Geometrie der Dreieckstransversalen mit Unterstützung durch ein modulares Mathematiksystem im Unterricht und in der Begabtenförderung am Beispiel der Geometry-Applikation der TI-Nspire-Technologie

Einleitung

Dieser Beitrag soll am Beispiel der Dreieckstransversalen aufzeigen, wie die Applikation „Geometry“ helfen kann, das Verständnis und die Transparenz geometrischer Zusammenhänge zu verbessern, und auch Motivation dafür sein, vielfältige diesbezügliche Anwendungen für den eigenen Unterricht zu erarbeiten.
Vieles liegt auf der Hand. So kann man mit dem dynamischen Geometriemodul die Lösung des zu behandelnden Problems Schritt für Schritt entwickeln. Man kann unterschiedliche Perspektiven nutzen, um einen Zusammenhang besser zu durchdringen und ohne größeren Aufwand unterschiedliche Fälle gegenüberstellen. In diesem Beitrag betrifft dies unter anderen die Frage, wie sich der betrachtete Sachverhalt bei spitz-, stumpf- und rechtwinkligen Dreiecken darstellt. Das geht mit dynamischer Geometrie effizient und sehr anschaulich. Sicher darf man die Arbeit auf Papier mit Zirkel und Lineal und eventuell auch dem Geodreieck nicht vernachlässigen. Die Arbeit mit beiden Möglichkeiten sollte sich eher ergänzen und beide Arbeitsweisen sollten voneinander profitieren.
Zu den Vorteilen der Nutzung dynamischer Geometriesoftware gehören z.B. auch, die Möglichkeit einer unkomplizierten Fehlerkorrektur, was zu einer zielgerichteten Lernarbeit im Unterricht beiträgt, oder auch die Möglichkeit Objekte aus- und einblenden zu können, womit man mehr Übersichtlichkeit erreichen kann.
Im Beitrag werden nach einigen Hinweisen zur Nutzung des Geometriemoduls Aufgaben für Schülerinnen und Schüler formuliert, deren Lösung ganz oder teilweise erörtert wird. Gleichzeitig wird durch die Beispiele gezeigt, wie man die Problematik der Dreieckstransversalen in verschiedenen Klassenstufen und Stoffgebieten zur Wiederholung und für vielfältige Übungen nutzen kann bis hin zur Vektorrechnung und Analytischen Geometrie in der Oberstufe. Die anspruchsvollsten Beispiele kann man wohl nicht im Unterricht nutzen, aber vielleicht ja im Bereich der Begabtenförderung.
Mit Absicht erfolgt deshalb die Besprechung des Fermatpunktes im letzten Abschnitt, der dann auch etwas umfangreicher ausfällt.

Hinweise zur Nutzung der Geometry-Applikation

Es ist sicher notwendig, sich mit den Möglichkeiten der Applikation „Geometry“ vertraut zu machen. Hier können die zur Verfügung stehenden Handbücher gut helfen. Neben den vielfältigen Möglichkeiten geometrische Objekte zu erzeugen und Konstruktionen durchzuführen, gibt es weitere für die Arbeit interessante Gesichtspunkte.
Bei der Arbeit im Geometriemodul lassen sich beispielsweise zusätzlich zu den Dokumenteinstellungen weitere, nur das Modul betreffende, Einstellungen vornehmen. Es lassen sich Texte einfügen, Messwerte als Variable speichern, mathematische Terme, die als Text vorgeben sind, berechnen und, wie oben schon erwähnt, Objekte aus- und wieder einblenden. Außerdem sollte man die Möglichkeiten Objekte unterschiedlich darzustellen (Farbwahl, Attribute) nutzen.

Wichtig erscheint mir noch darauf hinzuweisen, dass die Konstruktionsmöglichkeiten mit der Software, Schülerinnen und Schüler dazu verleiten könnte, wichtige Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal, wie das Konstruieren der Mittelsenkrechten, der Winkelhalbierenden das Fällen eines Lotes usw., zu vernachlässigen. Das gilt es zu verhindern.

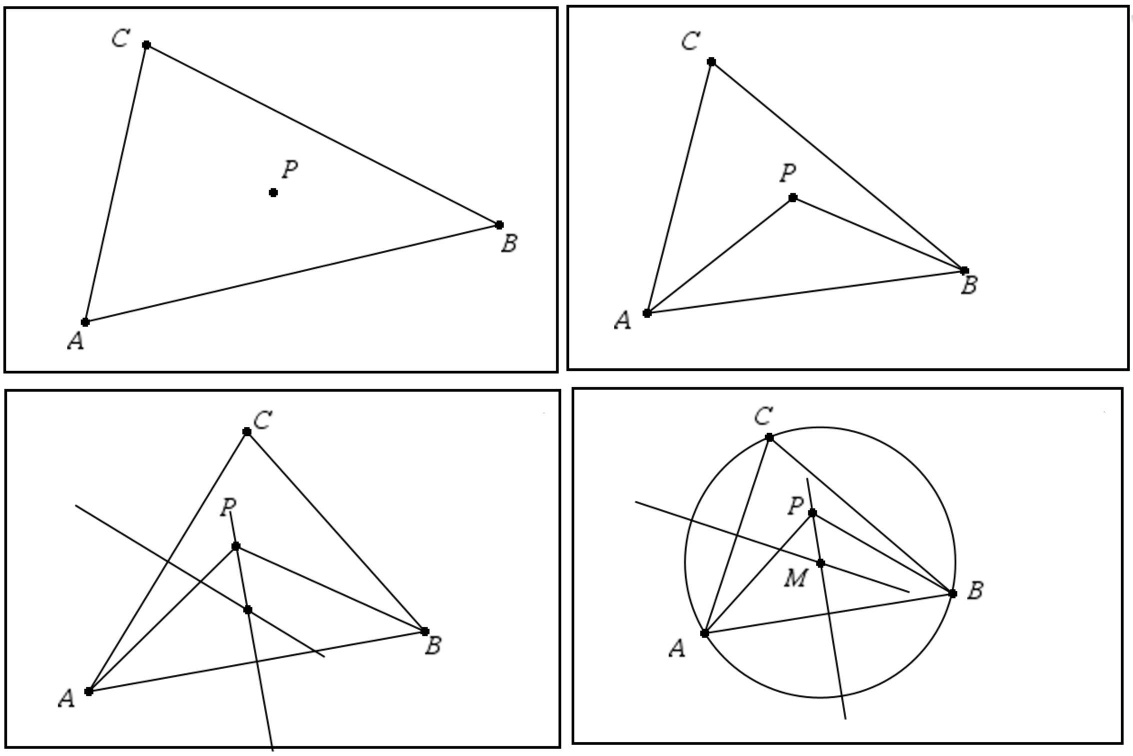
Beispielaufgaben aus der Schulmathematik und für die Begabtenförderung
Die Lösungen der Aufgaben können, wenn den Schülerinnen und Schüler noch kein eigenes MMS zur Verfügung steht, auch gemeinsam im Unterricht am interaktiven Whiteboard erarbeitet werden.

Teil 1. Aufgaben aus dem Stoffgebiet über Dreieckstransversalen

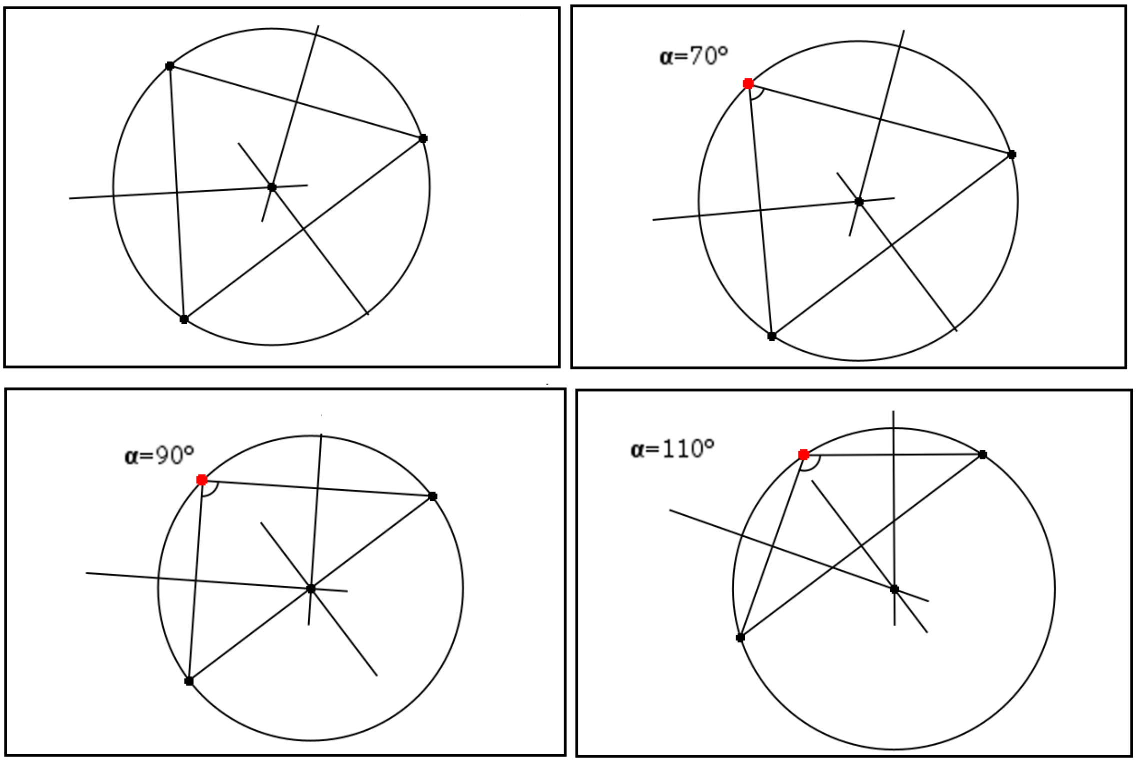
Schnittpunkt der Mittelsenkrechten - Umkreis
Aufgabe:
Auf einer Geometry-Seite ist ein Dreieck ABC und ein Punkt P gegeben, der von den Eckpunkte A und B den gleichen Abstand hat.

a) Zeichne die Strecken mit diesem Abstand ein.
b) Charakterisiere das Dreieck ABP.
c) Erkläre, auf welchem geometrischen Ort alle Punkte liegen, die jeweils den gleichen Abstand von A und B haben.
d) Erkläre und begründe, wie man den Punkt findet, der von allen Eckpunkten des Dreiecks ABC gleich weit entfernt ist.
e) Konstruiere einen Kreis, der alle Eckpunkte enthält.

