Thema: Kann das Zufall sein?

Gertrud Aumayr

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Hypergeometrische Verteilung, Binomialverteilung, Vertrauensintervall, Erwartungswert, Standardabweichung

Unterrichtsmaterial

Arbeitsauftrag:

Der Arbeitsauftrag kann direkt im beigelegten tns – File „Zufall_Teilnehmer“ bearbeitet werden.

Hier die Screenshots:

Aufgabe 1

Aufgabe 1: Am Ende eines Lehrganges für 25 Piloten (15 männlich und 10 weiblich) zum Flug–kapitän gibt es 8 freie Stellen. Das Management der Fluglinie verspricht sie per Los zu besetzen.

Am nächsten Tag wird bekanntgegeben, dass die Stellen mit 5 weiblichen und 3 männlichen Piloten besetzt werden.

Die männlichen Piloten fragen sich:

Kann dies Zufall sein?

Simulation mit Hilfe von Karten:

Simulation 1: 

- Benütze Spielkarten. Wähle 15 schwarze Karten (männliche Piloten) und 10 rote Karten (weibliche Piloten). Mische die 25 Karten gut und ziehe 8.
- Zähle die Anzahl der roten Karten.
- Führe dieses Experiment 10 mal durch und notiere deine Ergenisse.

- Sammle auch Daten deiner Mitschüler und zeichne ein Diagramm.
- Wie oft erhielts du das Ergebnis 5 oder mehr Frauen?
- Sollen die Männer eine Beschwerde einbringen?
- Würde sich deine letzte Antwort ändern, falls bei der Lotterie 6 Frauen und 2 Männer gezogen worden wären?

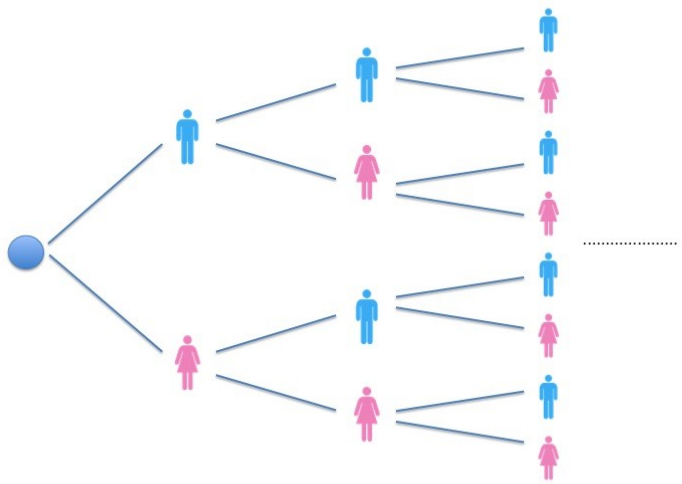
Simulation mit Hilfe des Zufallszahlengenerators:

Simulation 2: Führe eine Simulation mit dem Zufallszahlengenerator durch. − Führe 100 Versuche durch. − Sollen die Männer eine Beschwerde einbringen? − Würde sich deine letzte Antwort ändern, falls bei der Lotterie 6 Frauen und 2 Männer gezogen worden wären?

Theoretische Lösung:

Theorie: − Berechne nun die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse (0 Frauen, 1 Frau, ...). Benütze als Hilfe ein Baumdiagramm. − Zeichne ein Histogramm. − Vergleiche deine theoretischen Ergebnisse mit deinen Simulationen. − Was könnte der Begriff 95% − Vertrauens-intervall in diesem Zusammenhang bedeuten?	**Information:** Die hypergeometrische Verteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei N gegebenen Elementen, von denen M die gewünschte Eigenschaft besitzen, beim Herausgreifen von n Probestücken genau k Treffer erzielt werden.

***Hilfe**: Setze das folgende Baumdiagramm fort und berechne die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Pfade.*



Aufgabe 2

Aufgabe 2: 

Eine amerikanische Firma hat 11 Mathematiker angestellt, drei davon sind Frauen. Der Firmenchef wundert sich über den geringen Frauenanteil. Er weiß, dass in ganz Amerika 40% der Mathematiker weiblich sind. Er läßt daher untersuchen, ob die Auswahl vereinbar ist mit dem nationalen Pool.

