Wenn Descartes einen TI-Nspire gehabt hätte …

René Descartes[1] war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Naturforscher. Er wurde am 31. März 1596 geboren und verstarb am 11. Februar 1650. Sein 426. Geburtstag am 31. März ist Anlass, an ihn zu erinnern. Wir wollen hier exemplarisch beschreiben, wie seine Überlegungen zur analytischen Geometrie aus heutiger Sicht mithilfe dynamischer Geometriesoftware und Computeralgebra umgesetzt werden könnten. Zunächst zitieren wir aus einem biographischem Beitrag im Schülerlexikon von „Lernhelfer“[2]:

„DESCARTES Beitrag zur Entwicklung der analytischen Geometrie

Die bedeutendste Leistung, die DESCARTES – zeitgleich mit PIERRE DE FERMAT, aber unabhängig von ihm und noch weiter entwickelt – vollbracht hat, besteht in der Schaffung der analytischen Geometrie, im Anhang des „Discours“ veröffentlicht. Er schuf darin die beiden wesentlichen Grundlagen für dieses Gebiet:

1. In der Ebene werden ein Koordinatensystem und eine Einheitsstrecke festgelegt. Seine üblichste Form, bei der die Achsen gleich geteilt sind und zueinander senkrecht verlaufen, heißt nach ihm kartesisches Koordinatensystem. Auf diese Weise ließ sich nun jeder Punkt der Ebene durch ein Zahlenpaar (x; y) beschreiben.
2. Während man in der Antike unter Termen in der zweiten Potenz grundsätzlich Flächen und unter solchen in dritter Potenz entsprechend Körper verstand und deshalb auch vor der vierten Potenz zurückschreckte, werden jetzt unabhängig von der Dimension alle Terme als Zahlen begriffen und damit das bis dahin herrschende „Homogenitätsprinzip“ gebrochen. Bei und seit DESCARTES werden geometrische Kurven durch Gleichungen charakterisiert. Umgekehrt ergeben alle Zahlenpaare, die eine Gleichung erfüllen, jeweils einen Punkt und in ihrer Gesamtheit ein geometrisches Gebilde. Aus der Gleichung $y = x^2$ erhält man eine Parabel und eine (bestimmte) Hyperbel wird durch die Gleichung $y = \frac{1}{x}$ beschrieben.

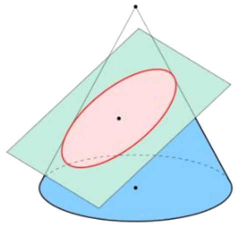
Kurz gesagt: Punktmengen und Gleichungen entsprechen einander. Die Geometrie wird mit der Algebra verbunden. Damit wurde es möglich, geometrische Probleme rechnerisch zu lösen. […]
Zugleich damit fand DESCARTES eine Reihe von Vereinfachungen in der formalen Darstellung der Zusammenhänge. So geht es auf ihn zurück, wenn wir heute unbekannte Größen mit den Buchstaben x, y und z bezeichnen und für bekannte (also Parameter) die Buchstaben a, b, c usw. benutzen.
Er führte die Potenzschreibweise ein, ersetzte z.B. das bis dahin übliche „aa“ durch a^2 und schrieb ferner x^3, y^5 usw. Auch führte er den Querstrich über dem Radikanden ein, um auf diese Weise $\sqrt{4} \cdot 3$ und $\sqrt{4 \cdot 3}$ zu unterscheiden, von ihm stammen Begriffe wie Grad der Gleichung und Koeffizient. DESCARTES schuf gleichsam die Normalform von Gleichungen, bei der auf der rechten Seite stets 0 steht. […] Das ermöglichte beim Lösen von Gleichungen ein einheitliches Vorgehen unabhängig von der Verteilung der Rechenzeichen.“

---

[1] Bild: https://www.biologie-schule.de/img/descartes-biografie.gif
[2] Quelle: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/geschichte/artikel/rene-descartes

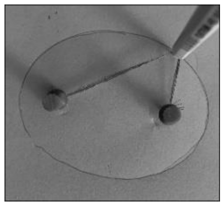
Ellipsen

Wir demonstrieren am Beispiel der Ellipsen, wie sich ein zunächst rein geometrisches Problem durch die Einführung eines Koordinatensystems analytisch beschreiben lässt.
Ellipsen waren bereits in der Antike bekannt. Descartes hat Kenntnisse über solche Kurven sogar weiterentwickelt, z. B. durch die Betrachtung von kartesischen Ovalen, auf die wir in diesem Beitrag später noch eingehen werden.



Ellipsen als rein geometrisches Phänomen tauchen z. B. als Schnittfiguren von Zylindern oder Kegeln[3] oder als Planetenbahnen auf.