Während der Beantwortung der Fragen sollten folgende Geometry-Seiten entstehen:



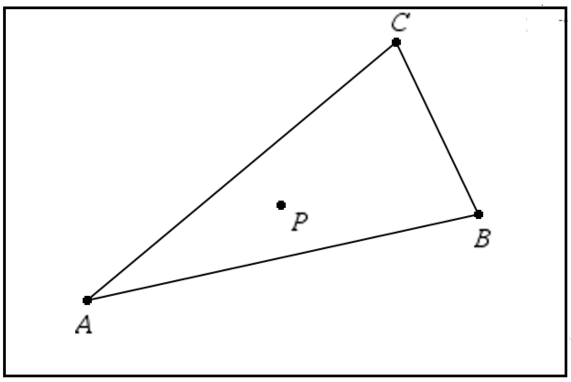
Danach werden die Begriffe Umkreis und Umkreismittelpunkt erklärt und es wird die Erkenntnis formuliert, dass sich die Mittelsenkrechten der Dreieckseiten in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt des Dreiecks, schneiden.
Zuletzt sollte die Konstruktion mit allen Mittelsenkrechten, sowohl mit Hilfe der Geometry-Applikation als auch mit Zirkel und Lineal (eventuell auch mit dem Geodreieck) auf Papier erfolgen. Die Geometry-Seite ist dann auch geeignet, die Lage des Umkreismittelpunktes für spitz-, strumpf- und rechtwinklige Dreiecke zu diskutieren.

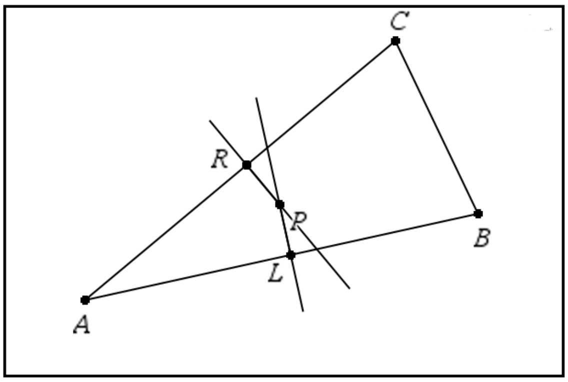


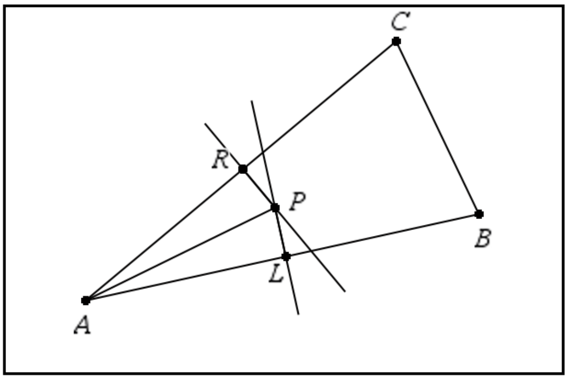
Schnittpunkt der Winkelhalbierenden – Inkreis
Aufgabe:
Auf einer Geometry-Seite ist ein Dreieck ABC und ein Punkt P gegeben, der von den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ den gleichen Abstand hat.

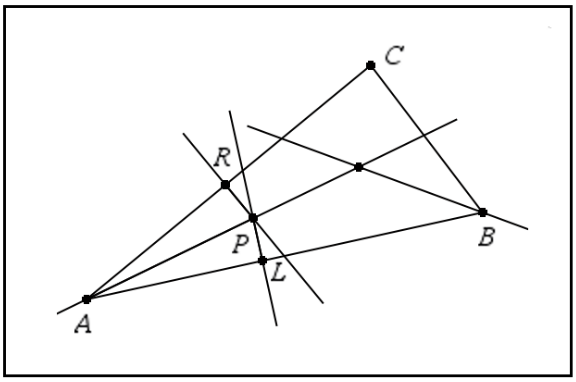
a) Zeichne diese beiden Abstände (Strecken $\overline{PL}$ und $\overline{PR}$) ein.
b) Charakterisiere die Dreiecke APR und APL und vergleiche sie.
c) Nenne den geometrischen Ort aller Punkte, die von den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ jeweils den gleichen Abstand haben.
d) Erkläre und begründe, wie man den Punkt findet, der von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand hat.
e) Konstruiere einen Kreis, der die Seiten des Dreiecks ABC in jeweils genau einem Punkt berührt.

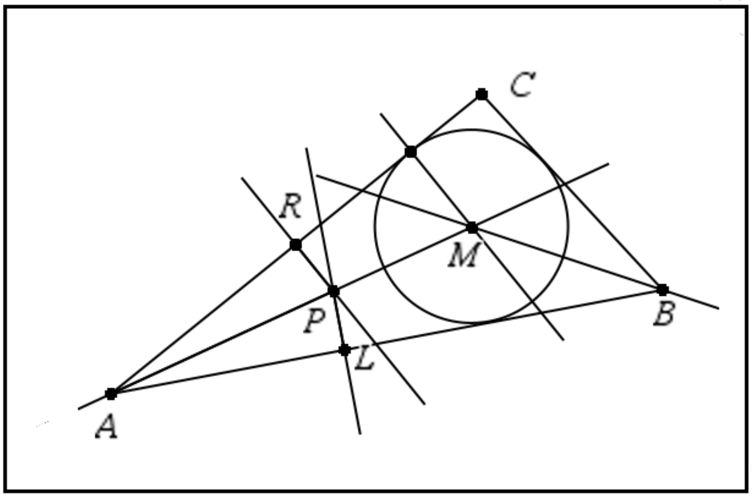
Die Beantwortung der Fragen wird dabei durch folgende Konstruktionen unterstützt.



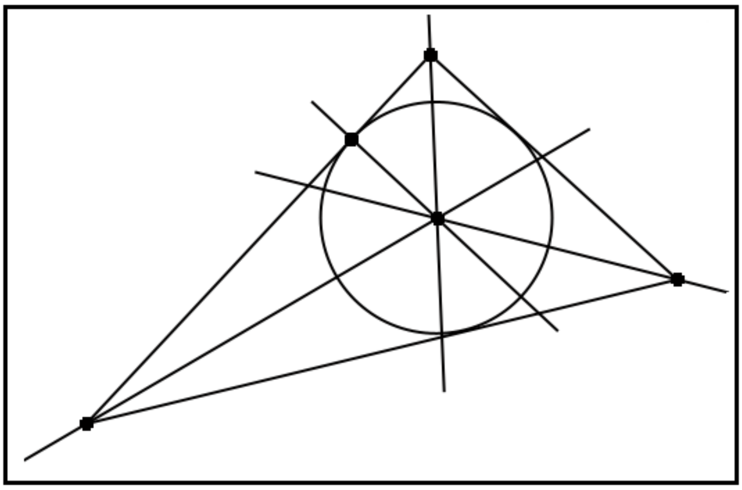








Danach wird erörtert, warum sich die Winkelhalbierenden in genau einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt, schneiden.
Eine nochmalige Konstruktion auf einer Geometry-Seite mit allen Winkelhalbierenden ist angebracht, auch die Konstruktion mit Zirkel und Lineal.



Nach meiner Auffassung sollte man es nicht versäumen, bei der Behandlung der Kreislehre den Zusammenhang zu Um- und Inkreis von Dreiecken herzustellen, insbesondere zu Kenntnissen über Tangenten, Berührungspunkt, Berührungsradius und den Satz des Thales.

Höhenschnittpunkt

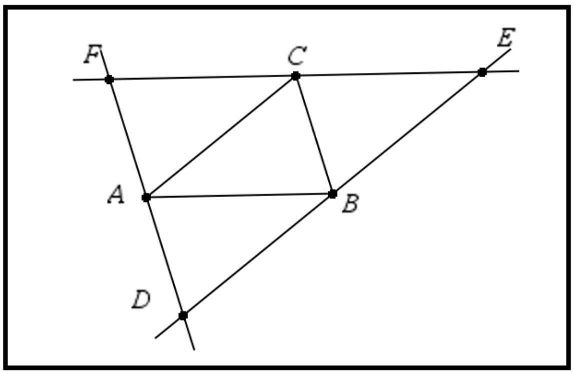
Aufgabe:

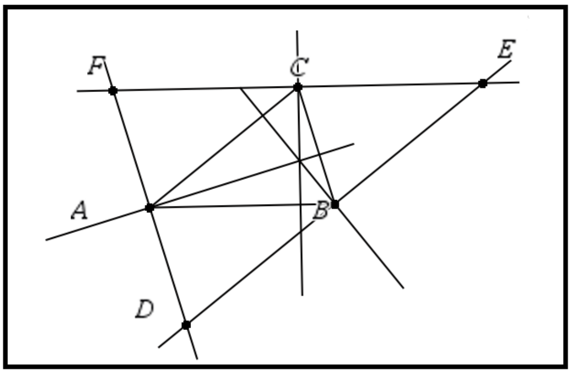
a) Zeichne ein Dreieck ABC und zu jeder Dreieckseite eine parallele Gerade durch den gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks. Die Schnittpunkte der Parallelen sind die Eckpunkte des Dreiecks DEF.

b) Es existieren dann insgesamt 4 Teildreiecke. Charakterisiere diese Teildreiecke und beweise deine Aussagen.

c) Konstruiere die Geraden, auf denen die drei Höhen des Dreiecks ABC liegen. Stelle eine Vermutung auf und beweise sie. Achte dabei auch auf das Dreieck DEF.