Simulation mit Hilfe von zehnseitigen Würfeln bzw. mit dem Zufallszahlengenerator:

Simulation 1: 

- Benütze 10 seitige Spielwürfel. Wie viele Seiten eines Würfels repräsentieren Frauen, wenn der Frauenanteil 40 % sein soll?
- Würfle nun mit elf Würfeln (oder 11 mal). Wie viele Frauen erhältst du?
- Sammle auch Daten deiner Mitschüler und zeichne ein Diagramm.

Simulation 2:

- Führe eine Simulation mit dem Zufalls-zahlengenerator durch.
- Führe das Experiment 100 mal durch und zeichne ein entsprechendes Diagramm.
- Liegt in der gegebenen Firma Diskriminierung vor?

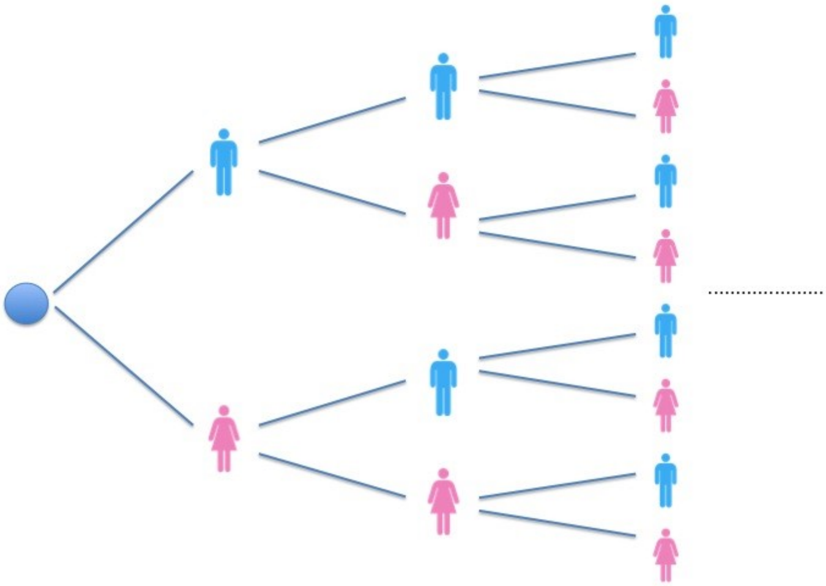
Theoretische Lösung:

Theorie:

- Berechne nun die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse (0 Frauen, 1 Frau, ….). Benütze als Hilfe ein Baumdiagramm.
- Zeichne ein Histogramm.
- Vergleiche deine theoretischen Ergebnisse mit deinen Simulationen.

- Wie wahrscheinlich ist es drei oder weniger weibliche Mathemetiker in einem Team von 11 Mathematikern zu haben?
- Welcher Unterschied besteht zu Aufgabe1?

***Hilfe**: Setze das folgende Baumdiagramm fort und berechne die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Pfade.*



Information:	**Unterschied Binomial– und hypergeometrischer Verteilung?**
Die Binomialverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei N gegebenen Elementen, von denen M die gewünschte Eigenschaft besitzen, beim Ziehen mit Zurücklegen von n Probestücken genau k Treffer erzielt werden.	Bei der Binomialverteilung werden die ausgewählten Stichproben wieder zur Auswahlmenge zurückgeführt, können also zu einem späteren Zeitpunkt erneut ausgewählt werden. Werden im Gegensatz dazu die Stichproben nicht zur Grundgesamtheit zurückgegeben, dann kommt die Hypergeometrische Verteilung zur Anwendung. Beide gehen bei großem Umfang N der Grundgesamtheit und geringem Umfang n der Stichproben ineinander über.

Aufgabe 3

Aufgabe 3: In der Firma DynTec wird umstrukturiert und dabei von 10 Mitarbeitern im Alter von $\{25,33,35,38,48,55,55,55,56,64\}$ der Abteilung A drei entlassen. Die drei entlassenen Mitarbeiter haben das Alter 55, 55 und 64 (Durchschnittsalter 58).

Liegt hier eine Diskriminierung älterer Mitarbeiter vor? *(Löse durch Simulation.)*

Wie groß ist ca. die Wahrscheinlichkeit, dass das Durchschnittsalter 58 oder darüber ist?

