsgesetz von W. Snellius (1620):

Ein Lichtstrahl geht vom Punkt A im Medium1 (mit Lichtgeschwindigkeit v1) zum Punkt B im Medium 2 (mit Lichtgeschwindigkeit v2).

Die Sinuswerte des Einfallswinkels α und des Brechungswinkels β verhalten sich wie die Geschwindigkeiten in den beiden Medien:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}=\frac{v1}{v2}$$



Mögliche Lösung:

$s1:=\sqrt{x^2+a^2}$	$\sqrt{x^2+a^2}$
$s2:=\sqrt{(d-x)^2+b^2}$	$\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+b^2+d^2}$
$t1:=\frac{s1}{v1}$	$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v1}$
$t2:=\frac{s2}{v2}$	$\frac{\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+b^2+d^2}}{v2}$
$time(x):=t1+t2$	Done
$time1(x):=\frac{d}{dx}(time(x))$	Done
⚠ $\text{solve}(time1(x)=0,x)$	$v2\cdot x\cdot\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+b^2+d^2}+v1\cdot(x-d)\cdot\sqrt{x^2+a^2}=0$
⚠ $\frac{v2\cdot x\cdot s2=v1\cdot(d-x)\cdot s1}{s1\cdot s2}$	$\frac{v2\cdot x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{-v1\cdot(x-d)}{\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+b^2+d^2}}$
$v2\cdot\sin(\alpha)=v1\cdot\sin(\beta)$	$v2\cdot\sin(\alpha)=v1\cdot\sin(\beta)$
⚠ $\frac{v2\cdot\sin(\alpha)=v1\cdot\sin(\beta)}{v2\cdot\sin(\beta)}$	$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}=\frac{v1}{v2}$

Minimale Zeit: Man verwendet die Formel: „*Weg=Geschwindigkeit mal Zeit*“

$$s=v\cdot t\Rightarrow t=\frac{s}{v}$$

In der Zeichnung erkennt man:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x}{s1}=\sin(\alpha)$$

$$\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}=\frac{d-x}{s2}=\sin(\beta)$$

Dividiert man die Gleichung durch $v2\cdot\sin(\beta)$, so erhält man das Brechungsgesetz.

Teil 4: Anwendungen mit Exponentialfunktionen

Aufgabe 9: Radioaktiver Zerfall: Mutter-Tochter Zerfall

Quelle: Teil einer Zentralabituraufgabe mit CAS in den Niederlanden (Bis Teil (d) „Standard Level“, Teil (e) „Advanced Level“)

Bei einem Mutter-Tochter Zerfall ist das Zerfallsprodukt der ersten radioaktiven Substanz wieder radioaktiv. Der radioaktive Zerfall der ersten Substanz („Muttersubstanz“) werde beschrieben durch die Funktion

$f(t)=200\cdot e^{k\cdot t}$ *mit* $t\geq 0$ *und* $k<0$. Die Zeit wird in Stunden, die Masse in mg gemessen.

Die durch diesen Zerfall entstehende Substanz („Tochtersubstanz“) ist wieder radioaktiv. Ihr Zerfall wird beschrieben durch die Funktion

$g(t)=200\cdot e^{a\cdot t}\cdot\left(1-200\cdot e^{a\cdot t}\right)$ *mit* $t\geq 0$ *und* $a<0$

Aufgabenstellung:

a) Zeichne die Graphen der Funktionen fk und ga für k = -0.25 und a = -0.25

b) Ermittle die Halbwertszeit der Muttersubstanz für einen beliebigen Wert k und dann für k = -0,25