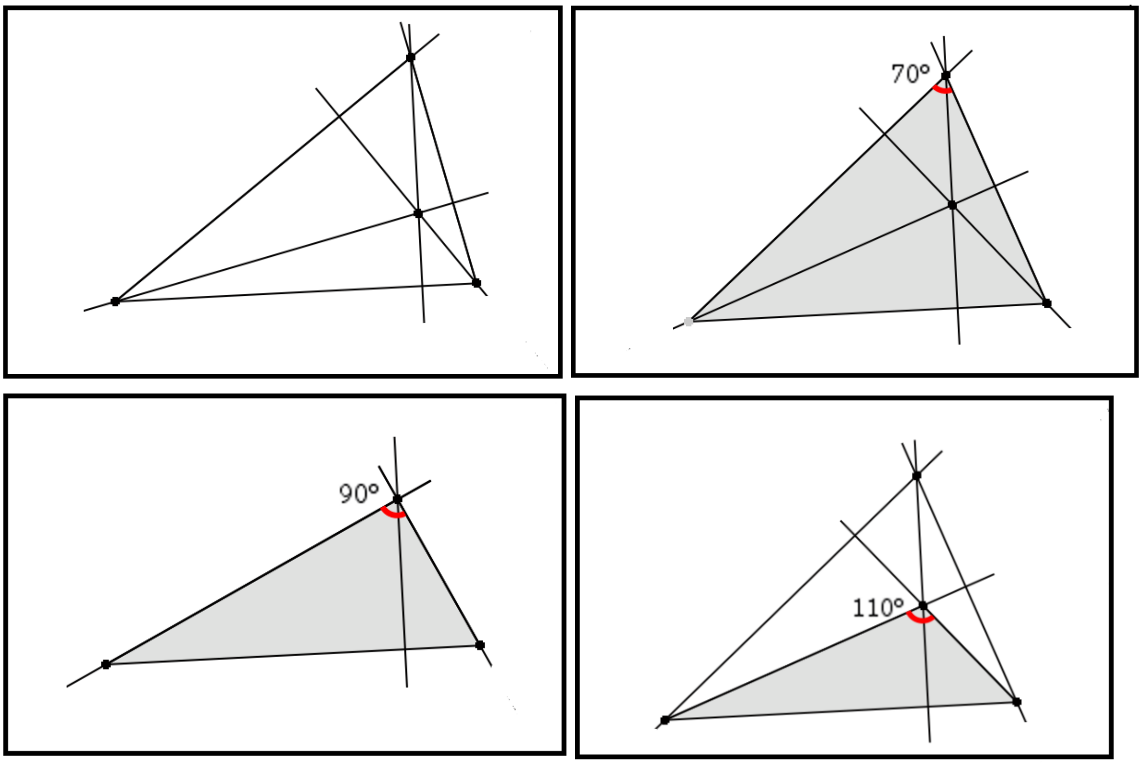
Man erhält folgende Konstruktionen, die bei der Lösung der Aufgabe helfen.





Die Geraden, auf denen die Höhen des Dreiecks ABC liegen, sind die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks DEF. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, also auch die Höhen.

Zuletzt fertigen wir wieder eine auf das Wesentliche beschränkte Zeichnung, auch auf Papier an.
Mithilfe der Konstruktion auf der Geometry-Seite untersuchen wir auch wieder die Lage des Schnittpunktes der Höhen bzw. ihrer Verlängerungen bei spitz-, stumpf- und rechtwinkligen Dreiecken.



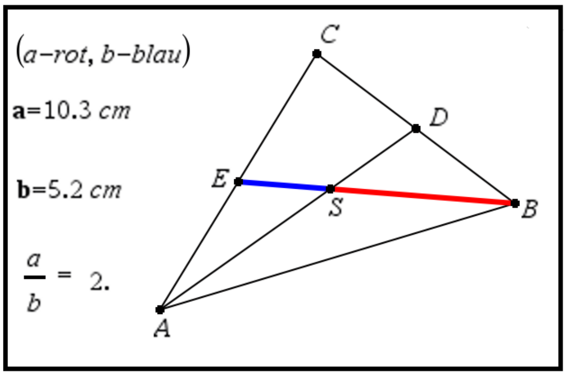
Bei stumpfwinkligen Dreiecken erhält man den Schnittpunkt, wenn man die Höhen über die Höhenfußpunkte hinaus verlängert.
Der Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks bzw. ihrer Verlängerungen wird künftig stets einfach mit ‚Höhenschnittpunkt' bezeichnet.

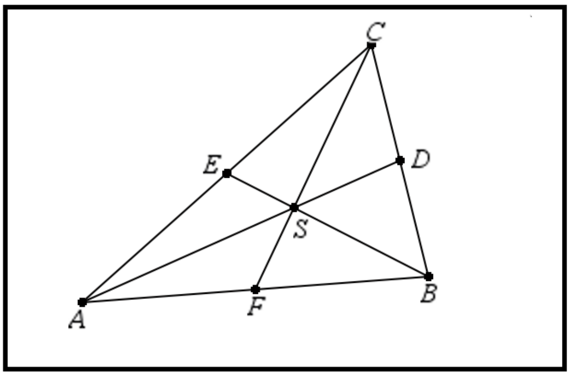
Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

Aufgabe:

a) Teste mit Hilfe der Geometry-Applikation folgende Annahme:
Eine Seitenhalbierende eines beliebigen Dreiecks teilt eine andere Seitenhalbierende desselben Dreiecks in einem konstanten Verhältnis. Finde heraus um welches Verhältnis es sich handeln könnte.

b) Beweise unter der Voraussetzung, dass die in a) ermittelten Hypothesen wahr sind, folgenden Satz:
Die Seitenhalbierenden schneiden sich in genau einem Punkt.



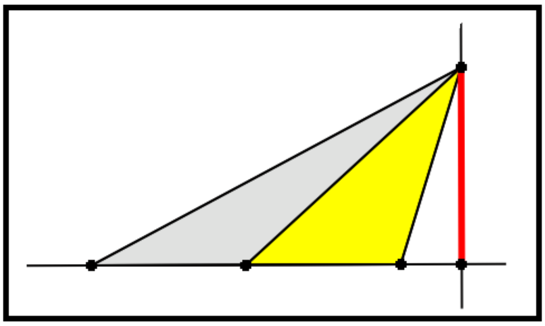


zu b) Die Seitenhalbierende $\overline{CF}$ teilt $\overline{BE}$ ebenfalls im Verhältnis 2:1. Deshalb liegt S auch auf $\overline{CF}$.

Teil 2: Festigung und Vertiefung in verschiedenen Stoffgebieten; Begabtenförderung

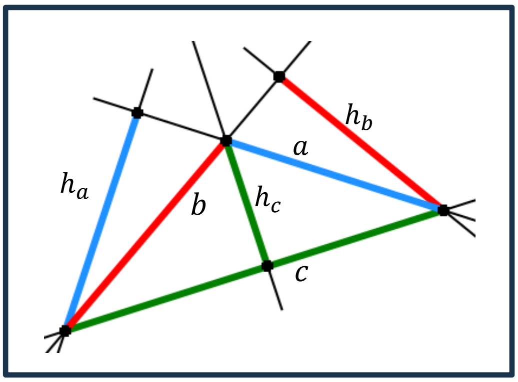
Die nachfolgend dargestellten Problemstellungen können in den Stoffgebieten behandelt werden, in denen die notwendigen Kenntnisse zur Problemlösung bereitgestellt wurden. Damit hat man dann weitere Übungen zum laufenden Stoffgebiet zur Verfügung und wiederholt gleichzeitig Aspekte zu Dreieckstransversalen.

Stoffgebiet: Flächeninhalt von Dreiecken
Aufgabe:
Begründe folgende Aussage:
Der gemeinsame Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks ist dessen Schwerpunkt.
Tipp: Finde heraus, was die Teildreiecke gemeinsam haben, in die eine Seitenhalbierende das Dreieck teilt.



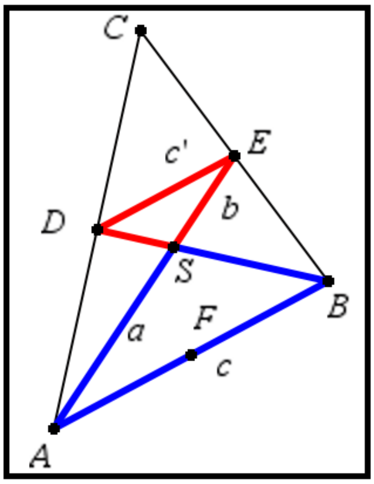
Die beiden Teildreiecke haben den gleichen Flächeninhalt, denn durch die Halbierung einer Seite hat man zwei gleich große Grundseiten und die gleiche Höhe auf diese.
Damit liegt der Schwerpunkt auf der Seitenhalbierenden. Da dies auch für die anderen Seitenhalbierenden gilt, ist der gemeinsame Schnittpunkt der Schwerpunkt des Dreiecks.

Aufgabe:
Beweise, dass das Verhältnis der Längen zweier Höhen reziprok zum Verhältnis der Längen der zugehörigen Seiten ist.



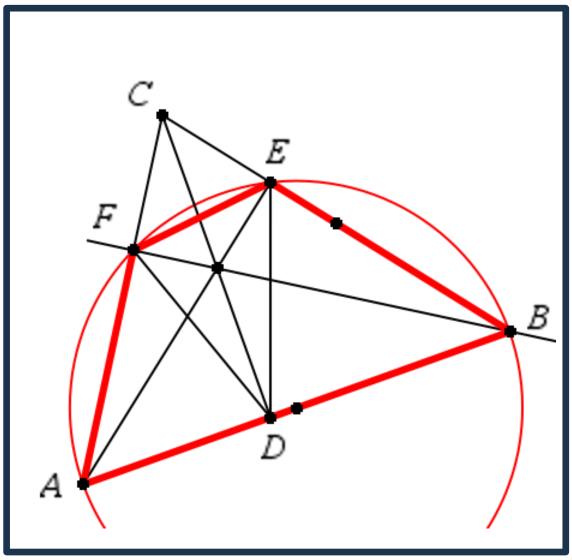
$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$
$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$
$\Rightarrow \ \frac{h_b}{h_a} = \frac{a}{b}, \quad \frac{h_c}{h_a} = \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{c} = \frac{h_c}{h_b}$

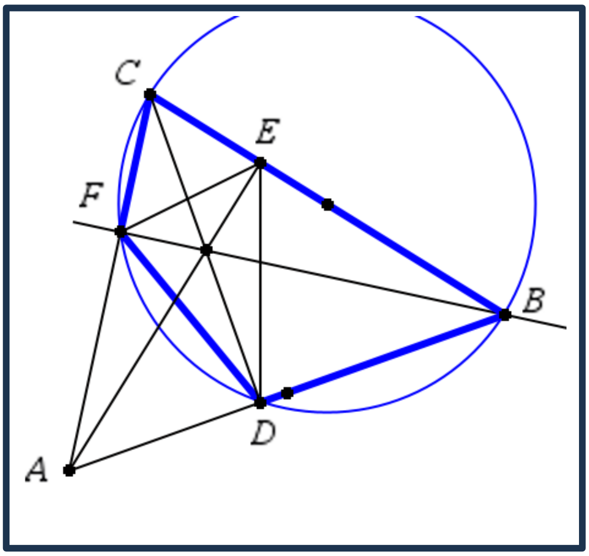
Stoffgebiet: Strahlensätze, Ähnlichkeit von Dreiecken
Aufgabe:
Nutze Deine Kenntnisse über Strahlensätze bzw. ähnliche Dreiecke, um zu beweisen, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt im Verhältnis 2:1 schneiden.