Aufgabe 4

Aufgabe 4:  Stell dir vor, vier Freunde lernen gemeinsam. Sie verwenden vier gleiche Mathematikbücher aus der Bücherei. Während eines Snacks in der Küche baut die kleine Schwester aus den Büchern Türme. Da keine Namen in den Büchern stehen und die Bücher ident sind, greift jeder willkürlich ein Buch.

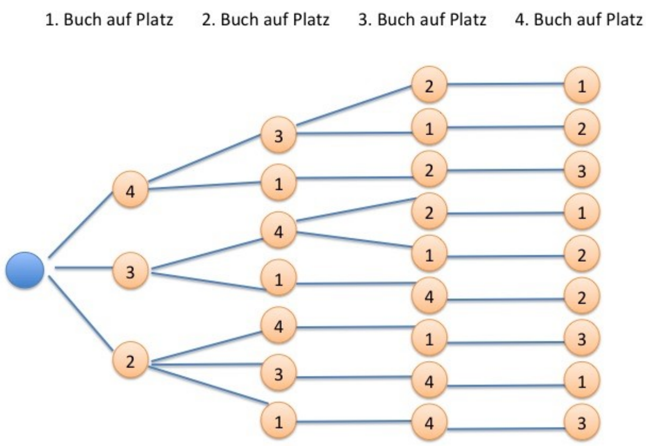
Bei der Rückgabe in der Bibliothek hat jeder der vier ein falsches Buch. Wie wahrscheinlich ist es, dass jeder ein falsches Buch gegriffen hat?

- Löse die Aufgabe durch Simulation.
- Löse die Aufgabe theoretisch.

(Solltest du bei der theoretischen Lösung nicht weiterkommen benütze die Hilfe unten)

Hilfe:

Günstige Fälle:



✂--

Didaktischer Kommentar:

Die Frage „Kann dies Zufall sein?“ ist etwas was im Alltag interessiert, obwohl sie selbstverständlich im Zusammenhang mit obigen Beispielen aus mathematischer Sicht immer mit ja zu beantworten ist. Selbstverständlich ist es möglich, dass beim zufälligen Auswählen der Flugkapitäne (Aufgabe 1) nur Frauen zum Zug kommen, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür sehr gering ist. Trotzdem werden Fragen dieser Art an Statistiker gestellt. Die Schüler sollen an Hand dieser Aufgaben unter anderem lernen, dass die Antworten der Statistiker nur mit einer gewissen „Sicherheitswahrscheinlichkeit“ gelten.

Die Lösungen sind im TNS-File „Zufall_Loesung“ enthalten.

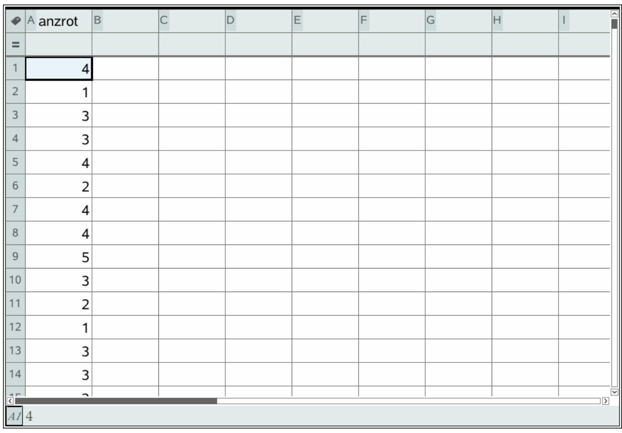
Obige Aufgaben könnten benützt werden als Einstieg in das Kapitel Binomialverteilung, die im Anschluss als ein Beispiel einer diskreten Verteilung herausgegriffen wird und genauer definiert wird. Schließlich können dann die Black Boxes **BinomPdf()** und **BinomCdf()** eingeführt werden, wodurch sich klassische Aufgaben zur Binomialverteilungen reduzieren auf Einsetzen in diese Black Boxes.

Die Aufgaben bieten außerdem die Möglichkeit, Begriffe, die erst später genauer definiert werden, wie etwa Vertrauensintervall, Sicherheitswahrscheinlichkeit,..... im Sinne des Spiralprinzips nach BRUNER vorzubereiten.