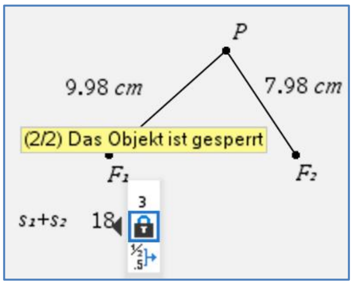
Auch die Gärtnerkonstruktion erzeugt Ellipsen als Bahnkurven, ohne dass dazu eine Gleichung erforderlich wäre.
Zwei Nadeln werden in ein Blatt Papier gesteckt, das auf einer Korkunterlage liegt. Die beiden Nadeln werden mit einer Schnur verbunden, die länger ist als der Abstand der beiden Nadeln. Mit einem Bleistift wird die Schnur straff gespannt. Wird dieser Bleistift auf dem Papier bewegt, so zeichnet er eine Ellipse auf.



Aus dieser Gärtnerkonstruktion lässt sich leicht die **Abstandsdefinition der Ellipse** herleiten:

> Es seien F_1 und F_2 zwei Punkte der Ebene. Die Menge aller Punkte P, für die die Summe der Abstände zu F_1 und F_2 konstant ist, wird als Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 bezeichnet.

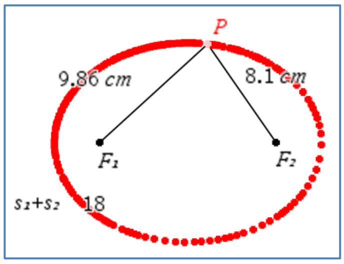
Auf der Grundlage der Definition lässt sich auch mit der dynamischen Geometriesoftware des TI-Nspire eine Ellipse konstruieren. Wir geben dazu eine Anleitung:



Öffnen Sie die Anwendung *Geometry*.
Zeichnen Sie zwei Strecken $s_1 = \overline{F_1P}$ und $s_2 = \overline{F_2P}$ mit einem gemeinsamen Endpunkt P (*Punkte&Geraden – Strecke*).

Messen Sie die Längen dieser Seiten (*Messung-Länge).*

Geben Sie den Text $s_1 + s_2$ ein *(Aktionen-Text).*



Klicken Sie auf diese Formel und wählen Sie *Aktionen-Berechnen.* Klicken Sie dann auf die Längenmaßzahl von s_1 und danach auf die Längenmaßzahl von s_2 Der Rechner zeigt die Summe $s_1 + s_2$. an. Durch Bewegen von P im Zugmodus können Sie die Summe auf einen gewünschten Betrag einstellen.

Klicken Sie auf die gewählte angezeigte Maßzahl der Summe und wählen Sie unter *Attribute* die Anweisung: *„Das Objekt ist gesperrt.“*

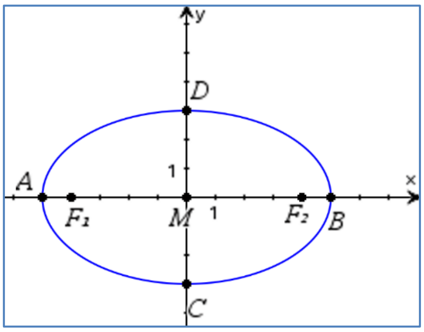
Wählen Sie unter *Spur* die Anweisung „Geometriespur“. Greifen Sie den Punkt P und erzeugen Sie seine Geometriespur.

[3] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5f/Ellipse-conic.svg/300px-Ellipse-conic.svg.png

Hubert Langlotz
Wilfried Zappe

Um nun eine analytische Beschreibung dieser Figur zu finden, werden weitere Bezeichnungen und ein Koordinatensystem eingeführt.

weitere Bezeichnungen:



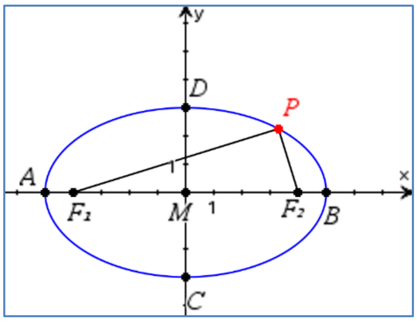
A und B: Hauptscheitel

C und D: Nebenscheitel

M: Mittelpunkt

$\overline{AB} = 2a$: Hauptachse (die größere der beiden Achsen)

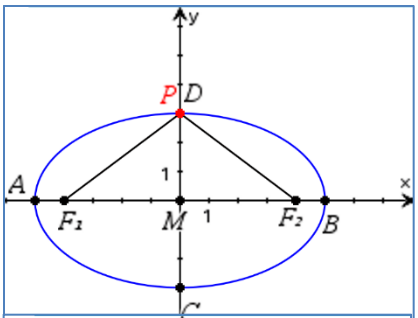
$\overline{CD} = 2b$: Nebenachse



$\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e$: lineare Exzentrizität

Aus der Ortsdefinition der Ellipse folgt sofort

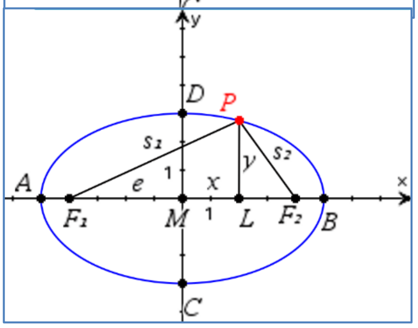
$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = konstant.$



Wenn nun der Punkt P in einem der Hauptscheitel A oder B liegt, dann ist $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}|$ genauso groß wie 2a, also gilt mit der Ortsdefinition $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$.