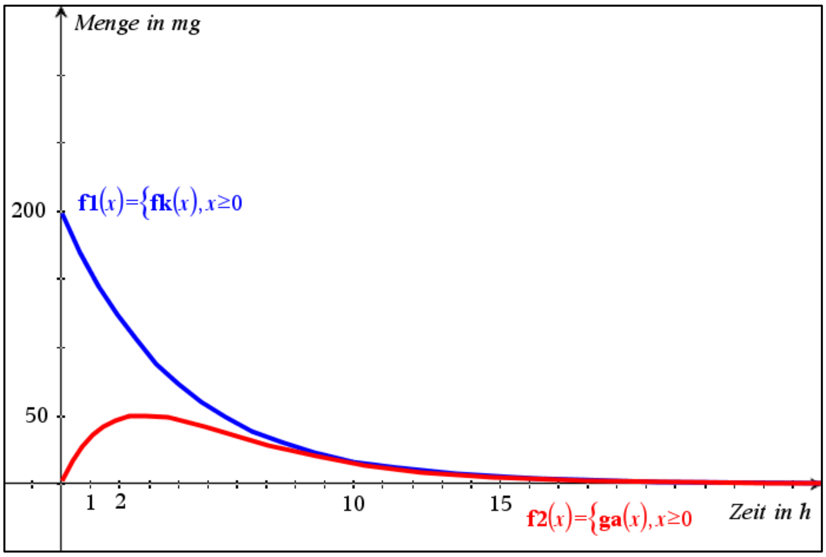
c) Interpretiere den Kurvenverlauf der Funktion ga (mit a = -0.25) kontextbezogen; berechne das Maximum von ga sowie den Zeitpunkt mit der größten Zerfallsgeschwindigkeit dieser Tochtersubstanz.

d) Ab dem Zeitpunkt t = 12 ist es nicht mehr möglich aus den Graphen von fk und ga festzustellen, ob der Graph von fk oberhalb oder unterhalb von ga verläuft. Zeige, dass für alle t ≥ 0 der Graph von ga immer unter dem Graphen von fk verläuft und finde den Zeitpunkt t, ab dem der Unterschied zwischen den Massen fk(t) und ga(t) immer ≤ 0,01 mg ist.

e) Ab dem Zeitpunkt t = 20 kann die Funktion ga durch eine lineare Funktion ersetzt werden. Ermittle die Gleichung der linearen Funktion so, dass die nun abschnittsweise definierte Funktion an der Stelle t = 20 differenzierbar ist. Ermittle nun die Zeit t, bei der der Mutter-Tochter Zerfall praktisch endet.

Mögliche Lösung:

a)



b)

$f(t):=200\cdot \mathbf{e}^{k\cdot t}$	*Done*
$fk(t):=200\cdot \mathbf{e}^{k\cdot t}\vert k=-0.25$	*Done*
$g(t):=200\cdot \mathbf{e}^{a\cdot t}\cdot\left(1-\mathbf{e}^{a\cdot t}\right)$	*Done*
$ga(t):=200\cdot \mathbf{e}^{a\cdot t}\cdot\left(1-\mathbf{e}^{a\cdot t}\right)\vert a=-0.25$	*Done*
$\text{solve}\left(0.5=\mathbf{e}^{k\cdot th},th\right)$	$th=\frac{-0.693147}{k}$
$thk:=\frac{-0.693147}{k}\vert k=-0.25$	2.77259

Die Halbwertszeit th ist etwa 2,8 Stunden

c)

$ga1(t):=\frac{d}{dt}(ga(t))$	*Fertig*
$ga2(t):=\frac{d}{dt}(ga1(t))$	*Fertig*
$\text{zeros}(ga1(t),t)$	$\{2.77259\}$
$\text{zeros}(ga2(t),t)$	$\{5.54518\}$

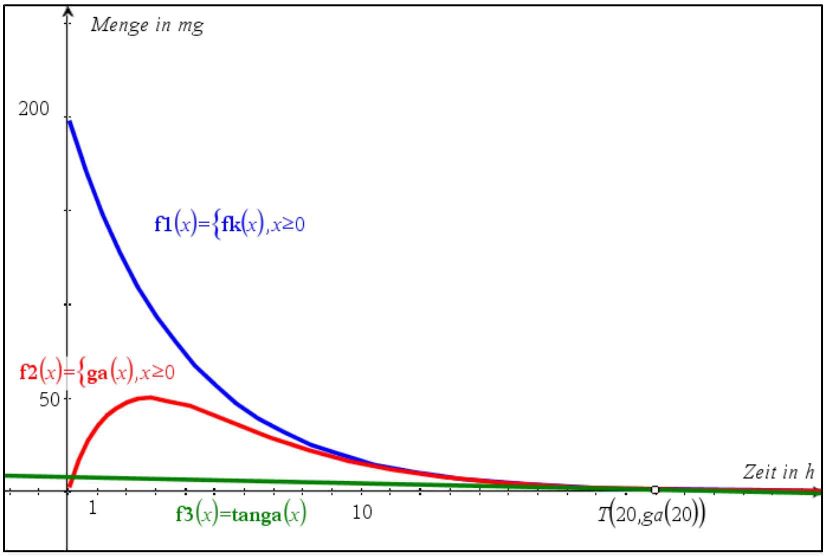
Der Maximalwert von ga wird nach etwa 2,8 Stunden erreicht.
Der Zeitpunkt der maximalen Zerfallsgeschwindigkeit ist nach 5,5 Stunden erreicht.