Vorschlag zur Umsetzung

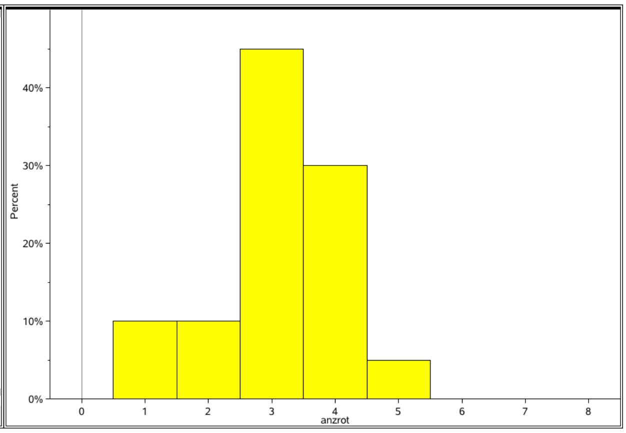
Aufgabe 1 (Piloten)

Simulation 1 (Ziehen von Karten – Ergebnisse für 20 – maliges Ziehen)

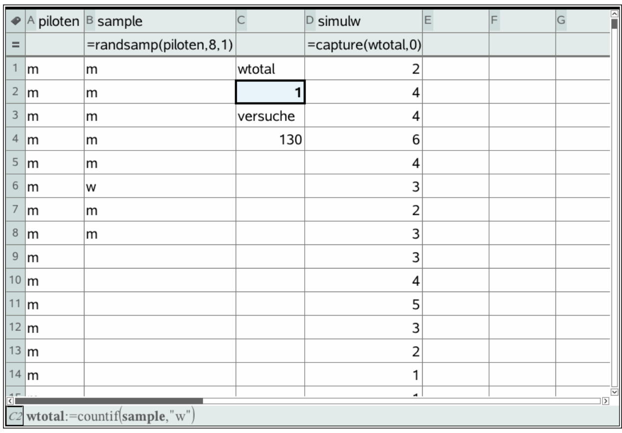


	A anzrot	B	C	D	E	F	G	H	I
=									
1	4								
2	1								
3	3								
4	3								
5	4								
6	2								
7	4								
8	4								
9	5								
10	3								
11	2								
12	1								
13	3								
14	3								

A1 4

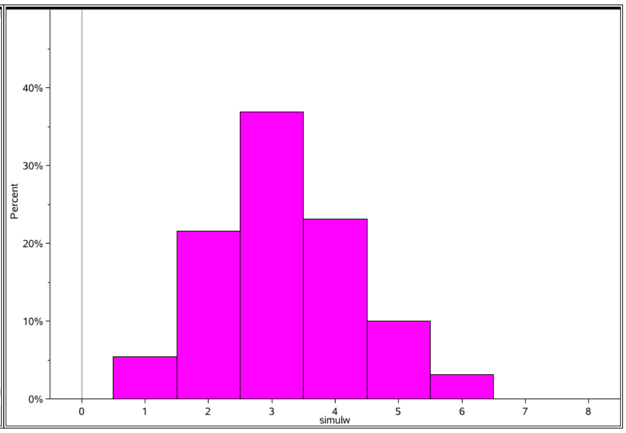


Simulation 2 (Zufallszahlengenerator– Ergebnisse für 130 – Versuche)

