Thema: Integralrechnung 1: Einstieg
Grundlagen: Produktsummen, Grenzwert von Produktsummen

Name: Helmut Heugl, Gertrud Aumayr ☒ TI-Nspire™ CAS

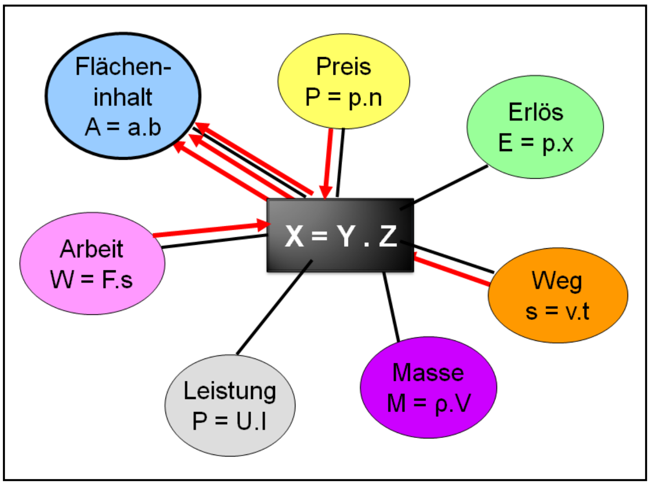
Schlagworte:
Bestimmtes und unbestimmtes Integral, Produktsummen, Grenzwert von Produktsummen, Untersumme, Obersumme, Flächeninhaltsfunktion, Stammfunktion, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Einen Überblick über die **Kompetenzanforderungen im neuen Lehrplan** (Stand August 2017) und im **Grundkompetenzkatalog der Reifeprüfung** findet man im **Anhang**.

Wir lassen uns bei der Definition des Integrals von der Interpretation als „Flächeninhalt" leiten. Haben wir einmal den allgemeinen Integralbegriff gefunden, dann „vergessen" wir diese Interpretation wieder, da das Integral in vielen anderen Zusammenhängen gebraucht wird. [Cigler 1978, S.117]

Didaktischer Kommentar:

Die Bedeutung der Integralrechnung zeigt sich an den vielen Konkretisierungsmöglichkeiten. Eigentlich beginnt die Vorbereitung schon in der ersten Klasse (5. Schulstufe), wenn eine Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks entwickelt wird.



Im Laufe des Lernprozesses bis in die 8. Klasse (12. Schulstufe) findet man immer wieder Probleme in verschiedenen Anwendungsbereichen, für die dasselbe mathematische Modell wie beim Flächeninhalt des Rechtecks passend ist.
Diese Verwandtschaft über das gemeinsame Modell ermöglicht das Lösen von Problemen in verschiedenen Kontexten durch Nutzen der Erkenntnisse über den Flächeninhalt.

Im Laufe der historischen Entwicklung der Mathematik führten zwei unterschiedliche Probleme zum Begriff des Integrals: Die Ermittlung krummlinig begrenzter Flächen und die Umkehrung des Differenzierens. Es ist das Verdienst von Newton und Leibniz, den Zusammenhang zwischen den beiden Zugängen zu erkennen und im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Verknüpfung der beiden Zugänge zu formulieren.

Dementsprechend findet man in Schulbüchern zwei verschiedene Zugänge zur Integralrechnung:

(1) Einstieg mit dem bestimmten Integral, dem Inhalt krummlinig begrenzter Flächen und mit Produktsummen
(2) Einstieg mit dem unbestimmten Integral, mit der Umkehrung des Differenzierens

Diese Unterrichtssequenz entspricht dem Zugang (1)

Einstieg mit dem bestimmten Integral

Phase 1: Einstiegsphase: Näherungsweise Ermittlung von Flächeninhalten, Produktsummen und ihre Grenzwerte

Der Start in der konkreten Einstiegsphase erfolgt mit dem Kontext Flächeninhalt. Inhaltsprobleme werden näherungsweise durch Summen von Rechteckflächen gelöst. Ein möglicher Lösungsansatz ist die Entwicklung und Berechnung von Unter- und Obersummen. Teilt man das Intervall in eine „erträgliche" Anzahl von Teilintervallen, so liefert auch ein numerischer Taschenrechner erste Ergebnisse.

Technologie bietet aber nicht nur die Möglichkeit, die Anzahl der Teilintervalle beliebig zu erhöhen, der Prozess kann auch leicht graphisch dargestellt werden und durch Schieberegler kann man die Anzahl der Teilintervalle experimentell verändern. Der Einfachheit halber erfolgt der Start mit Flächeninhalten unter monoton wachsenden Funktionen, weil dann Unter- und Obersummen einfacher zu definieren sind.

Didaktischer Kommentar:

Da die Visualisierung von Ober- und Untersumme mit dem TI Nspire CAS schwierig zu programmieren ist, wird für diese experimentelle Phase die Verwendung eines fertigen Applets empfohlen *(tns-fies: „I1 A2 Unter-Obersumme 1, 2 und 3*"; Quelle G. Aumayr). Im Notes-Fenster kann man die mittels Produktsummen ermittelten Zahlenwerte verfolgen, im Graphikfenster die Visualisierung.