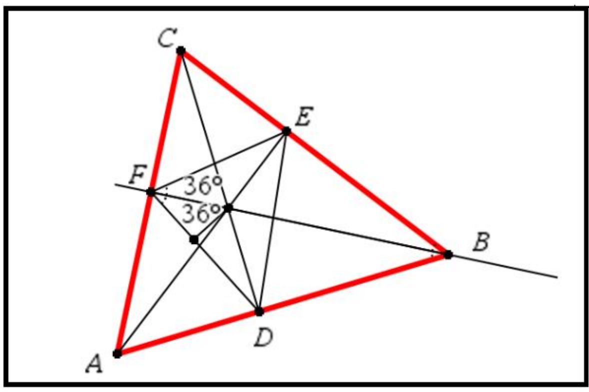
Da D und E Seitenmittelpunkte sind gilt $\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$.
Daraus folgt, dass DE und AB parallel sind (Strahlensatzumkehrung), und weiter, dass $\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{c'}{c} = \frac{1}{2}$ gilt.
Weiterhin gilt:
$\measuredangle BAS \cong \measuredangle DES$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)
$\measuredangle ASB \cong \measuredangle DSE$ (Scheitelwinkel)
Damit sind die Dreiecke DSE und ABS ähnlich,
woraus folgt, dass $\frac{a}{b} = \frac{c}{c'} = \frac{2}{1}$ gilt.
Die Seitenhalbierenden schneiden sich also im Verhältnis 2:1.
Da die Seitenhalbierende $\overline{CF}$ die beiden anderen ebenfalls in diesem Verhältnis teilt,
geht sie auch durch den Punkt S.

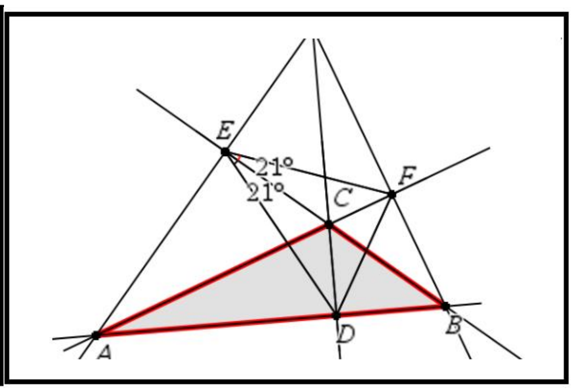
Kreislehre (Satz des Thales, Sehnenviereck)
Aufgabe:
Die Punkte D, E und F seien die Höhenfußpunkte des spitzwinkligen Dreiecks ABC.
Beweise, dass die Höhen im Dreieck ABC Winkelhalbierende im Dreieck DEF sind.
Demonstriere mit Hilfe der Geometry-Applikation, dass dies auch in stumpfwinkligen Dreiecken gilt.





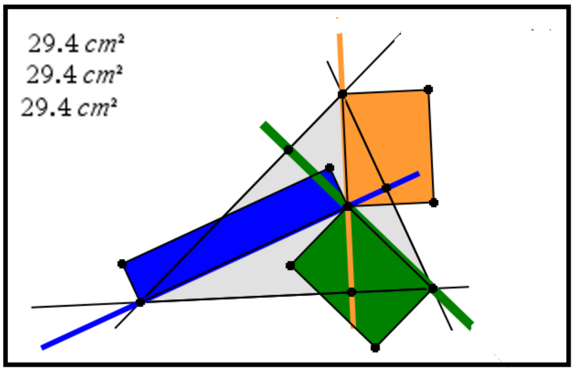
Da die Dreiecke ΔBFA und ΔBEA rechtwinklig sind, liegen die Punkte E und F auf dem Thaleskreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$. Damit ist ABEF ein Sehnenviereck in diesem Kreis.
Analog kann man zeigen, dass BDFC ein Sehnenviereck im Kreis mit dem Durchmesser $\overline{BC}$ ist.
Es sei $\sphericalangle ABC = \beta$. Dann gilt $\sphericalangle AFE = \sphericalangle DFC = 180° - \beta$.
Daraus folgt $\sphericalangle EFC = \sphericalangle DFA = 180° - (180° - \beta) = \beta$ und dann weiter
$\sphericalangle BFE = \sphericalangle BFD = 90° - \beta$.
Damit ist BF Winkelhalbierende im Dreieck DEF.
Analog erhält man, dass EA und DC Winkelhalbierende in diesem Dreieck sind.
Die Höhen im Dreieck ABC sind die Winkelhalbierenden im Dreieck DEF.

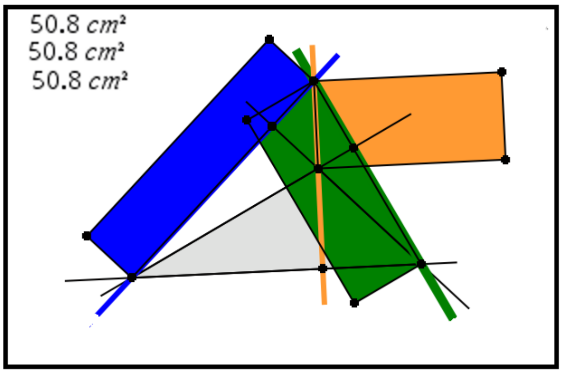


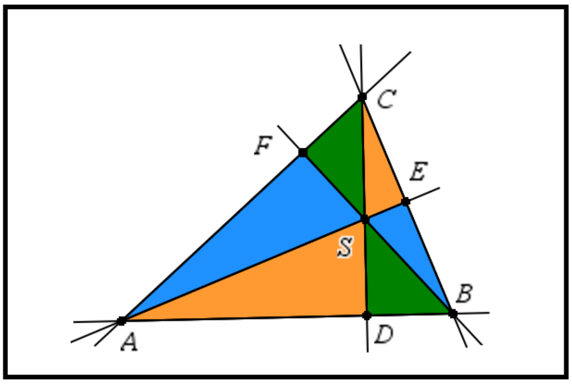


Stoffgebiet: Ähnlichkeit von Dreiecken
Aufgabe:
Mit Hilfe des Höhenschnittpunkts lassen sich auf jeder Höhe jeweils zwei Strecken betrachten.
Eine Strecke habe die Endpunkte Höhenschnittpunkt und Eckpunkt des Dreiecks,
die andere die Endpunkte Höhenschnittpunkt und Höhenfußpunkt. Das Produkt der Längen dieser beiden Strecken ist bei allen Höhen gleich.
(Die Rechtecke mit den entsprechenden Seitenlängen haben den gleichen Flächeninhalt.)
Beweise diesen Zusammenhang für spitzwinklige Dreiecke. Nutze die Abbildung und deine Kenntnisse über ähnliche Dreiecke.

Wie diese beiden Abbildungen zeigen, kann man auch erst einmal experimentieren.
Wie man sieht, funktioniert das auch bei stumpfwinkligen Dreiecken.







Die gleichgefärbten Dreiecke sind ähnlich, da am Höhenschnittpunkt Scheitelwinkel entstehen und jedes Dreieck rechtwinklig ist.

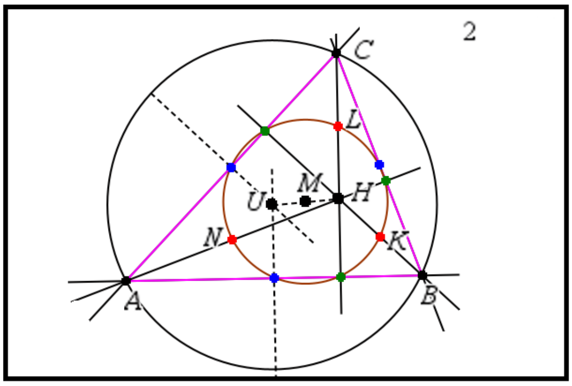
$$\Delta ADS \sim \Delta CES \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AS}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SE}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AS} \cdot \overline{SE} = \overline{DS} \cdot \overline{SC}$$

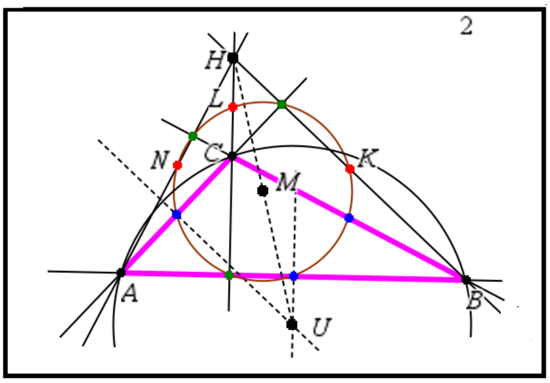
$$\Delta DBS \sim \Delta CFS \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{BS}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SF}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BS} \cdot \overline{SF} = \overline{DS} \cdot \overline{SC}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AS} \cdot \overline{SE} = \overline{DS} \cdot \overline{SC} = \overline{BS} \cdot \overline{SF}$$

Strahlensätze, Ähnlichkeit von Dreiecken, zentrische Streckung, gleichschenklige Trapeze als Sehnenvierecke, Winkel an geschnittenen Parallelen

Feuerbachkreis





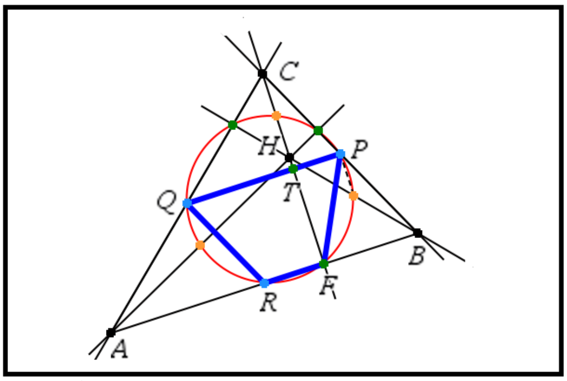
Aufgabe:
Führe die Konstruktionen mit Hilfe der Applikation Geometry aus.