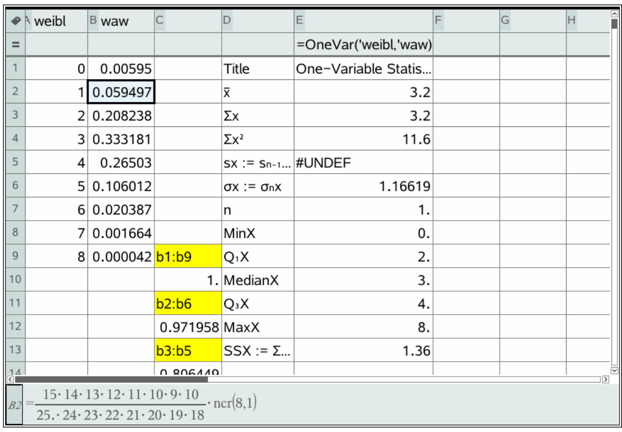


	A piloten	B sample	C	D simulw	E	F	G
=		=randsamp(piloten,8,1)		=capture(wtotal,0)			
1	m	m	wtotal	2			
2	m	m	1	4			
3	m	m	versuche	4			
4	m	m	130	6			
5	m	m		4			
6	m	w		3			
7	m	m		2			
8	m	m		3			
9	m			3			
10	m			4			
11	m			5			
12	m			3			
13	m			2			
14	m			1			

C2 wtotal:=countif(sample,"w")

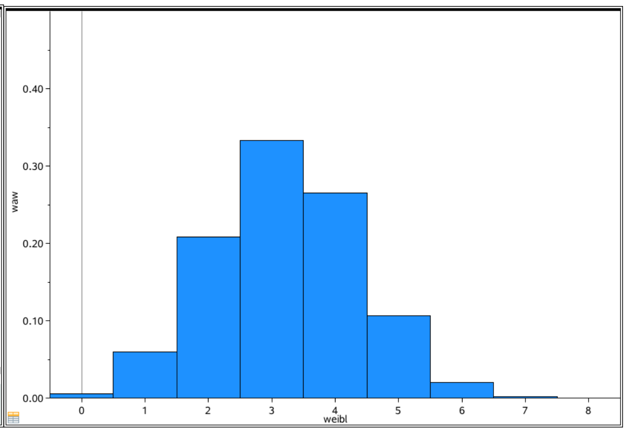


Theorie



	A weibl	B waw	C	D	E	F	G	H
=					=OneVar('weibl,'waw)			
1	0	0.00595		Title	One−Variable Statis...			
2	1	0.059497		x̄	3.2			
3	2	0.208238		Σx	3.2			
4	3	0.333181		Σx²	11.6			
5	4	0.26503		sx := sn-1...	#UNDEF			
6	5	0.106012		σx := σnx	1.16619			
7	6	0.020387		n	1.			
8	7	0.001664		MinX	0.			
9	8	0.000042	b1:b9	Q₁X	2.			
10			1.	MedianX	3.			
11			b2:b6	Q₃X	4.			
12			0.971958	MaxX	8.			
13			b3:b5	SSX := Σ...	1.36			
14			0.806449					

B2 $=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 10}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18}\cdot \mathrm{ncr}(8,1)$

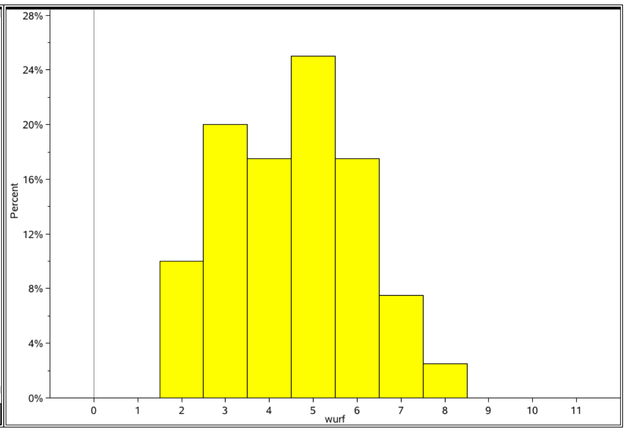


Aufgabe 2 (Mathematikerinnen)

Simulation 1 (Würfeln mit elf 10 – seitigen Würfeln – Ergebnisse für 40 Versuche)

	A wurf	B	C	D	E	F	G	H	I
=									
30	6								
31	5								
32	6								
33	7								
34	5								
35	4								
36	6								
37	5								
38	5								
39	3								
40	6								
41									
42									
43									