Wenn P in einem der Nebenscheitelpunkte C oder D liegt, dann gilt z. B. im rechtwinkligen Dreieck MF_1D mit dem Satz des Pythagoras: $|\overline{MF_2}|^2 = |\overline{DF_2}|^2 - |\overline{MP}|^2$
$|\overline{MF_2}| = e$, $|\overline{MP}| = b$, $|\overline{DF_2}| = a$

Letzteres wegen $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$ und $|\overline{DF_1}| = |\overline{DF_2}|$.



Daraus ergibt sich also $e^2 = a^2 - b^2$.

Das Dreieck ΔF_1F_2P wird durch die Höhe $\overline{LP}$ in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Auf jedes dieser Teildreiecke kann der Satz des Pythagoras angewendet werden:

$$s_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2} \text{ und } s_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

Nach Definition ist die Summe $s_1 + s_2 = 2a$.

Einsetzen und zweimaliges Quadrieren ergibt unter Berücksichtigung von $e^2 = a^2 - b^2$ nach geschickter (und geduldiger) Umformung die Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Nachweis:

$(s_1)^2 = (2a - s_2)^2$

$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$

$4ex - 4a^2 = -4a \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$ | (- 4)

$a^2 - ex = a \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$ | quadrieren

$a^4 - 2a^2ex + e^2x^2 = a^2e^2 - 2a^2ex + a^2x^2 + a^2y^2$ | + $2a^2ex$

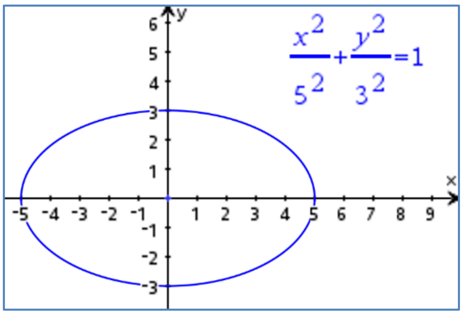
$a^4 + e^2x^2 = a^2e^2 + a^2x^2 + a^2y^2$ | einsetzen von $e^2 = a^2 - b^2$

$a^4 + a^2x^2 - b^2x^2 = a^4 - a^2b^2 + a^2x^2 + a^2y^2$ | - a^2x^2 und - a^4

$-b^2x^2 = -a^2b^2 + a^2y^2$ | - a^2y^2 und :$(-a^2b^2)$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Die Ellipse, die sich bisher geometrisch als Schnittfigur oder durch die Gärtnerkonstruktion ergab, kann nun auch als Punktmenge P(x; y) mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ erzeugt werden.
Wird z. B. unter *Graphs* die Eingabe *Relation* gewählt und dort die Gleichung $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ eingegeben, so wird die zugehörige Ellipse gezeichnet.



Es gibt sogar unter dem Menüpunkt Graph-Eingabe/Bearbeitung – Vorlagen Gleichungssystem ein spezielles Untermenü zur Eingabe von Gleichungen verschiedener Kegelschnitte.

Solche technischen Möglichkeiten standen Descartes nicht zur Verfügung. Umso bewundernswerter sind seine Überlegungen, die – wie schon erwähnt - über die Ellipse hinausgingen und beispielsweise zu eilinienförmigen Kurven führten. Darauf wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

Kartesische Ovale

Angeregt durch die Beschäftigung mit Problemen in der Optik untersuchte Descartes im Jahre 1637 erstmals kartesische Ovale. Zu solchen Kurven kommt man z. B. durch eine sehr einfach erscheinende Abwandlung der Ortsdefinition des Ellipse:

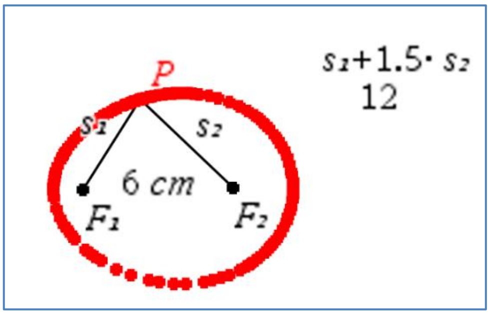
Es seien F_1 und F_2 zwei Punkte der Ebene mit dem Abstand c. Es sei s_1 der Abstand von F_1 zu einem dritten Punkt P der Ebene und s_2 der Abstand von F_2 zum selben Punkt P. Die Menge aller Punkte P, für die die Summe $s_1 + m \cdot s_2 = a$ konstant ist, wird als kartesisches Oval mit den Brennpunkten F_1 und F_2 bezeichnet $(m, a \in R)$.

Beispiel: c = 6 cm, m = 1,5 und a = 12 cm, also $s_1 + 1.5 \cdot s_2 = 12\ cm$
Die Konstruktion der Geometriespur erfolgt analog zur Gärtnerkonstruktion bei der Ellipse.

Öffnen Sie die Anwendung *Geometry*.

Zeichnen Sie die beiden Punkte F_1 und F_2 mit einem Abstand von 6 cm. (*Punkte&Geraden - Punkt* und Messung – Länge).