Aufgabe I1 A1: Unter- und Obersummen bei linearen Funktionen

Gegeben f mit f(x)=0.5*x+2 im Intervall [0;4]

a) Ermittle den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen von f im Intervall [0;4]

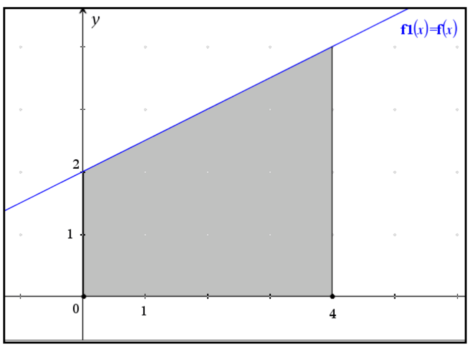
b) Berechne Unter- und Obersumme im Intervall [0;4] für n=4 mit einem numerischen Taschenrechner

c) Nutze im tns-File „*I1 A2 Unter-Obersumme 1*" den Summenoperator und einen Schieberegler für n und erhöhe die Anzahl der Rechtecksstreifen

Mögliche Lösung

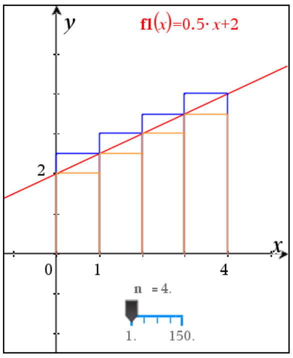
a) Ermittle den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen von f im Intervall [0;4]

$$A=\frac{f(0)+f(4)}{2}\cdot 4=12$$



b) Berechne Unter- und Obersumme im Intervall [0;4] für n=4 mit einem numerischen Taschenrechner.

$usum(4) = f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 = 11$
$osum(4) = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + f(4)\cdot 1 = 13$



c) Nutzen des Summenoperators und eines Schiebereglers für n
tns-File *„I1 A2 Unter-Obersumme 1“*

Schritt 3: $f(x):=0.5\cdot x+2$

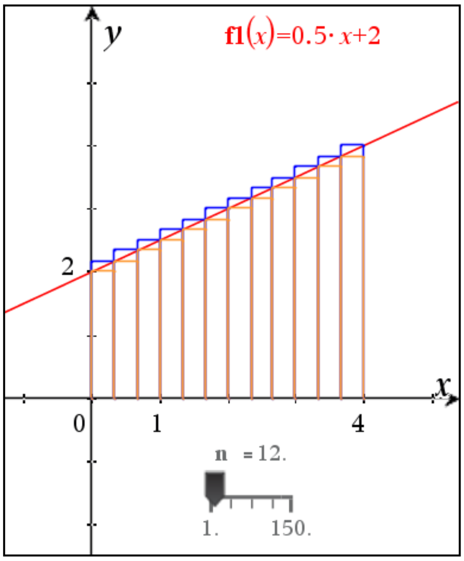
Schieberegler für n: n =12. (1. … 50.)

$$usum(n):=\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(0+i\cdot\frac{4}{n}\right)\cdot\frac{4}{n}\right) \blacktriangleright \textit{Done}$$

$usum(n) \blacktriangleright 11.6667$

$$osum(n):=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(0+i\cdot\frac{4}{n}\right)\cdot\frac{4}{n}\right) \blacktriangleright \textit{Done}$$

$osum(n) \blacktriangleright 12.3333$

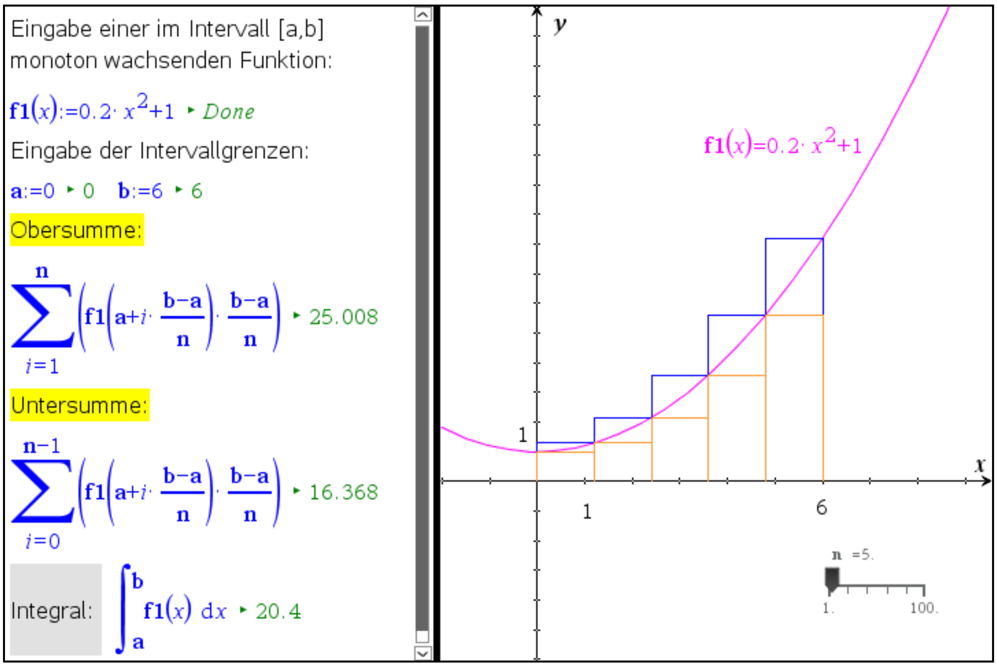


Aufgabe I1 A2: Unter- und Obersummen bei nichtlinearen Funktionen
tns-File „*I1 A2 Unter-Obersumme 2*“

Gegeben ist die Funktion f1 mit $f1(x) = 0.2x^2 + 1$.

Ermittle zuerst Unter- und Obersummen im Intervall [0, 6] für n=6 mit dem numerischen Taschenrechner und danach mit wachsendem n mit dem fertigen Applet mit Hilfe des Schiebereglers. Beschreibe Deine Beobachtungen.