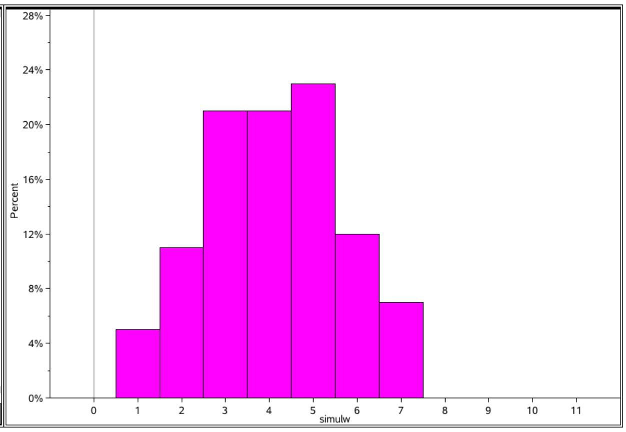
A40 6



Simulation 2 (Zufallszahlengenerator– Ergebnisse für 130 – Versuche)

	A math...	B sample	C	D simulw	E	F	G
=		=randsamp(mathematiker,11)		=capture(wtotal,0)			
1	m	m	wtotal	2			
2	m	w	3	5			
3	m	m	versuche	2			
4	m	w	100	7			
5	m	m		5			
6	m	m		6			
7	w	w		2			
8	w	m		6			
9	w	m		5			
10	w	m		2			
11		m		5			
12				5			
13				4			
14				7			

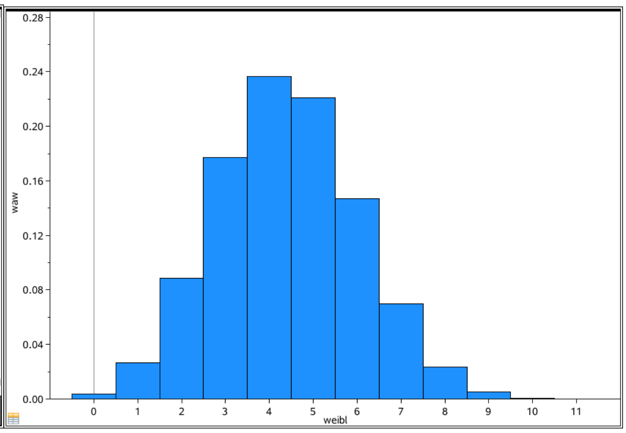
D wtotal:=countif(sample,"w")



Theorie

	A weibl	B waw	C	D	E	F	G	H	I
=					=OneVar('				
1	0	0.003628		Title	One−Va...				
2	1	0.026605		x̄	4.4				
3	2	0.088684		Σx	4.4				
4	3	0.177367		Σx²	22.				
5	4	0.23649		sx :=...	#UNDEF...				
6	5	0.220724		σx :=...	1.62481				
7	6	0.147149		n	1.				
8	7	0.070071		MinX...	0.				
9	8	0.023357	b1:b12	Q_1X	3.				
10	9	0.00519	1.	Med...	4.				
11	10	0.000692	b2:b8	Q_3X	5.				
12	11	0.000042	0.967091	MaxX..	11.				
13			b3:b7	SSX...	2.64				
14			0.870414						

B2 $=(0.4)^{a2}\cdot(0.6)^{11-a2}\cdot \mathrm{ncr}(11,a2)$

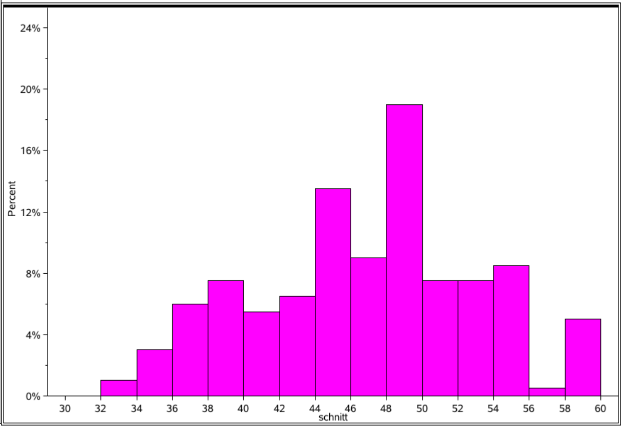


Aufgabe 3 (Altersdiskriminierung)

Simulation (Zufallszahlengenerator– Ergebnisse für 200 – Versuche)

	A arbeiter	B entlassen	C	D schnitt	E	F	G
=		=randsamp(arbeiter,3,1)		=capture('aa,0)			
1	25	25	Alterschn...	47.			
2	33	55	45.3333	39.3333			
3	35	56	Versuche	49.			
4	38		200	42.			
5	48			42.6667			
6	55			55.			
7	55			55.6667			
8	55			51.3333			
9	56			48.3333			
10	64			55.6667			
11				47.6667			
12				52.3333			
13				42.3333			
14				45.			