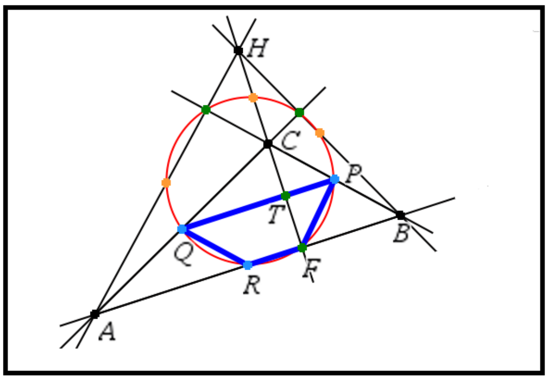
a) Zeichne ein Dreieck ΔABC und konstruiere dessen Umkreis und alle Seitenmittelpunkte.
b) Konstruiere die Höhen, den Höhenschnittpunkt H und die Höhenfußpunkte.
c) Konstruiere die Mittelpunkte zwischen den Eckpunkten und dem Höhenschnittpunkt H. (Diese nennt man auch Euler-Punkte.)
d) Der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks sei U. Konstruiere den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{UH}$.
e) Zeichne um M einen Kreis, der einen der Höhenfußpunkte enthält. Diesen Kreis nennt man nach Karl Feuerbach (1800-1834) Feuerbachkreis.
f) Das Ergebnis der Konstruktion zeigt einen allgemeinen Zusammenhang. Formuliere ihn in einem Satz.

In einem Dreieck liegen die Seitenmitten, die Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte zwischen Höhenschnittpunkt und den Eckpunkten (Euler-Punkte) auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt zwischen dem Umkreismittelpunkt des Dreiecks und dem Höhenschnittpunkt ist.

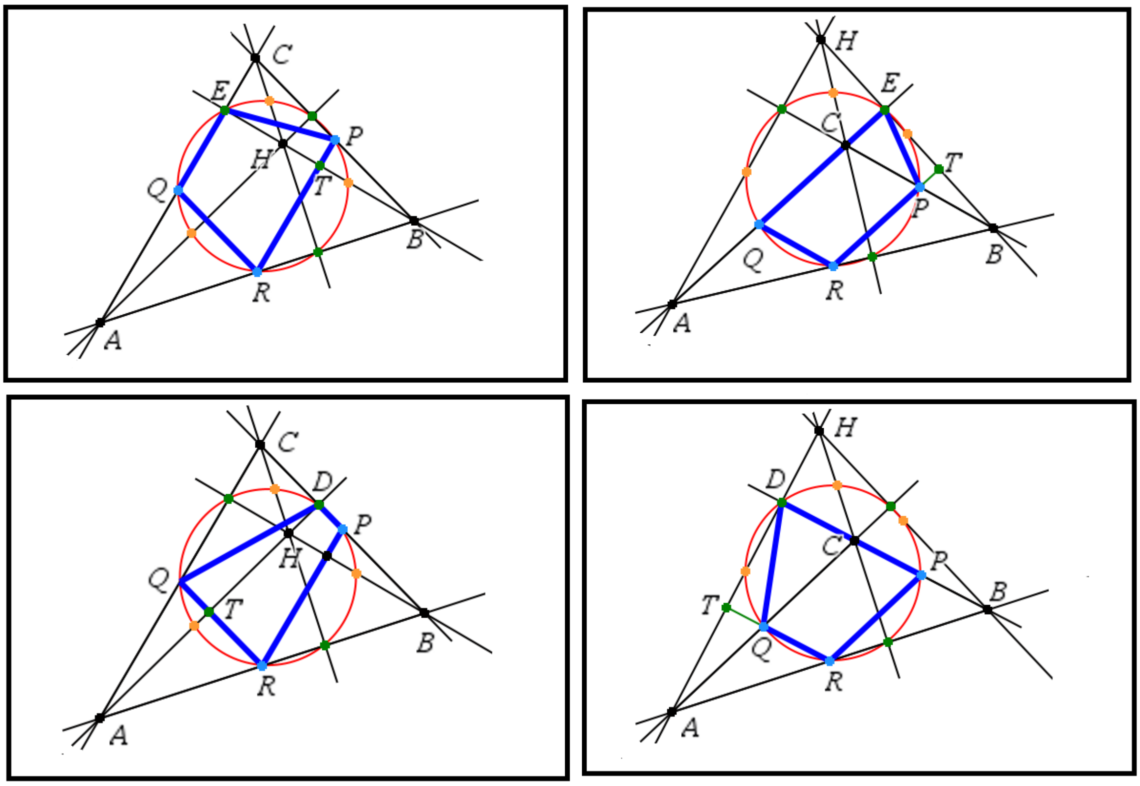
g) Blende nun noch den Umkreis aus. Konstruiere das Bild des Feuerbachkreises bei einer Streckung mit dem Streckfaktor 2 und dem Höhenschnittpunkt H als Streckzentrum. Welchen Zusammenhang entdeckst Du?

Ist das Zentrum einer zentrischen Streckung der Höhenschnittpunkt, so erhält man als Bild des Feuerbachkreises bei einem Streckfaktor 2 den Umkreis des Dreiecks.
Beweis:



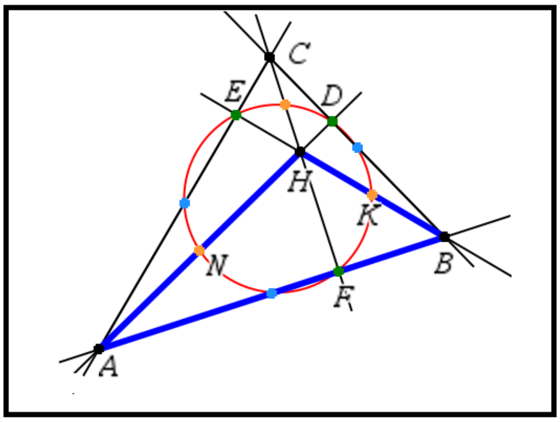


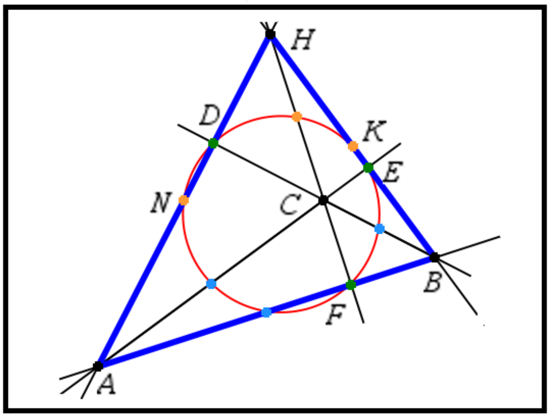
Da Q und P Seitenmittelpunkte im Dreieck ΔABC sind gilt $QP \parallel AB$ und $|\overline{CT}| = |\overline{TF}|$.
(1. Strahlensatz und seine Umkehrung).
Außerdem gilt nach Kongruenzsatz SWS, dass $\Delta PTF \cong \Delta PTC$.
Da $\overline{CF}$ Höhe auf $\overline{AB}$ ist und $QP \parallel AB$ gilt, folgt $|\sphericalangle PTC| = |\sphericalangle PTF| = 90°$.
Außerdem ist $\overline{PT}$ Seite in beiden Dreiecken und $\overline{CT}$ und $\overline{TF}$ sind gleich lang.
Damit ist dann $|\overline{CP}| = |\overline{PF}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}|$.
Außerdem ist $QR \parallel BC$, weil auch Q und R Seitenmittelpunkte sind. Daraus folgt
$\frac{|\overline{QR}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AR}|}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{2}, also\ |\overline{QR}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}| = |\overline{PF}|$.
Das heißt $PQRF$ ist ein gleichschenkliges Trapez und damit eine Sehnenviereck, hat also einen Umkreis. Mit den drei Seitenmitten P, Q und R liegt auch der Höhenfußpunkt F auf einem Kreis.
Analog kann der Zusammenhang auch für die Höhenfußpunkte E und D gezeigt werden.
Dies wird in den nächsten Bildern veranschaulicht.



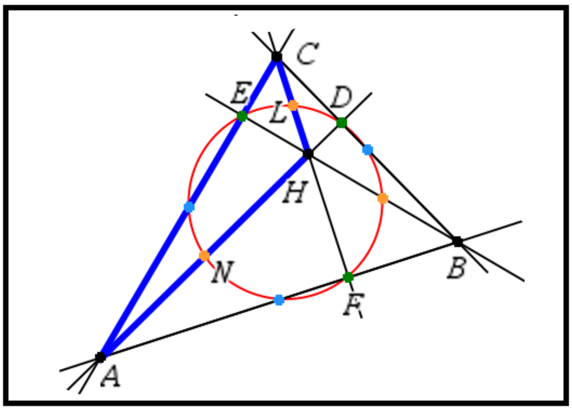
Da es zu drei Punkten genau einen Umkreis gibt, liegen demnach die Seitenmitten und die Höhenfußpunkte auf ein und demselben Kreis.