Zeichnen Sie zwei Strecken $s_1 = \overline{F_1P}$ und $s_2 = \overline{F_2P}$ mit einem gemeinsamen Endpunkt P (*Punkte&Geraden – Strecke)*.



Messen Sie die Längen dieser Seiten (*Messung-Länge).*

Geben Sie den Text $s_1 + 1.5 \cdot s_2$ ein *(Aktionen-Text).*

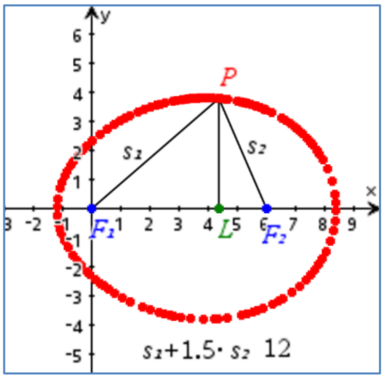
Klicken Sie auf diese Formel und wählen Sie *Aktionen-Berechnen.* Klicken Sie dann auf die Längenmaßzahl von s_1 und danach auf die Längenmaßzahl von s_2. Der Rechner zeigt die Summe $s_1 + 1.5 \cdot s_2$. an. Durch Bewegen von P im Zugmodus können Sie die Summe auf einen gewünschten Betrag, z. B. 12 einstellen.

Klicken Sie auf die gewählte angezeigte Maßzahl der Summe und wählen Sie unter *Attribute* die Anweisung: *„Das Objekt ist gesperrt."*

Wählen Sie unter *Spur* die Anweisung „Geometriespur". Greifen Sie den Punkt P und erzeugen Sie seine Geometriespur.

Hinweis: Wegen der besseren Übersichtlichkeit wurden die Messwerte für s_1 und s_2 nachträglich ausgeblendet.

Um eine analytische Beschreibung dieser Figur zu finden, wird ein Koordinatensystem eingeführt. Der Brennpunkt F_1 wird in den Ursprung, der Brennpunkt F_2 auf die x-Achse bei x = 6 gelegt. Die weitere Konstruktion erfolgt so, wie oben beschrieben. Die Strecke $\overline{LP}$ bezeichnet das Lot von P(x|y) auf die x - Achse. Das Lot teilt das Dreieck F_1F_2P in zwei rechtwinklige Dreiecke, auf die der Satz des Pythagoras angewendet wird. Mit $|\overline{F_1F_2}| = c$ folgt:



$s_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $s_2 = \sqrt{(c - x)^2 + y^2}$

Mit der Bedingung $s_1 + m \cdot s_2 = a$ und zweimaligem Quadrieren ergibt sich mit dem TI-Nspire eine recht kompliziert aussehende Relation f(a,c,m,x,y), mit der sich aber gut weiterarbeiten lässt.

$$\boldsymbol{f(a,c,m,x,y) = 4a^2m^2 \cdot (x^2 + y^2 + c^2 - 2cx) - \left[(m^2 - 1) \cdot x^2 - 2cm^2 \cdot x + (m^2 - 1) \cdot y^2 + a^2 + c^2 \cdot m^2\right]^2}$$

Bei der Herleitung mit dem TI-Nspire ist es sinnvoll, einige Umformungsschritte händisch vorzubereiten, aber die Durchführung dann dem TI-Nspire zu überlassen.

Zunächst werden die Terme für s_1 und s_2 auf dem Rechner definiert:

$s1:=\sqrt{x^2+y^2} :s2:=\sqrt{(c-x)^2+y^2}$	$\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$

Dann wird die Bedingung $s_1 + m \cdot s_2 = a$ gedanklich zu $s_1 = a - m \cdot s_2$ umgestellt. Um das erste Quadrieren auf dem Rechner zu realisieren, wird zusammen mit dem Befehl *expand* die Rechnung
$expand(s_1^2 = (a - m \cdot s_2)^2)$ ausgeführt.

$$\text{expand}\left(s1^2=(a-m\cdot s2)^2\right) \qquad x^2+y^2=-2\cdot a\cdot m\cdot\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}+m^2\cdot x^2-2\cdot c\cdot m^2\cdot x+m^2\cdot y^2+a^2+c^2\cdot m^2$$

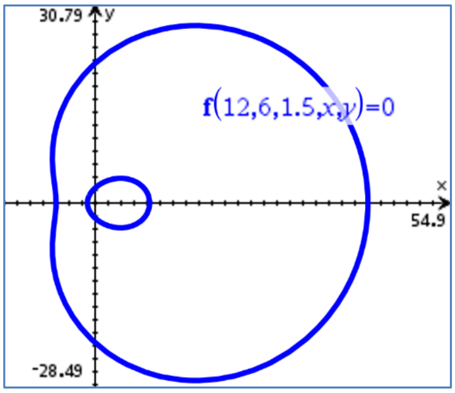
Die entstandene Gleichung wird so umgeformt, dass der Wurzelausdruck mit dem Vorfaktor auf einer Seite allein steht und die beiden Seiten der Gleichung werden zum zweiten Male quadriert.