Mögliche Lösung:



Aufgabe I1 A3: Ober- und Untersummen als Produktsummen in Abhängigkeit von n
tns-File „*I1 A3 Unter-Obersumme3*“

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

a) Definiere Ober- und Untersummen als Produktsummen im Intervall [1,5] in Abhängigkeit von n sowie die Differenz von Ober- und Untersumme.
Zeige, dass die Differenzen mit wachsendem n gegen 0 streben und zeige, dass der Grenzwert von Ober- und Untersumme für n ⍰ ⌴ gleich dem bestimmten Integral im entsprechenden Intervall ist.

a) Ermittle im List & Spreadsheet Fenster durch rekursive Definition die Folge der Unter- und Obersummen im Intervall [1, 5] in Abhängigkeit von n und zeichne die Funktionsgraphen der beiden Folgen. Zeige, dass die beiden Folgen für n ⍰ ⌴ gegen das bestimmte Integral streben.

Mögliche Lösung:

a)

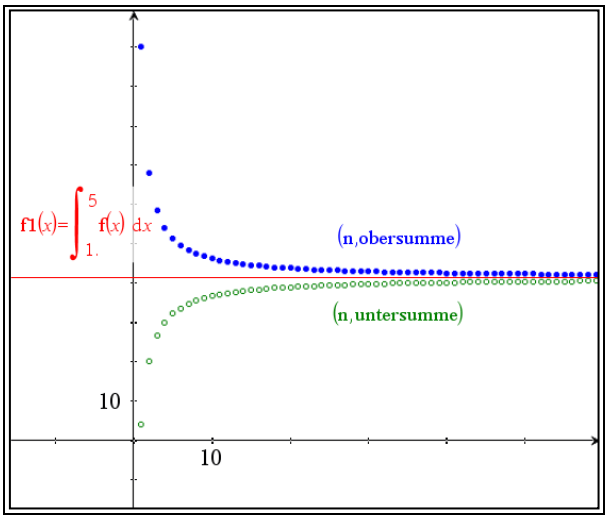
$osum(n):=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right)$	*Done*
$usum(n):=\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right)$	*Done*
$f(x):=x^2$	*Done*
$a:=1$	1
$b:=5$	5
$diff(n):=osum(n)-usum(n)$	*Done*

$diff(7.)$	13.7143
$diff(20.)$	4.8
$diff(100.)$	0.96
$diff(1000.)$	0.096
$diff(10000.)$	0.0096
$\lim_{n\to\infty}(diff(n))$	0
$\lim_{n\to\infty}(osum(n))$	$\frac{124}{3}$
$\int_1^5 f(x)\,dx$	$\frac{124}{3}$

b)

	A n	B obersumme	C untersumme
=			
1	1.	100.	4.
2	2.	68.	20.
3	3.	58.5185	26.5185
4	4.	54.	30.
5	5.	51.36	32.16
6	6.	49.6296	33.6296
7	7.	48.4082	34.6939
8	8.	47.5	35.5
9	9.	46.7984	36.1317
10	10.	46.24	36.64

B1 =osum(a1)



Ergebnis der Phase 1: Ist f eine stetige Funktion im Intervall D mit $f(x)\geq 0$, so streben die Produktsummen der Ober- und Untersumme gegen einen gemeinsamen Grenzwert, den wir **bestimmtes Integral** nennen.

Phase 2: Stammfunktion – das unbestimmte Integral

Grundlagen:

Definition:

Gegeben sei eine Funktion f: y = f(x) auf einem Definitionsintervall D. Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** der Funktion f, wenn F'(x) = f(x) für alle $x \in D$ ist. Das Aufsuchen der Stammfunktion heißt „Integrieren".

Satz:

Mit jeder Stammfunktion F(x) einer gegebenen Funktion f(x) ist auch jede Funktion F(x)+c (mit $c \in \mathbb{R}$) Stammfunktion von f.

Definition:

Gegeben sei eine Funktion f: y = f(x). Wenn F(x) eine Stammfunktion von f(x) ist, so bezeichnet man die Menge aller Stammfunktionen F(x) + c (mit $c \in \mathbb{R}$) als **unbestimmtes Integral** der Funktion f.

Definition:

Gegeben sei eine Funktion f: y = f(x) Gesucht sind Stammfunktionen F mit F'(x) = f(x). Wird in vielen Punkten (x/y) des Koordinatensystems der Wert f(x) als Steigung eingezeichnet, so spricht man von einem **Richtungsfeld**.

Didaktischer Kommentar:

Das CAS-Werkzeug kann genutzt werden, um die Integrationsregeln für die wichtigsten Funktionsarten zu entdecken. Bei Anwendungsproblemen wird dann das Integrieren komplexer Funktionen auf das CAS-Werkzeug als Black Box ausgelagert (z.B.: Substitutionsregel, partielle Integration, usw.).

In dieser experimentellen Phase der Begriffsbildung können vom Werkzeug auch Richtungsfelder und durch Eingabe einer Anfangsbedingung die Graphen bestimmter Stammfunktionen gezeichnet werden.

Aufgabe I1 A4: Graphen von Stammfunktionen

tns File „I1 A4 Graph von Stammfunktionen"

a) Gegeben ist die Ableitungsfunktion der Funktion F durch die Gleichung f1(x) = 2·x - 2.

Man kennt also an jeder Stelle x die Steigung der Funktion F, nämlich f1(x).