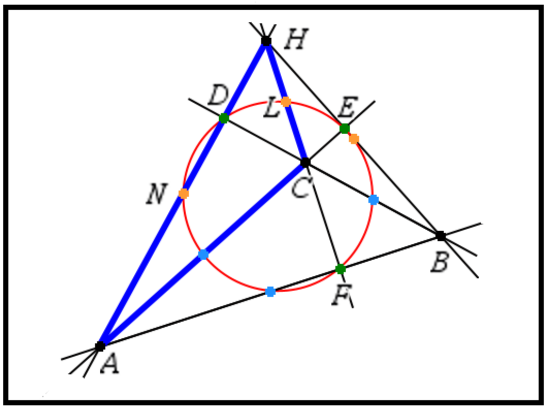
Wie in den nachfolgenden Bildern ersichtlich, hat das Dreieck ΔABH die gleichen Höhenfußpunkte wie Dreieck ΔABC. Das Dreieck ΔABH hat außerdem die Seitenmitten N und K, die im Dreieck ΔABC zwei Euler-Punkte sind.
Damit liegen also auch die Euler-Punkte N und Kauf dem Umkreis des Dreiecks ΔDEF.





Analog beweist man, dass dann auch der dritte Euler-Punkt L auf diesem Umkreis liegt.





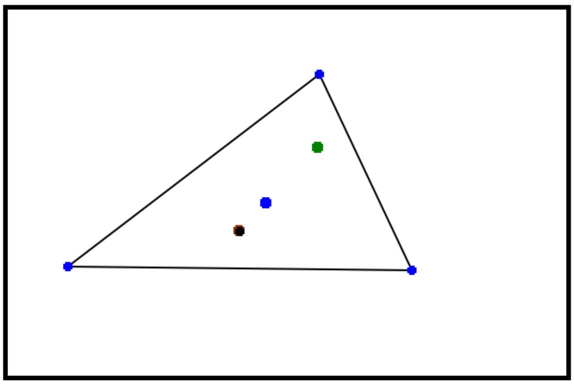
Damit liegen alle Seitenmittelpunkte, alle Höhenfußpunkte und alle Euler-Punkte auf ein und demselben Kreis, dem Feuerbachkreis.

Wegen $|\overline{HA}|=2\cdot|\overline{HN}|$, $|\overline{HB}|=2\cdot|\overline{HK}|$ und $|\overline{HC}|=2\cdot|\overline{HL}|$ folgt, dass bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckzentrum H und dem Streckfaktor 2 die Eulerpunkt N, K und L auf die Eckpunkte A, B und C abgebildet werden. Deshalb wird bei dieser Streckung der Feuerbachkreis auf den Umkreis des Dreieck ABC abgebildet und der Mittelpunkt des Feuerbachkreises ist der Mittelpunkt zwischen H und dem Umkreismittelpunkt U.
(siehe Abbildungen am Beginn des Abschnitts)

Eulersche Gerade

Aufgabe:

Auf einer Geometry-Seite ist ein Dreieck und außerdem der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten und der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks gegeben.
Ändere das Dreieck und beobachte dabei die drei Punkte.
Formuliere Deine Erkenntnis in einem Satz.



Die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden, der Mittelsenkrechten der Seiten und der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks liegen stets auf einer Geraden.

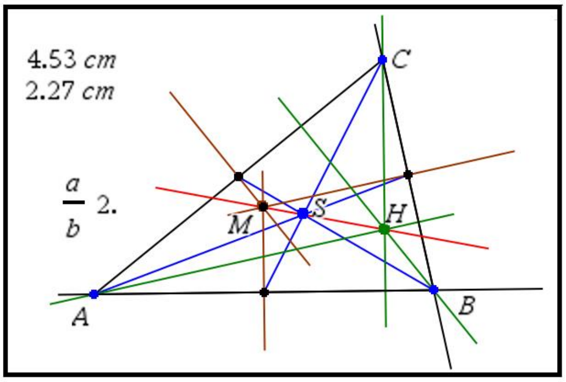
Diese Gerade nennt man Eulersche Gerade.

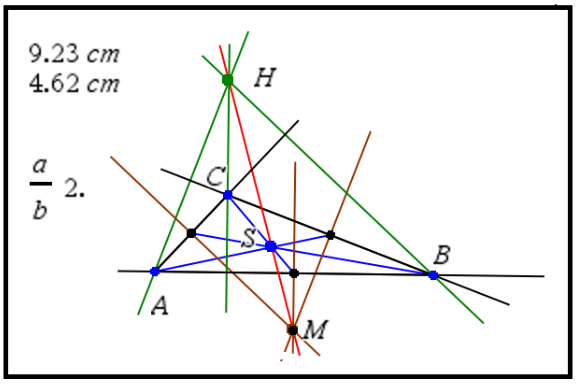
Aufgabe:

In einem Dreieck sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten und H der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks.

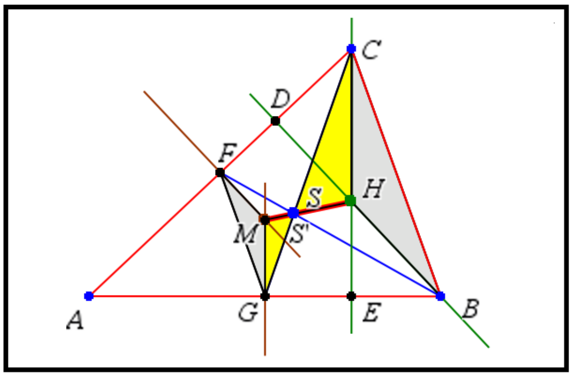
a) Konstruiere mit Hilfe der Geometry-Applikation die Punkte M, H und S und demonstriere, dass die Strecke $\overline{HM}$ durch S im Verhältnis 2:1 geteilt wird.

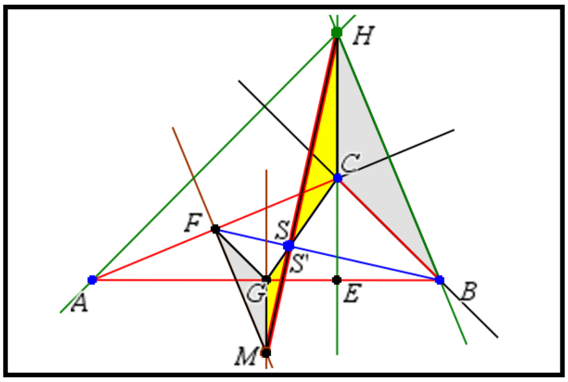
b) Beweise diesen Zusammenhang.





Beweis:





Da F und G Seitenmittelpunkte von $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ sind, folgt $FG \parallel BC$ und $|\overline{BC}| = 2 \cdot |\overline{FG}|$.
$(MF \perp AC) \wedge (BD \perp AC) \quad \Rightarrow \quad \overline{MF} \parallel \overline{HB}$
$(MG \perp AB) \wedge (CE \perp AB) \quad \Rightarrow \quad \overline{MG} \parallel \overline{HC}$

Wegen der Parallelität und der entgegengesetzten Gerichtetheit der Schenkel ergeben sich folgende homologe Winkelpaare.
$|\sphericalangle FMG| = |\sphericalangle BHC|$ und $|\sphericalangle FGM| = |\sphericalangle BCH|$

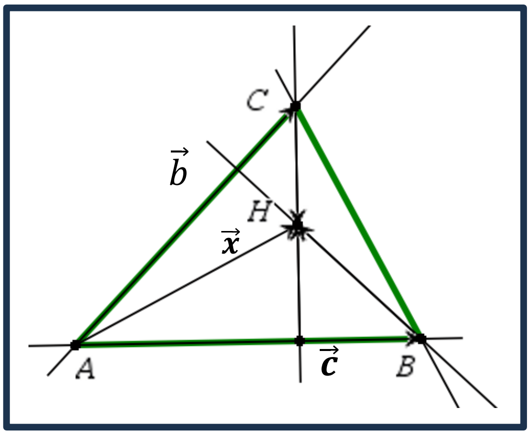
Damit ist $\Delta CBH \sim \Delta GMF$ und da auch $|\overline{BC}| = 2 \cdot |\overline{FG}|$ gilt, folgt $|\overline{CH}| = 2 \cdot |\overline{GM}|$.
Der Schnittpunkt der Geraden HM und CG sei S‘. Zu beweisen ist, dass S und S' identisch sind.
Die Dreiecke $\Delta GMS'$ und $\Delta CHS'$ sind ähnlich, denn $\sphericalangle GMS'$ und $\sphericalangle S'HC$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und $\sphericalangle MS'G$ und $\sphericalangle HS'C$ Scheitelwinkel.

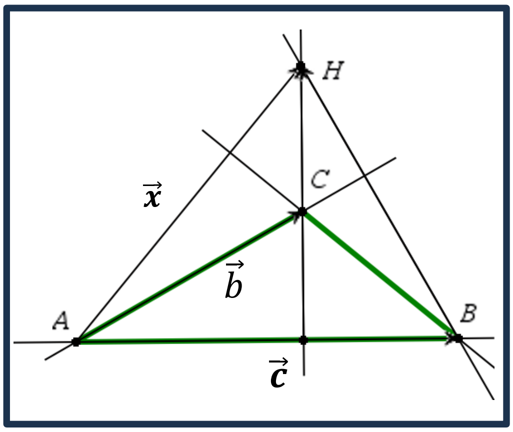
Da $|\overline{CH}| = 2 \cdot |\overline{GM}|$ gilt, ist auch $\left|\overline{HS'}\right| = 2 \cdot \left|\overline{S'M}\right|$ und $\left|\overline{CS'}\right| = 2 \cdot |\overline{S'G}|$, d.h. die Seitenhalbierende $\overline{CG}$ wird durch S' im Verhältnis 2:1 geteilt. Da S Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist, teilt S die Seitenhalbierende $\overline{CG}$ ebenfalls im Verhältnis 2:1, also sind S' und S identische Punkte und die Strecke $\overline{HM}$ wird von S ebenfalls im Verhältnis 2:1 geteilt.

Teil 3: Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Die Konstruktionen mit der Geometrie-Applikation dienen bei den nächsten vier Aufgaben vorrangig dazu, die Vorgehensweise plausibel und transparent zu machen.

Aufgabe:
Weisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung nach, dass sich in einem Dreieck die Höhen bzw. deren Verlängerungen in einem Punkt schneiden.