$$\left(2\cdot a\cdot m\cdot\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}\right)^2=\left(m^2\cdot\left(x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2\right)-x^2-y^2+a^2\right)^2$$
$$4\cdot a^2\cdot m^2\cdot\left(x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2\right)=\left(\left(m^2-1\right)\cdot x^2-2\cdot c\cdot m^2\cdot x+\left(m^2-1\right)\cdot y^2+a^2+c^2\cdot m^2\right.$$

Die Gleichung wird durch Subtraktion der rechten Seite umgeformt. Die dadurch neu entstandene linke Seite wird als Funktion f(a,c,m,x,y) definiert.

$$f(a,c,m,x,y):=4\cdot a^2\cdot m^2\cdot\left(x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2\right)-\left(\left(m^2-1\right)\cdot x^2-2\cdot c\cdot m^2\cdot x+\left(m^2-1\right)\cdot y^2+a^2+c^2\cdot m^2\right)^2 \qquad \textit{Fertig}$$

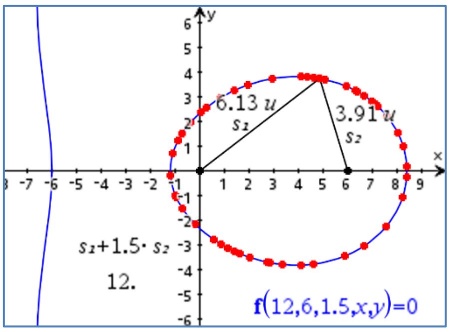
Diese Umformungen durch Quadrieren sind notwendig, weil der TI-Nspire in der Grafikanwendung *Relation* keine Wurzelausdrücke verarbeiten kann, sondern z. B. die Gleichungen in Polynomform benötigt.



Wir stellen nun die Relation f(12,6,1.5,x,y) grafisch dar.

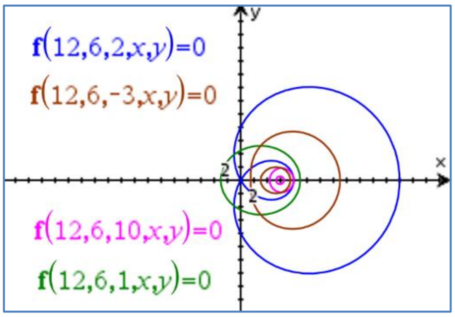
Wird z. B. unter *Graphs* die Eingabe *Relation* gewählt und dort die Gleichung $f(12{,}6{,}1.5, x, y) = 0$ eingegeben, so wird das zugehörige kartesische Oval gezeichnet.

Durch das zweimalige Quadrieren entstehen zwei geschlossene Kurven. Die innere Kurve entspricht dem durch die Geometriespur erzeugten Graphen.



Wird neben der mit f(12,6,1.5,x,y) = 0 rechnerisch erzeugten Kurve im gleichen Bildschirm auch die oben beschriebene Konstruktion durchgeführt, ist die Deckungsgleichheit der kartesischen Ovale gut zu erkennen.

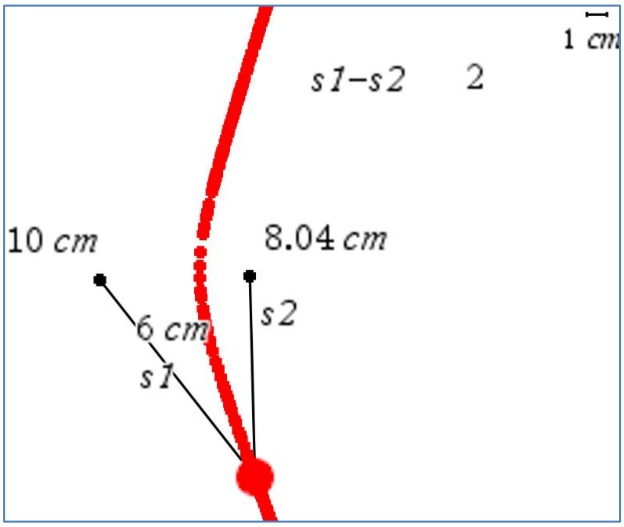
Zwischenfazit:

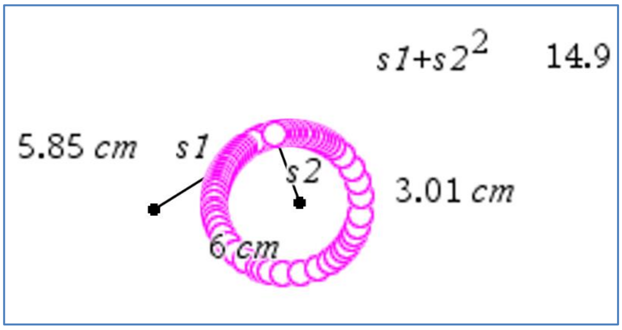


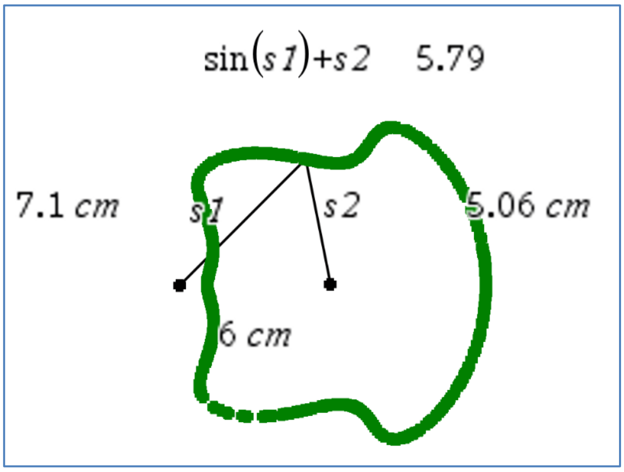
Mit modernen digitalen Mathematikwerkzeugen lassen sich auch kompliziertere mathematische Zusammenhänge relativ leicht und vor allem anschaulich untersuchen. Descartes hatte diese Möglichkeiten nicht. Desto größer ist unser Respekt vor seinen Leistungen.
Eine analytische Untersuchung der kartesischen Ovale ist wohl im Schulunterricht nicht möglich. Aber die phänomenologische Betrachtung von kartesischen Ovalen anhand der grafischen Darstellung ist durchaus auch für die Schule denkbar. Ein Beispiel für das Variieren des Parameters m soll das in nebenstehendem Bild illustrie-

ren. Auch Schieberegler lassen sich dafür verwenden. Analog können auch die anderen Parameter variiert und deren Veränderung beschrieben werden.

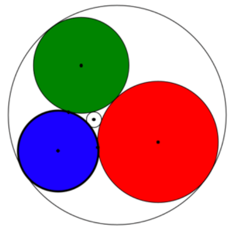
Besonders spannend ist eine Variation des Berechnungsterms in der Geometrieanwendung, also z. B. eine Untersuchung von
s1 - s2 = 2 oder sin(s1) + s2= 6 oder ... anstelle von s1 + s2 = konstant.







Vier-Kreise-Satz

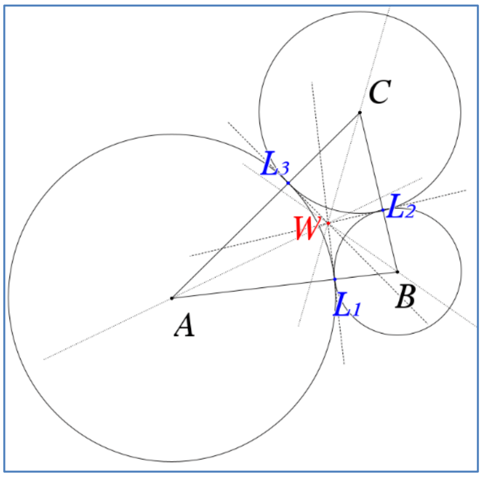


Von Descartes stammt auch der sogenannte Vier-Kreise-Satz:
Zu drei sich gegenseitig berührenden Kreisen mit den Radien r_1, r_2 und r_3 findet man immer zwei Kreise, die diese drei Kreise einmal von innen und einmal von außen berühren.

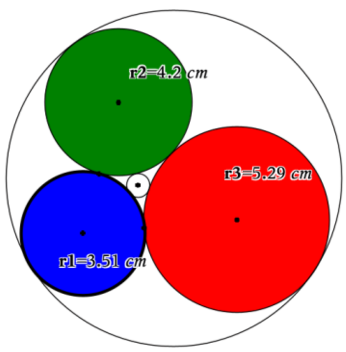
DESCARTES entdeckte den Zusammenhang[4]

$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$, wobei $k_i = +1/r_i$ die Krümmung der Kreise angibt **(negatives Vorzeichen für k_4, wenn der vierte Kreis die anderen drei von außen berührt). Um** r_4 zu bestimmen, genügt es, die oben angegebene quadratische Gleichung nach der Variable k_4 zu lösen.

Um dieses Problem mit dem TI-Nspire nachvollziehen zu können, wird das Problem in Teilprobleme aufgeteilt:



1. Gesucht sind drei Kreise, die sich gegenseitig berühren.
   Man konstruiert ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der drei Kreise sind.
   Dazu konstruiert man den Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden (Inkreismittelpunkt) und fällt von diesem Punkt die Lote auf die Seiten, die entstehenden Schnittpunkte L_1, L_2, L_3 liefern mit den Eckpunkten A, B und C als Mittelpunkte die Radien $\overline{AL_1} = r_1$, $\overline{BL_2} = r_2$, und $\overline{ACL_3} = r_3$.
2. Die Radien der „4. Kreise“ (der Radius des inneren Kreises wird im Weiteren mit r_4 und der des äußeren Kreises mit r_5 bezeichnet) werden nach der Descartes-Formel berechnet.
   Hierzu nutzt man die App *Notes* und verknüpft dort die im Geometriefenster berechneten Werte für die drei gegebenen Kreise und berechnet die beiden Werte für die gesuchten Kreise.