C2 aa:=mean(entlassen)·1.



Theorie (in der Aufgabe nicht verlangt, aber als Möglichkeit einer Zusatzaufgabe für Interessierte)

Günstige Fälle: (Alterschnitt 58 oder darüber):
Hier kommen nur folgende Möglichkeiten in Frage:

55A,55B,64	55A,55C,64	55B,55C,64
55A,56,64	55B,56,64	55C,56,64

$g:=6. \blacktriangleright 6.$

Mögliche Fälle: $m:=nCr(10,3) \blacktriangleright 120$

Günstige durch mögliche Fälle: $\frac{g}{m} \blacktriangleright 0.05$

Aufgabe 4 (Buchvertauschung)

Simulation (Zufallszahlengenerator– Ergebnisse für 200 – Versuche) / **Theorie:**

	A books	B vertau...	C treffer	D	E anzerfolg	F	G	H	I
=		=randsam			=capture(aa,0)				
1	1	2	0	Treffer:	0	Wahrsch...			
2	2	4	0	0	1	0.366667			
3	3	1	0	Erfolg:	1				
4	4	3	0	1	0				
5				Versuch...	1				
6				150	0				
7					0				
8					1				
9					1				
10					1				
11					1				
12					0				
13					1				
14					0				

C1 =iffn(a1=b1,1,0)

Theorie:

Anzahl der günstigen Fälle: $g:=9. \blacktriangleright 9.$

Anzahl der möglichen Fälle: $m:=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$

$$\frac{\textit{Anzahl der günstigen Fälle}}{\textit{Anzahl der möglichen Fälle}}=\frac{g}{m} \blacktriangleright 0.375$$

Technologiehilfe

mean(liste)
berechnet das arithmetische Mittel der Listenelemente

sum(liste)
berechnet die Summe der Listenelemente

RandSeed Zahl
Damit nicht jeder Rechner in einer Schulklasse dieselben Zufallszahlen erzeugt, muss jeder Rechner eine andere Ausgangsbasis erhalten.

Count(liste)
zählt die Anzahl der Listenelemente

Countif(liste, Kriterien)
zählt die Anzahl der Listenelemente, die die angebenenen Kriterien erfüllen

RandSamp(liste,k,1)
Zieht aus der Liste k Elemente ohne Zurücklegen

RandSamp(liste,k) oder RandSamp(liste,k,0)
Zieht aus der Liste k Elemente mit Zurücklegen

binomPdf(n,p)
gibt die Liste aller n + 1 Werte der Binomialverteilung mit den Parametern n und p zurück.

binomPdf(n,p,k)
gibt den Wert $P(X_{n;p} = k)$ der Binomialverteilung mit den Parametern n und p zurück.

binomCdf(n,p,unterGrenze, obereGrenze)
berechnet die Wahrscheinlichkeit $P(untereGrenze \leq X_{n;p} \leq obereGrenze)$ der Binomialverteilung mit den Parametern n und p.

ifFn(Kriterium,ww,wf)
Wenn das Kriterium mit wahr bewertet wird, wird der Wert ww ausgegeben, sonst wf.

=capture(var,1)
in einer Formelzelle (zweite Kopfzeile) bewirkt, dass in diese Spalte die Werte der Variable var eingetragen werden, sobald sich var verändert (1 steht für automatische Datenerfassung)

=capture(var,0)
in einer Formelzelle (zweite Kopfzeile) bewirkt, dass in diese Spalte die Werte der Variable var eingetragen werden, sobald [ctrl] [.] gedrückt wird (0 steht für händische Datenerfassung)

Summary Plot
Will man in einer Data & Statistics Applikation ein Histogramm zeichnen muss man Summary Plot auswählen. Dies geschieht, indem man mit der „rechten Maustaste" ([ctrl] [menu]) auf die y - Achse klickt und *Add y Summary Plot* auswählt.