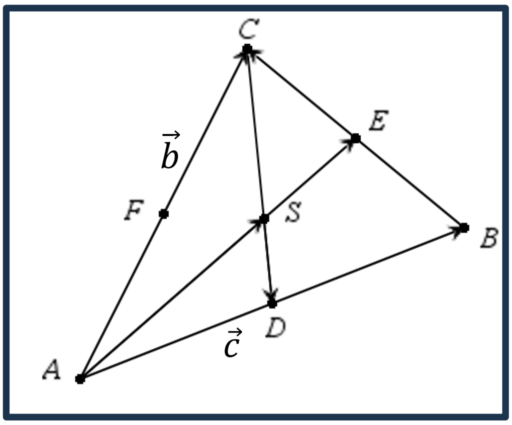


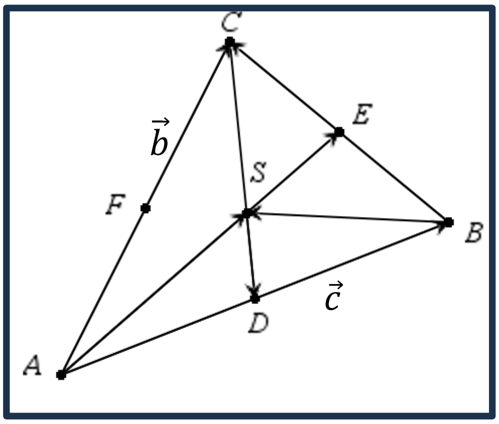
Wir betrachten zuerst die Höhen durch die Punkte C und B.

$\overrightarrow{CH} = \vec{x} - \vec{b}$
Wegen $\overrightarrow{CH} \perp \vec{c}$ gilt $\vec{c} \circ \left(\vec{x} - \vec{b}\right) = \vec{c} \circ \vec{x} - \vec{c} \circ \vec{b} = 0$.
$\overrightarrow{BH} = \vec{x} - \vec{c}$
Wegen $\overrightarrow{BH} \perp \vec{b}$ gilt $\vec{b} \circ (\vec{x} - \vec{c}) = \vec{b} \circ \vec{x} - \vec{c} \circ \vec{b} = 0$.

$\left(\vec{c} \circ \vec{x} - \vec{c} \circ \vec{b}\right) - \left(\vec{b} \circ \vec{x} - \vec{c} \circ \vec{b}\right) = 0$
$\vec{c} \circ \vec{x} - \vec{b} \circ \vec{x} = 0$
$\vec{x} \circ \left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \vec{x} \circ \overrightarrow{CB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \perp \overrightarrow{CB}$
Damit geht auch die dritte Höhe durch H.

Aufgabe:
Weisen Sie mit den Mitteln der Vektorrechnung nach, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt im Verhältnis 2:1 schneiden.





$\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{c}$ $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\vec{c}$

$r \cdot \overrightarrow{AE} + t \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\vec{c}$

$r \cdot \left(\vec{c} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - \vec{c})\right) + t \cdot \left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{c}$

$\frac{1}{2}r \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}r \cdot \vec{b} - t \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}t \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} \cdot \vec{c}$

$\frac{1}{2}r \cdot \vec{b} - t \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}r \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}t \cdot \vec{c}$

$\left(\frac{1}{2}r - t\right) \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot (1 - r - t) \cdot \vec{c}$

Wegen $\left(\vec{b} \neq \vec{o}\right) \wedge (\vec{c} \neq \vec{o}) \wedge \left(\vec{b} \nparallel \vec{c}\right)$ gilt

$\frac{1}{2}r - t = 0$

$1 - r - t = 0$

$- - - - - - - - -$

$r = 2t$

$1 - 3t = 0$

$t = \frac{1}{3} \quad r = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AE}; \quad \overrightarrow{CS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CD}$

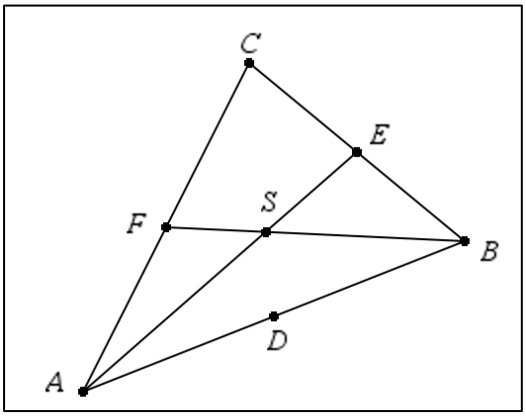
Außerdem gilt

$\overrightarrow{BF} = -\vec{c} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$ und $\overrightarrow{BS} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \vec{c}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b}$.

Wegen $\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BF} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{BS}$ gilt $\overrightarrow{BS} \parallel \overrightarrow{BF}$ und damit ist S auch ein Punkt von BF.

Insgesamt folgt:
Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Punkt S und teilen einander im Verhältnis 2:1.

Aufgabe:
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden bei gegebenen Eckpunktskoordinaten.



$A(x_A|y_A|z_A)$; $B(x_B|y_B|z_B)$; $C(x_C|y_C|z_C)$ O sei der Koordinatenursprung.

$$E\left(\frac{x_B+x_C}{2}\,\middle|\,\frac{y_B+y_C}{2}\,\middle|\,\frac{z_B+z_C}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$$

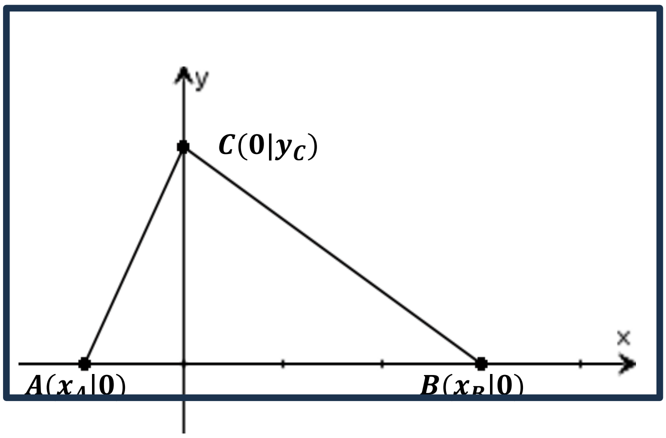
$$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}\frac{x_B+x_C}{2}-x_A\\\frac{y_B+y_C}{2}-y_A\\\frac{z_B+z_C}{2}-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_A+\frac{x_B+x_C}{3}-\frac{2}{3}x_A\\y_A+\frac{y_B+y_C}{3}-\frac{2}{3}y_A\\z_A+\frac{z_B+z_C}{3}-\frac{2}{3}z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\\\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{pmatrix}$$

$$S\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\,\middle|\,\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\,\middle|\,\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

Noch einmal Eulersche Gerade mit den Mitteln der Analytischen Geometrie

Aufgabe:
Der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden, der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten der Seiten und der Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks liegen auf einer Geraden und S teilt die Strecke $\overline{HM}$ im Verhältnis 2:1.
Beweisen Sie diesen Sachverhalt mit den Mitteln der Analytischen Geometrie.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit lässt sich jedes Dreieck so in ein Koordinatensystem legen, dass zwei Eckpunkte auf der x-Achse liegen und der dritte Eckpunkt Element des positiven Teils der y-Achse ist. (siehe Abbildung)



Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden hat dann folgende Koordinaten:
$S\left(\frac{x_A + x_B}{3} \mid \frac{y_C}{3}\right)$

Ermittlung des Höhenschnittpunktes
Zuerst ermittelt man die Gleichung einer Geraden h, die auf der Höhe liegt, die im Punkt A beginnt:
Diese Gerade hat einen Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} y_C \\ x_B \end{pmatrix}$, denn es gilt $\vec{a} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} y_C \\ x_B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -x_B \\ y_C \end{pmatrix} = 0$.
$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_A \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} y_C \\ x_B \end{pmatrix}$
Da der gesuchte Höhenschnittpunkt H auf der y-Achse liegt, erhält man diesen durch folgende Rechnung:
$x_H = 0 = x_A + t \cdot y_C$
$t = -\frac{x_A}{y_C}$
$y_H = 0 + \left(-\frac{x_A}{y_C}\right) \cdot x_B = -\frac{x_A \cdot x_B}{y_C}$
$H\left(0 \mid -\frac{x_A \cdot x_B}{y_C}\right)$

Ermittlung des Schnittpunktes M der Mittelsenkrechten der Dreieckseiten:
Für die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ gilt:
$x = \frac{x_A + x_B}{2}$
Eine Gleichung der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ lautet:
$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_B}{2} \\ \frac{y_C}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} y_C \\ x_B \end{pmatrix}$
Daraus folgt:
$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_B}{2} + t \cdot y_C \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x_A}{2y_C}$
$y_M = \frac{y_C}{2} + \frac{x_A}{2y_C} \cdot x_B$
$M\left(\frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_C}{2} + \frac{x_A \cdot x_B}{2y_C}\right)$

Es gilt weiter

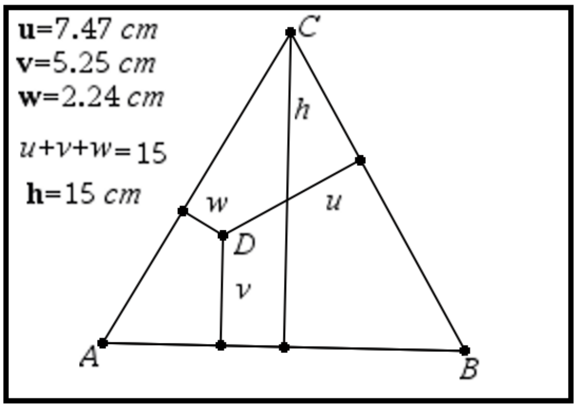
$$\overrightarrow{HS} = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{3} \\ \frac{y_C}{3} + \frac{x_A \cdot x_B}{y_c} \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} - \frac{x_A + x_B}{3} \\ \frac{y_c}{2} + \frac{x_A \cdot x_B}{2y_c} - \frac{y_c}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{6} \\ \frac{y_C}{6} + \frac{x_A \cdot x_B}{2y_c} \end{pmatrix}$$

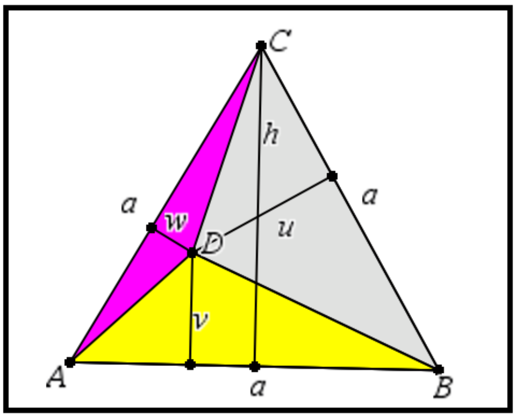
$$2 \cdot \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{3} \\ \frac{y_C}{3} + \frac{x_A \cdot x_B}{y_c} \end{pmatrix} = \overrightarrow{HS}$$

Daraus folgt, dass die Punkte H, S und M auf einer Geraden liegen und S die Strecke $\overline{HM}$ im Verhältnis 2:1 teilt.