r1 ▸ 3.51112

r2 ▸ 4.19553

r3 ▸ 5.29083

$\mathbf{rr4}:=\text{zeros}\left(2\cdot\left(\left(\frac{1}{r1}\right)^2+\left(\frac{1}{r2}\right)^2+\left(\frac{1}{r3}\right)^2+\left(\frac{1}{r4}\right)^2\right)-\left(\frac{1}{r1}+\frac{1}{r2}+\frac{1}{r3}+\frac{1}{r4}\right)^2, r4\right)$ ▸ $\{-9.56289, 0.654065\}$

rr4 ▸ $\{-9.56289, 0.654065\}$

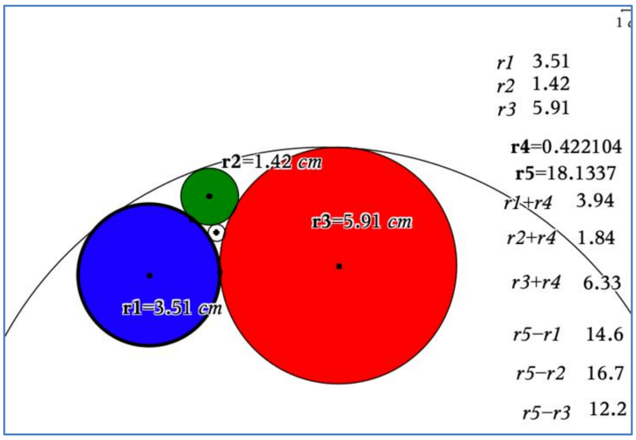
r4:=**rr4**[2] ▸ 0.654065

r5:=|**rr4**[1]| ▸ 9.56289

[4] Zum Beweis: https://www-m10.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehre/SS13/LASeminarSS13/MonikaFolien.pdf

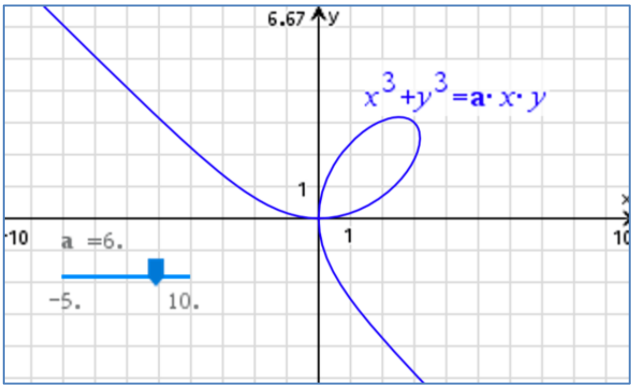
3. Den Mittelpunkt des inneren Kreises findet man als Schnittpunkt der Kreise mit den Radien
   $r_1 + r_4$, $r_2 + r_4$ und $r_3 + r_4$ um die Eckpunkte A, B und C.

4. Den Mittelpunkt des äußeren Kreises findet man als Schnittpunkt der Kreise mit den Radien
   $r_4 - r_1$, $r_4 - r_2$ und $r_4 - r_3$ um die Eckpunkte A, B und C. Die entsprechenden Werte werden dynamisch im Geometriefenster berechnet. Nun kann man beliebig große Kreise erzeugen und die Exaktheit der Konstruktion beobachten.



Das kartesische Blatt (Folium)

Neben dem Koordinatensystem wird auch eine algebraische Kurve zu Ehren Descartes als kartesisches Blatt bezeichnet. Die Gleichung dieser Kurve lautet
$x^3 + y^3 = a \cdot x \cdot y$.
Im Graphikfenster kann man diese Kurve nach Einstellung des Graphikmodus auf *Relation* direkt zeichnen.



Descartes soll Fermat die Aufgabe gestellt haben, den Anstieg der Kurve $x^3 + y^3 = 3xy$ an der Stelle x = 1,5 zu berechnen. Wie Fermat das Problem löste, wissen wir nicht, zeigen hier aber zwei Wege, die uns mit dem digitalen Werkzeug zur Verfügung stehen.

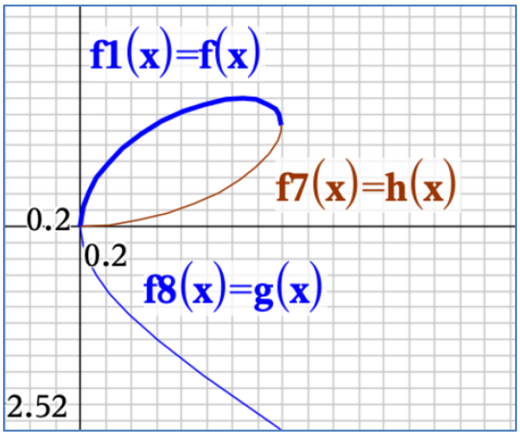
1. Die Lösung der algebraischen Gleichung nach y liefert drei Teillösungen. Speichert man diese drei Lösungen als Funktionen f, g und h ab.

$$f(x):=2\cdot\sqrt{x}\cdot\cos\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$$ *Fertig*

$$g(x):=-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sin\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$ *Fertig*

$$h(x):=2\cdot\sqrt{x}\cdot\sin\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}{3}\right)$$ *Fertig*

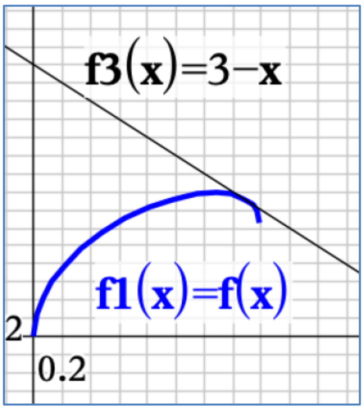
Betrachtet man die Definitionsbereiche der drei Funktionen, so erkennt man auch, dass der linke Ast (im II. Quadranten) hiermit nicht erfasst wird.