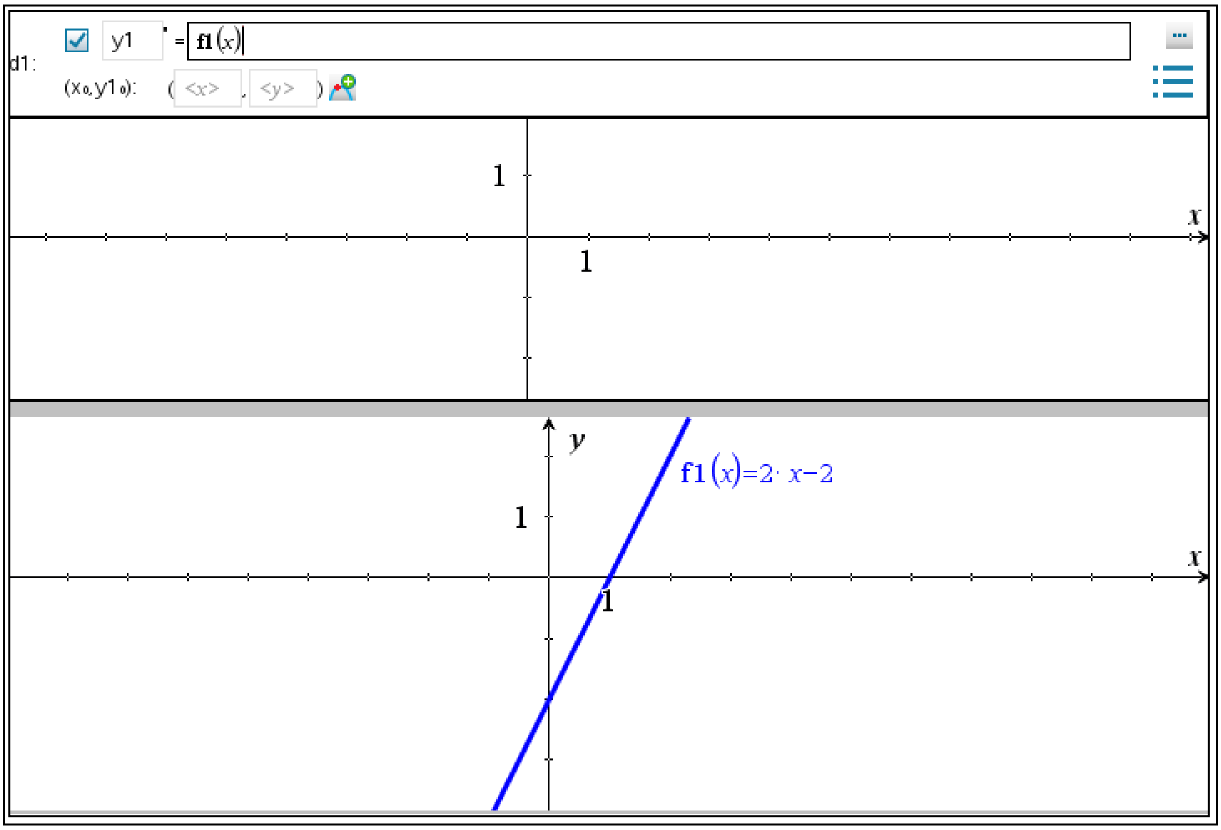
- Ändere im oberen Graphikfenster den Grapheingabemodus ("Graph entry") auf "Diff Eq".
- Gib in der Eingabezeile die Ableitungsfunktion f1(x) direkt ein.
- Erkläre das entstehende Bild.

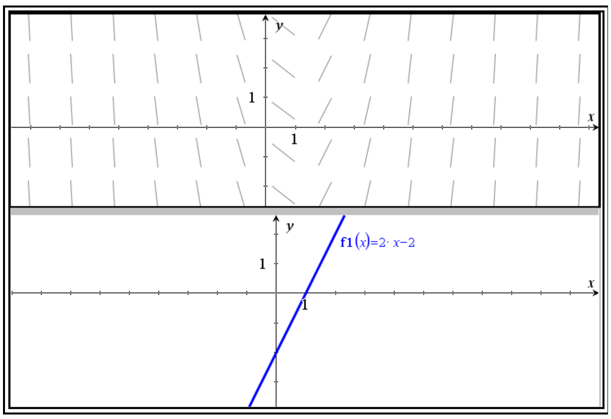
In der Eingabezeile im Graphikfenster kann im Modus DiffEq auch ein Anfangswert eingegeben werden.

- Gib (0/0) als Anfangswerte ein.
- Ändere diesen durch Ziehen am entsprechenden Punkt des Graphen.
- Stelle eine Vermutung auf, wie viele dieser "Stammfunktionen" es gibt und begründe deine Vermutung. Wodurch unterscheiden sich die Stammfunktionen?
- Stelle eine Vermutung zur Gleichung der Stammfunktion F auf.

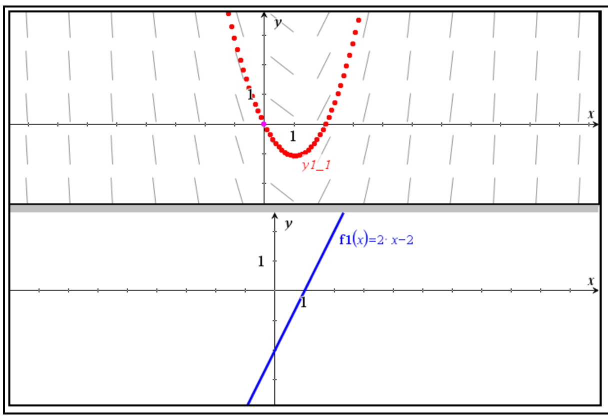
Wiederhole diese Aktionen auch bei den folgenden Aufgaben (Problem 2 bis Problem 5)

Mögliche Lösung:





Es wird ein Richtungsfeld mit Steigung f1(x) gezeichnet.