d) und e)

$fk(t)$	$200.\cdot(0.778801)^{t}$
$ga(t)$	$200.\cdot(0.606531)^{t}\cdot((1.28403)^{t}-1.)$
$\text{solve}(fk(t)>ga(t),t)$	true
$\text{solve}(fk(t)-ga(t)\le 0.01,t)$	$t\ge 19.807$
$tanga(t):=ga1(20)\cdot(t-20)+ga(20)$	*Done*
$\text{solve}(tanga(t)=0,t)$	$t=24.0273$

Nach etwa 20 Stunden ist der Unterschied zwischen den Massen von fk und ga 0,01 mg.

Nach etwa 24 Stunden ist der Zerfall praktisch zu Ende.



Teil 5: Anwendungen mit trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 10: Gedämpfte Schwingung

Die Funktion f beschreibt die Elongation f(t) einer gedämpften Schwingung in Abhängigkeit von der Zeit t: $f(t)=r\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)$

Die „Einhüllenden“ ehf und –ehf sind gegeben durch $ehf(t)=r\cdot e^{-\lambda\cdot t}$ und $-ehf(t)=-r\cdot e^{-\lambda\cdot t}$.

Aufgabenstellung:

a) Zeichne die Graphen von f, ehf und –ehf für r=5, λ=0,5 und ω=2·π und x≥0.

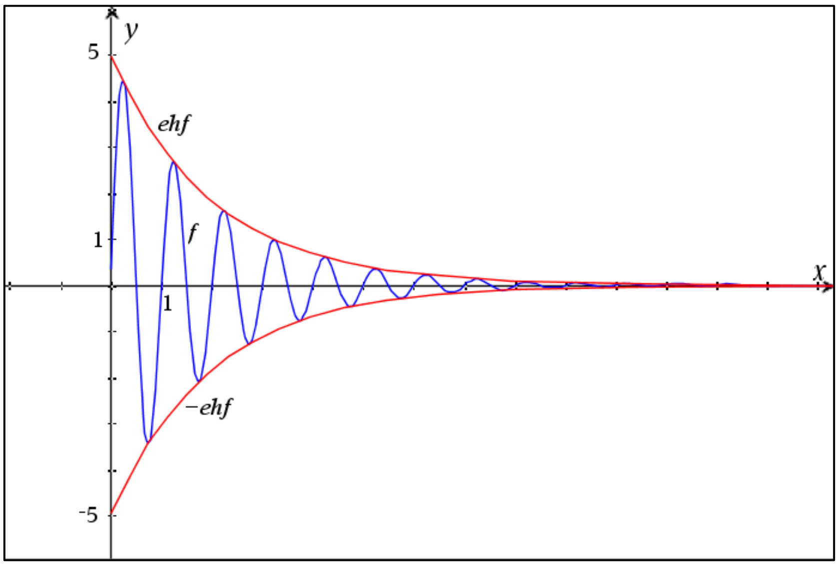
b) Beweise allgemein: Der Graph von f berührt den Graphen von ehf und -ehf

c) Wähle für r =5. Wähle für λ und ω Schieberegler λ∈[0,10] und ω∈[1,10] und untersuche die Abhängigkeit des Graphen f von λ und ω.