Nun kann man - etwas aufwändig – z. B. die Funktion f differenzieren und erhält als Anstieg der Funktion f an der Stelle x = 1,5 den Wert -1.

$f(1.5)$	1.5
$fa1(1.5)$	-1.

Man erhält damit auch als Tangente an den Graphen von f an der Stelle x = 1,5 die Gleichung y = 3-x.



Analog könnte man dies auch für die Funktionen g und h durchführen.

2. Implizites Differenzieren
   Die implizite Differentiation ist eine Möglichkeit, einen Ausdruck, der nicht explizit durch einen Term (eine Funktion), sondern nur durch eine algebraische Gleichung gegeben ist (implizite Kurve), abzuleiten. Dabei benötigt man i.d.R. verschiedene Regeln der Differenzialrechnung, wie Produkt- oder Kettenregel. Beim impliziten Differenzieren der algebraischen Kurve von Descartes erhält man beim Ableiten nach x:

$$3\cdot x^2+3\cdot y^2\cdot \frac{d}{dx}(y)=3\cdot y+3\cdot x\cdot \frac{d}{dx}(y)$$

Hier wurden die Produkt- und die Kettenregel angewendet.
Sortiert man nun die Gleichung um, erhält man einen Ausdruck für die Ableitung:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

In der Gleichung $x^3 + y^3 = 3xy$ ergibt sich für $x = 1,5$ drei Lösungen, die zu den drei Funktionen f, g und h von oben gehören.

$$\text{solve}\left(x^3+y^3=3\cdot x\cdot y,y\right)|x=1.5 \qquad y=^-2.42705 \text{ or } y=0.927051 \text{ or } y=1.5$$

Für y = 1.5 erhalten wir auch hier als Ableitung den Wert -1.

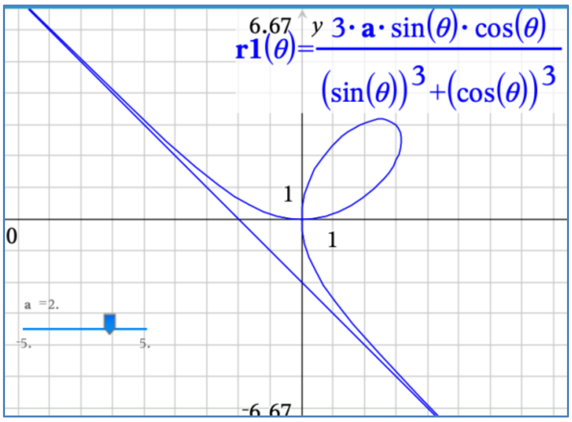
Anmerkung 1:
Das implizite Differenzieren wurde nicht mit dem digitalen Werkzeug, sondern händisch durchgeführt. Der TI-Nspire besitzt allerdings einen entsprechenden Befehl dafür:

$$\text{impDif}\left(x^3+y^3=3\cdot x\cdot y,x,y\right) \qquad \frac{x^2-y}{x-y^2}$$

Anmerkung 2:
Im englischsprachigen Bereich werden mit implizitem Differenzieren sogenannte Related-Rates-Probleme gelöst.

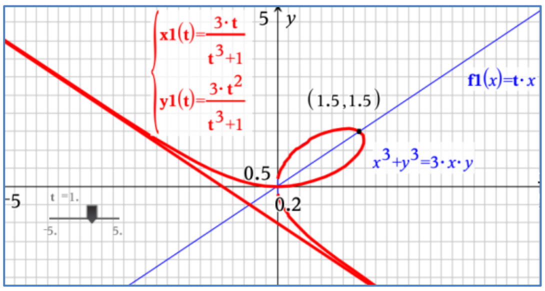
Zwei weitere Darstellungsarten für die Kurve

Die Kurve lässt sich auch
a) mittels Polarkoordinaten



b) und durch eine mögliche Parameterdarstellung darstellen.
Einsetzen von $y = t \cdot x$ in die algebraische Kurve liefert dann eine mögliche Parameterdarstellung der algebraischen Kurve für $t \neq -1$.

$x^3+y^3=3\cdot x\cdot y$	$x^3+y^3=3\cdot x\cdot y$
$x^3+y^3=3\cdot x\cdot y\|y=t\cdot x$	$t^3\cdot x^3+x^3=3\cdot t\cdot x^2$
$\text{solve}\left(t^3\cdot x^3+x^3=3\cdot t\cdot x^2,x\right)$	$x=\frac{3\cdot t}{t^3+1}$ or $x=0$
$y=t\cdot x\|x=\frac{3\cdot t}{t^3+1}$	$y=\frac{3\cdot t^2}{t^3+1}$



Autoren:
Dr. Hubert Langlotz
Dr. Wilfried Zappe