Für den Startwert (0/0) wird eine ganz bestimmte Stammfunktion gezeichnet.

b) Ermittle das Richtungsfeld und für einen Startwert eine ganz bestimmte Stammfunktion für folgende Ableitungsfunktionen:

$f1(x) = 2$

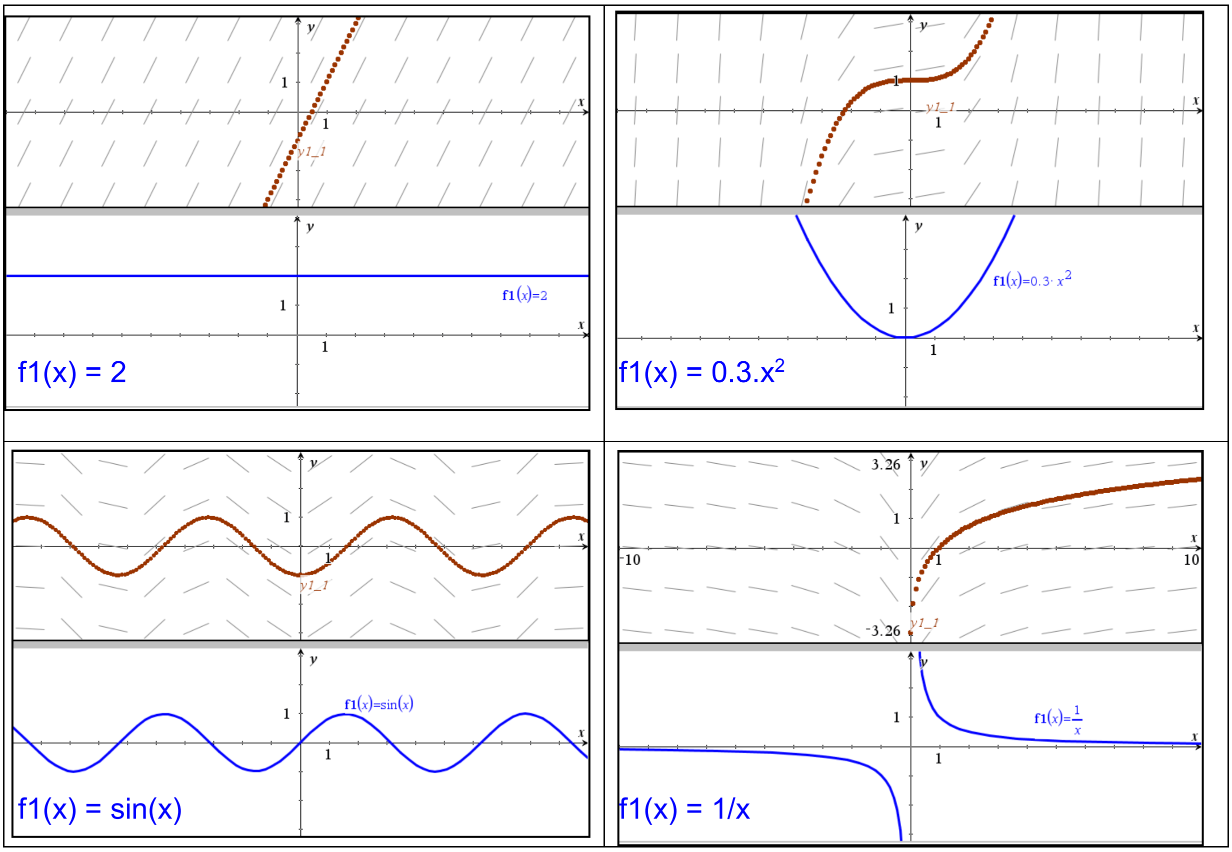
$f1(x) = 0.3 \cdot x^2$

$f1(x) = \sin(x)$

$f1(x) = \dfrac{1}{x}$

Stelle Vermutungen bezüglich der Gleichungen der Stammfunktionen auf und überprüfe die Vermutung durch Differenzieren.

Mögliche Lösung:



Phase 3: Auf dem Weg zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Didaktischer Kommentar:

In dieser Phase geht es darum, die beiden Wege – Produktsumme und ihr Grenzwert, das bestimmte Integral, sowie Stammfunktion und unbestimmtes Integral – zusammen zu führen. Das leistet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Die Ergebnisse der experimentellen Phase 1 liefern die Grundlage für die Phase 3:

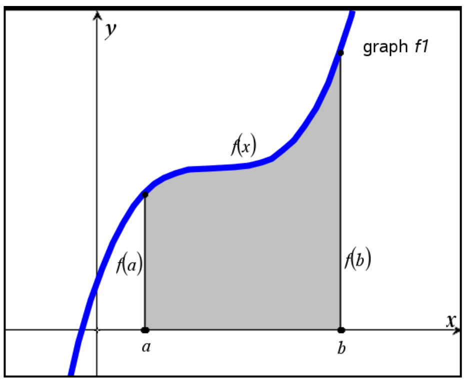
Grundlagen:

Definition:

Ist f eine stetige Funktion auf einem Intervall [a; b] mit $f(x) \geq 0$, dann ist die in nebenstehender Abbildung grau markierte Fläche das bestimmte Integral in den Grenzen a und b:

$$\int_a^b f(x)dx$$

a,b sind die Integrationsgrenzen, f der Integrand



Definition:

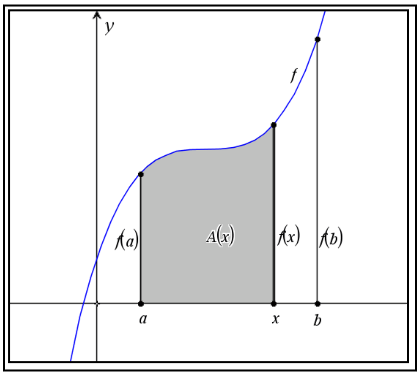
Ist f eine stetige Funktion auf einem Intervall [a; b] dann ist das bestimmte Integral von f in den Grenzen von a bis b definiert durch:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

Dabei ist x_i ein beliebiger Wert im i-ten Intervall, $f(x_i)$ ist also die Höhe des i-ten Rechtecks, seine Breite beträgt $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Definition:

Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall [a; b] mit $f(x)\geq 0$ .Gesucht ist der Flächeninhalt A zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.