Mögliche Lösung:

a)

$r:=5$	5
$\lambda:=0.5$	0.5
$\omega:=2\cdot\pi$	$2\cdot\pi$
$f(t):=r\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)$	*Done*
$ehf(t):=r\cdot e^{-\lambda\cdot t}$	*Done*



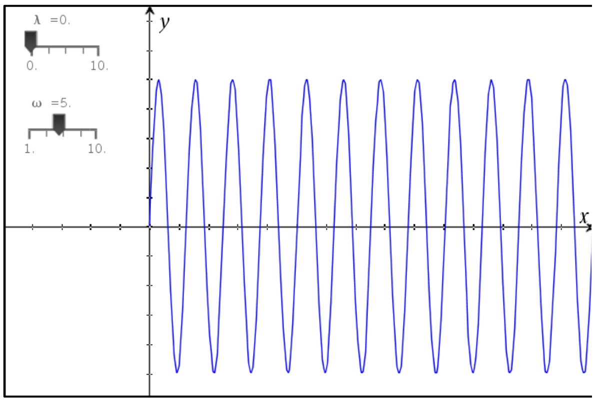
b)

$f(t):=r\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)$	*Done*
$f1(t):=\frac{d}{dt}(f(t))$	*Done*
$ehf(t):=r\cdot e^{-\lambda\cdot t}$	*Done*
$\text{solve}(f(t)=ehf(t),t)$	$t=\frac{(4\cdot \mathbf{n2}+1)\cdot\pi}{2\cdot\omega}$ or $r=0$
$ehf1(t):=\frac{d}{dt}(ehf(t))$	*Done*
⚠ $ehf1\left(\frac{(4\cdot \mathbf{n2}+1)\cdot\pi}{2\cdot\omega}\right)=f1\left(\frac{(4\cdot \mathbf{n2}+1)\cdot\pi}{2\cdot\omega}\right)$	true

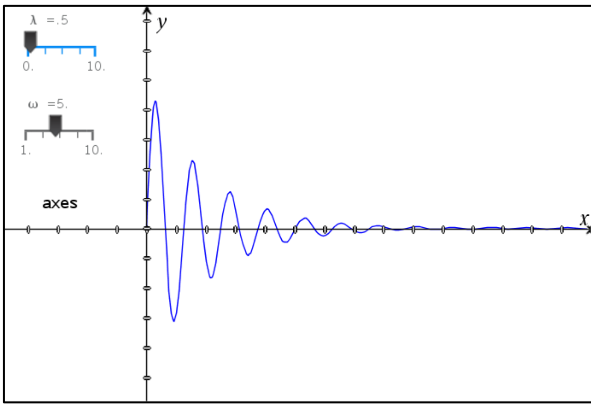
„Berühren von Kurven“: Die Ableitungen stimmen in den Schnittpunkten überein.

c)

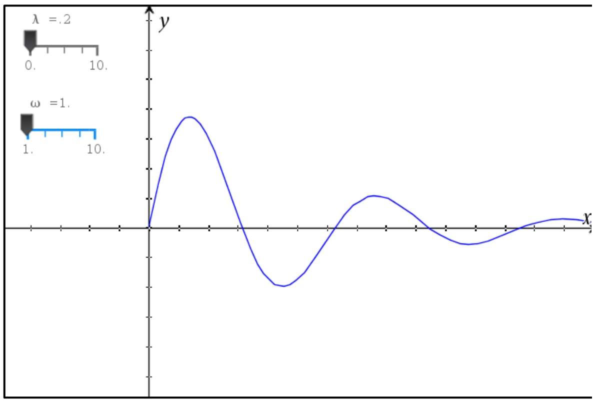
λ=0, ω=5



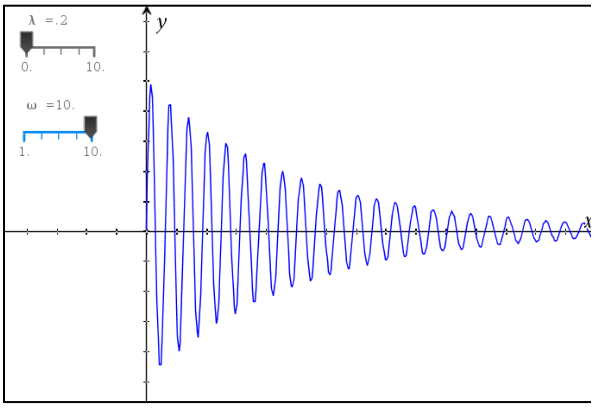
λ=0.5, ω=5



λ=0.2, ω=1



λ=0.2, ω=10



Ergebnis:

- λ ist ein Maß für die Dämpfung. λ=0: f beschreibt eine ungedämpfte Schwingung.
- ω ist ein Maß für die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit.