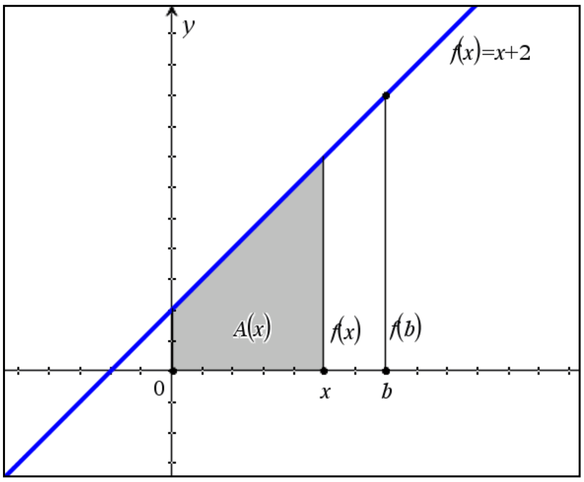
Wenn die rechte Grenze – hier mit x bezeichnet – variiert, so ist der grau unterlegte Flächeninhalt A(x) eine Funktion der Variablen x. Diese Funktion A heißt **Flächeninhaltsfunktion** der gegebenen Funktion f (bei fester linker Grenze a)

Aufgabe I1 A5: Flächeninhaltsfunktion einer linearen Funktion

Gegeben f: f(x) = x + 2 mit linker Grenze x = 0

Gesucht: Flächeninhaltsfunktion A(x) der Funktion f(x)

Mögliche Lösung:



A(x) erhält man mit der Flächenformel des Trapezes:

$$A(x) = \frac{f(0)+f(x)}{2}\cdot x = \frac{2+x+2}{2}\cdot x = \frac{x^2}{2} + 4\cdot x$$

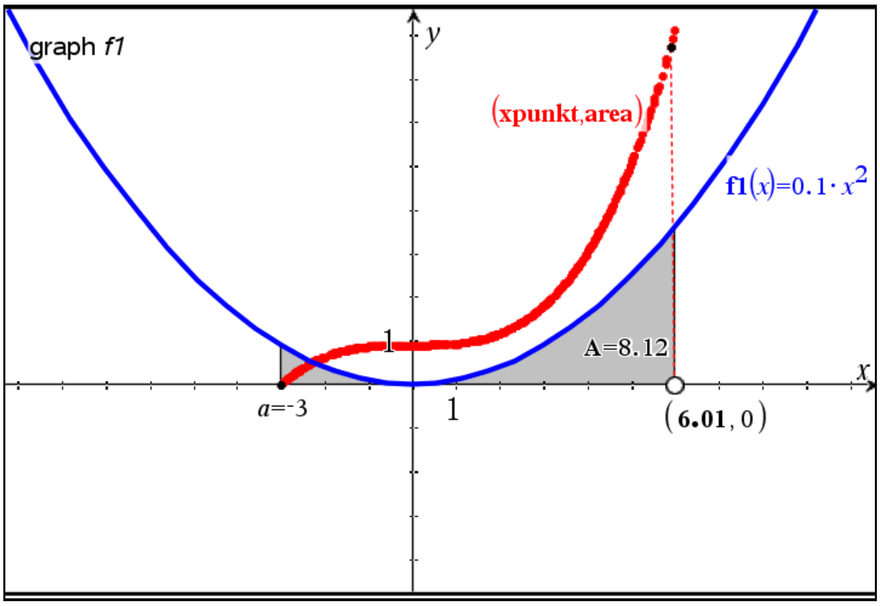
Hier zeigt sich schon die Vermutung, dass A(x) eine Stammfunktion von f(x) ist.

Aufgabe I1 A6: Experimentelle Ermittlung von Graphen der Flächeninhaltsfunktion
tns-File *„I1 A6 Flächeninhaltsfunktion“*

Gegeben ist die Funktion f1: $f1(x) = 0.1\cdot x^2$
Ermittle die Spur der Flächeninhaltsfunktion A mit fester unterer Grenze a = -3 und variabler oberer Grenze x. Nutze dazu das fertige Applet. Ziehe den Punkt x von a = -3 nach rechts. Dann erscheint grau die Fläche zwischen Graph und x-Achse und es wird jeder Stelle x der

Wert der Flächeninhaltsfunktion zugeordnet. Dadurch entsteht die Spur der Flächeninhaltsfunktion.

Mögliche Lösung:



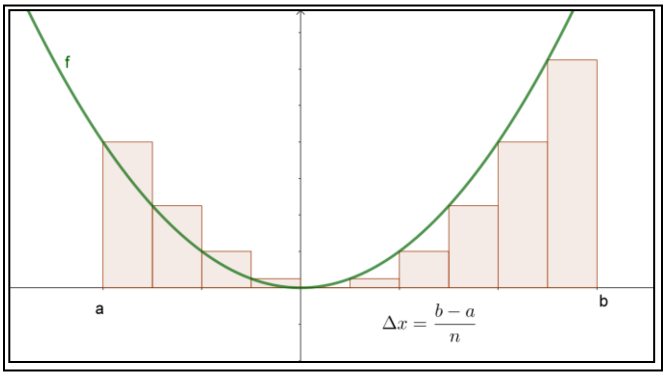
Vermutung:
Die Flächeninhaltsfunktion A ist Stammfunktion der Funktion f1.

Aufgabe I1 A7: Exakte Berechnung des bestimmten Integrals als Grenzwert der Produktsumme mit Hilfe von CAS.
tns-File „*I1 A7 Grenzwert der Produktsumme*“

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^2$.

Berechne das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ mit Hilfe der Definition des Integrals als Grenzwert von Produktsummen und verwende die Funktionswerte am linken Rand der Rechteckstreifen.

Mögliche Lösung:



Schritt 1: f(x), x(i) und f(x(i)) definieren

Schritt 2: Produktsumme definieren

Schritt 3: Grenzwert der Produktsumme ermitteln

Schritt 4: Ergebnis umformen

$$f(x):=x^2 \quad \text{Done}$$

$$x(i):=a+\frac{b-a}{n}\cdot i \quad \text{Done}$$

$$f(x(i)) \quad \frac{(a\cdot(i-n)-b\cdot i)^2}{n^2}$$

$$produktsumme(n):=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\cdot f(x(i))\right) \quad \text{Done}$$

$$produktsumme(n) \quad \frac{-(a-b)\cdot\left(a^2\cdot\left(2\cdot n^2+3\cdot n+1\right)+2\cdot a\cdot b\cdot\left(n^2-1\right)+b^2\cdot\left(2\cdot n^2-3\cdot n+1\right)\right)}{6\cdot n^2}$$

Betrachtet man den komplexen Term der Produktsumme, so erkennt man, dass eine Ermittlung der Produktsumme und ihres Grenzwerts ohne CAS kaum möglich ist.

$$\lim_{n\to\infty}(produktsumme(n)) \quad \frac{-(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3}$$

$$\text{expand}\left(\frac{-(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3}\right) \quad \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

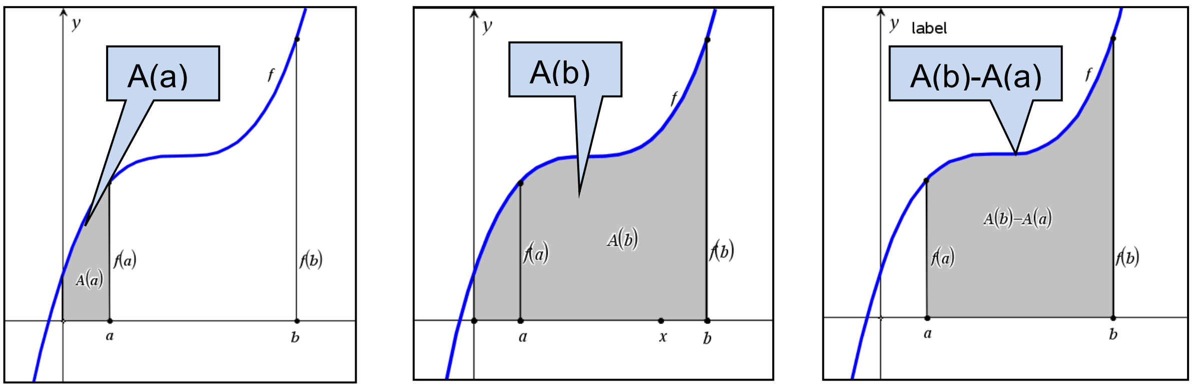
Bildet man den Grenzwert der Produktsumme mit dem CAS-Werkzeug, so zeigt sich, dass das Ergebnis nicht immer die erwartete Termstruktur hat. Es ist algebraische Strukturerkennungskompetenz erforderlich, um über die geeigneten Termumformungen zu entscheiden.

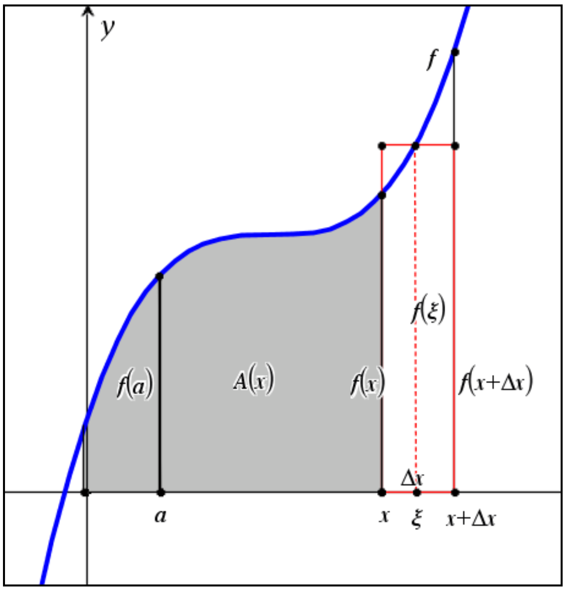
Didaktischer Kommentar:

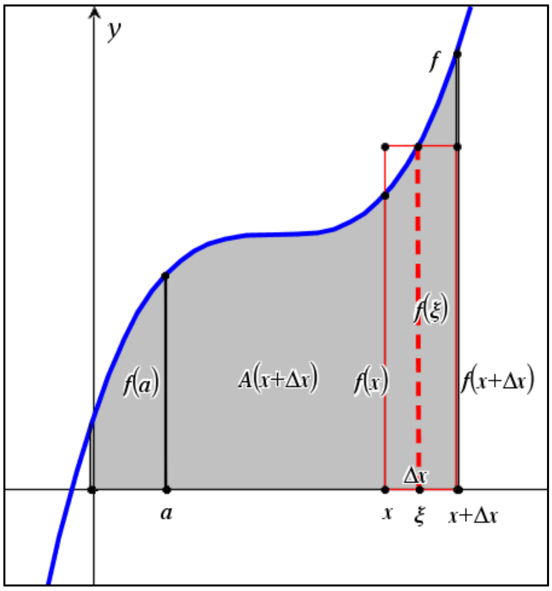
Hier zeigt sich deutlich, wie Technologie Kognition verändert. Anstatt komplexe Operationen auszuführen, können sich die Lernenden auf das Planen des gestellten Problems konzentrieren. Durch Definitionen von Variablen wird der Wortschatz der mathematischen Sprache verändert und man operiert dann nicht mit den komplexen Termen, sondern mit ihren Namen. Es wird der sprachlich formulierte Plan direkt in mathematische Befehle umgesetzt.