Anhang

Lehrplan Mathematik Oberstufe AHS

Kompetenzorientierung und Semestrierung.
11. Schulstufe, 5. Semester

Grundlagen der Differentialrechnung	• Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen kennen und anwenden können • Den Begriff der Ableitungsfunktion kennen; höhere Ableitungen kennen • Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen kennen und anwenden können	💻 Experimentierwerkzeug beim Entwickeln von Differentiationsregeln. 💻 CAS als Rechenwerkzeug beim Differenzieren 💻 Als Experimentierwerkzeug zur Entdeckung von Ableitungsfunktionen 💻 Als Graphikwerkzeug zur Darstellung der Graphen der Ableitungsfunktionen. 💻 CAS als Rechenwerkzeug für das Ermitteln komplexerer Ableitungen
Erweiterungen und Exaktifizierungen der Differentialrechnung	• Ableitungsregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen sowie Sinus- und Cosinusfunktion kennen • Weitere Ableitungsregeln (insbesondere die Kettenregel) kennen und für Funktionsuntersuchungen in verschiedenen Bereichen verwenden können.	💻 Als Graphikwerkzeug zum experimentellen Entdecken von Ableitungsfunktionen. 💻 CAS als Rechenwerkzeug bei der Herleitung der Ableitungsregeln
	• Die Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können • *Den Begriff Differenzierbarkeit sowie den Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit kennen*	💻 Als Graphikwerkzeug zur experimentellen Erforschung der Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit. 💻 CAS als Rechenwerkzeug zur Berechnung von Grenzwerten.

Erweiterter Grundkompetenzkatalog

Der folgende Grundkompetenzkatalog fasst die Grundkompetenzen, die für die zentrale Reifeprüfung erforderlich sind (AN-R), sowie jene Grundkompetenzen, die im Rahmen des Lehrplans neben den Reifeprüfungskompetenzen wesentlich sind (AN-L), zusammen.

AN 2 Regeln für das Differenzieren

AN-R 2.1	Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln [k·f(x)]' und [f(k·x)]' (vgl. Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten)
[AN-R 2.1]	*Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Ableitungsregeln bei multiplikativen Konstanten:* $g(x)=k\cdot f(x)\Rightarrow g'(x)=k\cdot f'(x),\quad h(x)=f(k\cdot x)\Rightarrow h'(x)=k\cdot f'(k\cdot x)$
AN-L 2.2	Kettenregel kennen und anwenden können

BHS

Kompetenzkatalog Teil A - Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern
Analysis

4.1	**Grenzwert und Stetigkeit** von Funktionen auf der Basis eines intuitiven Begriffsverständnisses argumentieren
4.2	Differenzen- und Differenzialquotient als **Änderungsraten** interpretieren, damit anwendungsbezogen modellieren, rechnen und damit argumentieren
4.3	Die **Ableitungsfunktionen** von Potenz-, Polynom- und Exponentialfunktionen und Funktionen, die aus diesen zusammengesetzt sind, berechnen

Literatur

BMB (Bundesministerium für Bildung), 2017: Übungsklausuraufgaben für die SRP in Mathematik AHS: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/

BMB (Bundesministerium für Bildung), 2017: Übungsklausuraufgaben für die SRP in Mathematik BHS: https://aufgabenpool.srdp.at/bhs/

Heugl, H., 2014: „Mathematikunterricht mit Technologie – ein didaktisches Handbuch mit einer Vielzahl von Aufgaben“. Veritas-Verlag, Linz. ISBN 978-3-7101-0431-2