Ein anschaulicher Beweis für den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

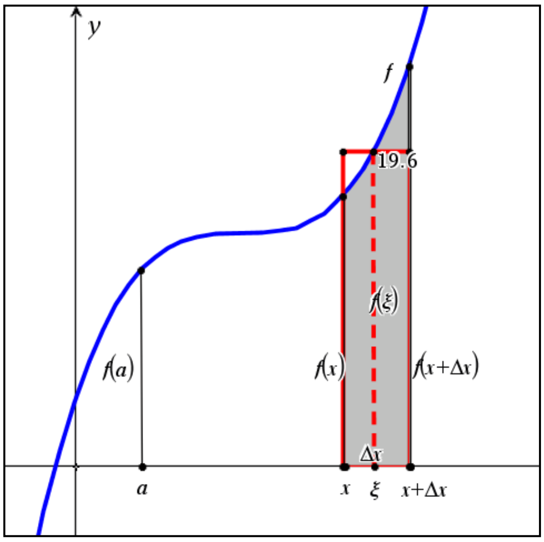
Gegeben sei eine stetige Funktion f mit $f(x)\geq 0$ für alle $x\in D$. Wählt man als feste untere Grenze x=0, so beschreibt die Flächeninhaltsfunktion A den Flächeninhalt der grau unterlegten Flächen.







Gehen wir von x um ein kleines Stück Δx nach rechts, so berechnet sich die Fläche des hinzugekommenen kleinen Streifens durch $A(x+\Delta x)-A(x)$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit lässt sich eine Stelle ξ im Intervall $[x, x+\Delta x]$ finden, so dass das Rechteck mit den Seiten Δx und $f(\xi)$ flächengleich dem schmalen grauen Streifen in der Abbildung unten ist.



$$A(x+\Delta x)-A(x)=f(\xi)\cdot\Delta x$$

$$\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}=f(\xi)$$

Bilden wir nun den Grenzwert für $\Delta x \to 0$, so erhalten wir (wegen der Stetigkeit von f):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)$$

$$A'(x)=f(x)$$

Ergebnis: Die „Flächeninhaltsfunktion" A der Funktion f ist eine Stammfunktion der gegebenen Funktion f.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Voraussetzung aus den bisherigen Phasen: Ist f stetig auf einem Intervall [a; b], dann existiert das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ (als Grenzwert von Produktsummen)

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Ausblick auf weitere Phasen:

In dieser Unterrichtssequenz soll nur der erste Teil des Begriffsbildungsprozesses behandelt werden. Die weiteren Schritte (z.B. Integrationsregeln, Flächeninhalte unter Funktionen auch mit negativen Funktionswerten, Volumsberechnungen, usw.) findet man in allen Schulbüchern.

Wichtig ist, dass man sich in einer exaktifizierenden Phase vom Inhaltsbegriff löst (siehe Zitat von Cigler als Einleitung der Unterrichtssequenz) und die abstrakte Deutung des bestimmten Integrals als Grenzwert von Produktsummen als Grundlage für die Anwendungsphase der Integralrechnung nimmt. Erst dadurch eröffnen sich die vielen Anwendungsmöglichkeiten über Inhaltsprobleme hinaus (siehe Bild in der Einleitung der Unterrichtssequenz).

Anhang

Ein Blick in den Lehrplan: Im Lehrplanentwurf für die modulare Oberstufe findet man ähnliche Kompetenzanforderungen wie im derzeit gültigen Lehrplan:

Lehrplanentwurf Mathematik Oberstufe AHS

Kompetenzorientierung und Semestrierung. (Stand August 2017)
12. Schulstufe, 7. Semester

Grundlagen der Integralrechnung	Das bestimmte Integral kennen und als Zahl „zwischen“ allen Ober- und Untersummen sowie näherungsweise als Summe von Produkten auffassen und berechnen können: $\int_a^b f(x)dx = \sum_i f(x_i)\Delta x$ Größen durch Integrale ausdrücken können, insbesondere als Verallgemeinerungen von Formeln mit Produkten (z. B. für Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege)	▪ Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können (AN-R 4.1) ▪ Bestimmte Integrale näherungsweise mittels Ober-, Unter- oder Zwischensummen berechnen können
	Den Begriff Stammfunktion kennen und anwenden können Bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln berechnen können	▪ Den Begriff Stammfunktion kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können (AN-R 3.1) ▪ Den Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktion in deren graphischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können (AN-R 3.2)

Grundkompetenzliste der Reifeprüfung

Hier findet man sogar eine ausführlichere Interpretation der Kompetenzanforderungen des Lehrplans:

Inhaltsbereich *Analysis* (AN)

AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion

AN-R 3.1	Den Begriff *Ableitungsfunktion/Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können.
AN-R 3.2	Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren graphischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können.

AN 4 Summation und Integral

AN-R 4.1	Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können

BHS

Kompetenzkatalog Teil A - Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern
Analysis

4.5	den Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Ableitungsfunktion bzw. einer Stammfunktion interpretieren und erklären; bei gegebenem Graphen einer Funktion den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion skizzieren
4.7	das bestimmte Integral auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes als Grenzwert einer Produktsumme interpretieren und damit argumentieren