Der Fermatpunkt

Satz von Viviani:
Die Summe der Abstände irgendeines Punktes aus dem Inneren eines gleichseitigen Dreiecks von den Seiten des Dreiecks ist eine Konstante, die Höhe des gleichseitigen Dreiecks.





Die linke Abbildung zeigt, dass man durchaus ein wenig experimentieren sollte, so dass der Satz vor dem Beweis selbst formuliert werden kann.

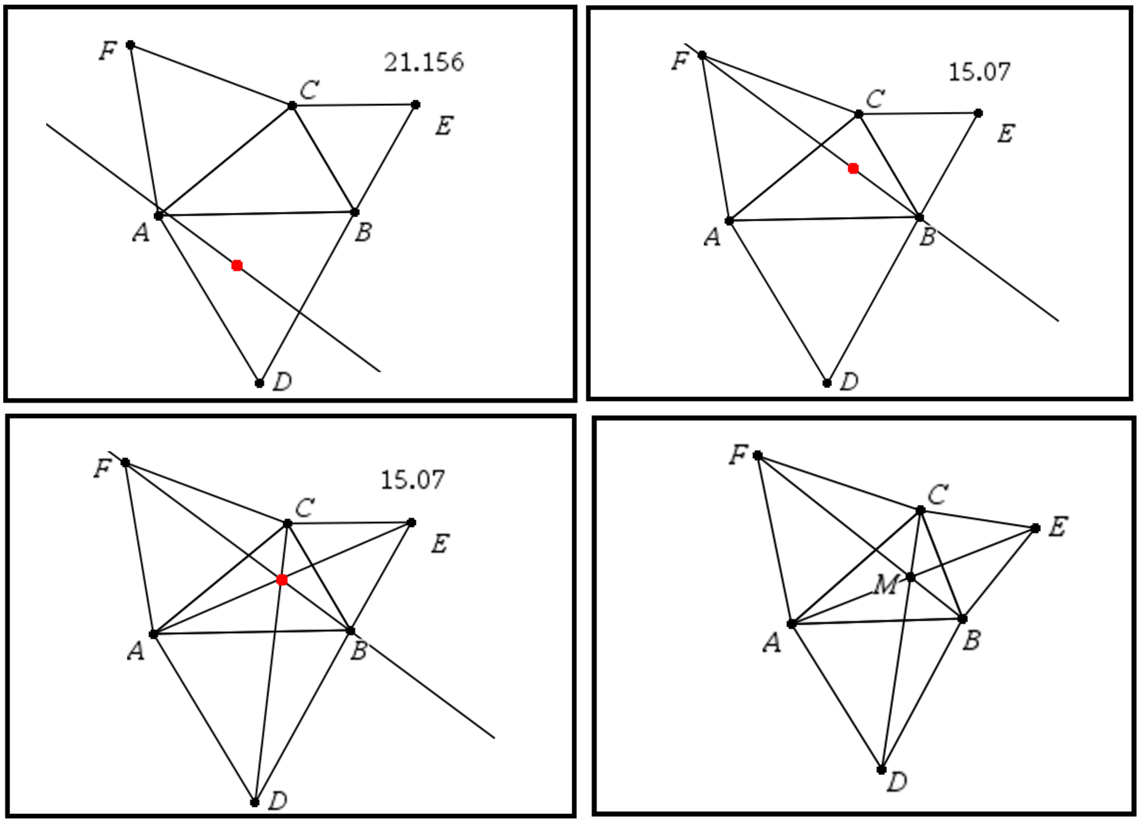
Der Beweis erfolgt dann über die Flächeninhalte des Dreiecks ΔABC und der farbig dargestellten Teildreiecke.

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot u + \frac{1}{2} \cdot a \cdot w + \frac{1}{2} \cdot a \cdot v$$
$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (u + v + w)$$
$$h = u + v + w$$

Für die nächste Aufgabe muss die Ausgangssituation als Dokument vorgegeben werden. Dazu muss die fertige Konstruktion und die Berechnung der Abstandssumme erfolgen (siehe Lösung der nächste Aufgabe). Zusätzlich wird eine Parallele zu BF konstruiert und auf ihr ein Punkt P (rot dargestellt). Danach werden die Strecken $\overline{BF}$, $\overline{AE}$ und $\overline{CD}$ und Punkt M ausgeblendet. (siehe nächste Abbildung)

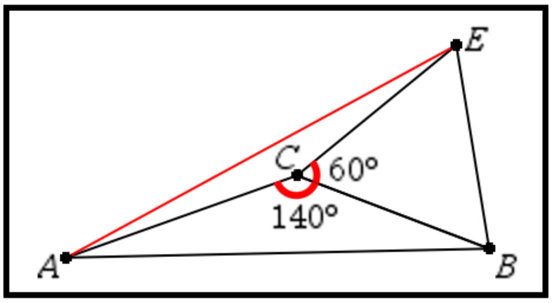
Aufgabe:
Verschiebe den rot dargestellten Punkt im inneren des Dreiecks. Versuche den Ort zu finden, für den die angezeigte Summe der Abstände dieses Punktes von den Eckpunkten des Dreiecks minimal wird.
Formuliere eine Vermutung dafür, wie man diesen Punkt exakt konstruieren kann.

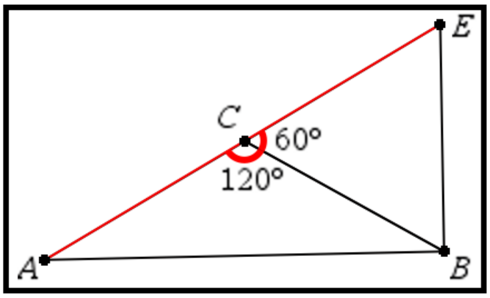
Hinweis: Die Aufsatzdreiecke ΔADB, ΔBEC und ΔACF sind gleichseitig.



Vermutung:
Innerhalb des Dreiecks ΔABC befindet sich genau ein Punkt, **der Fermatpunkt M**, für den die Summe seiner Abstände zu den Eckpunkten des Dreiecks minimal ist.
Man findet diesen Punkt durch folgende Konstruktion:
Zuerst werden gleichseitige Aufsatzdreiecke zu jeder Seite des Dreiecks ΔABC konstruiert. Der Schnittpunkt der Strecken $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ ist der gesuchte Punkt M.

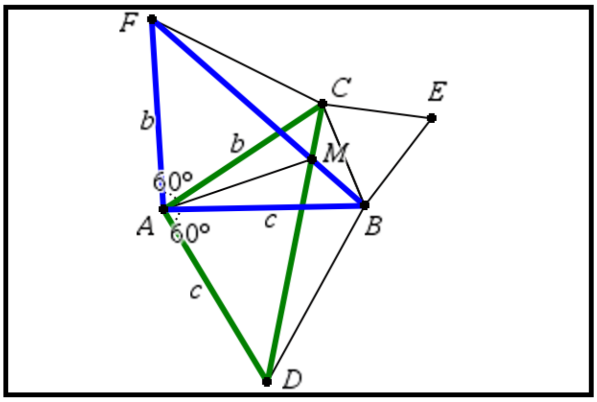
Diese Konstruktion funktioniert jedoch nur, wenn die Strecken $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ jeweils eine Seite des Dreiecks ΔABC schneiden.
Ist also o.B.d.A. $|\sphericalangle ACB| \geq 120°$, so ist $|\sphericalangle ACE| \geq 180°$ und $\overline{AE}$ geht durch C oder verläuft ganz außerhalb der Dreiecks ΔABC. Damit liegt M nicht innerhalb des Dreiecks ΔABC.





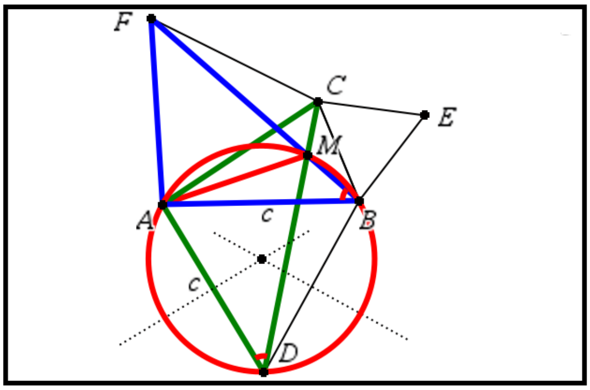
Deshalb wird vorausgesetzt, dass das Dreieck ΔABC nur Innenwinkel besitzt,
die kleiner 120° sind.

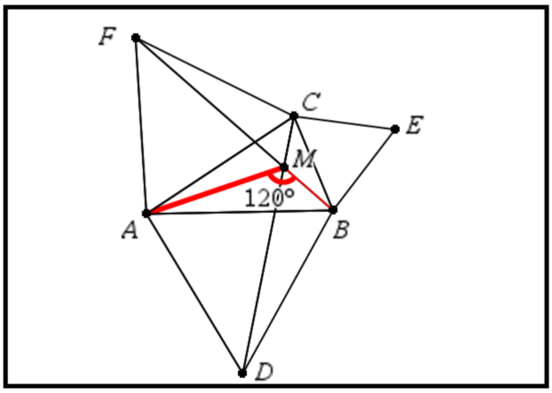
Beweis:
Teil 1: Es ist zu beweisen, dass sich $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ in einem Punkt schneiden.



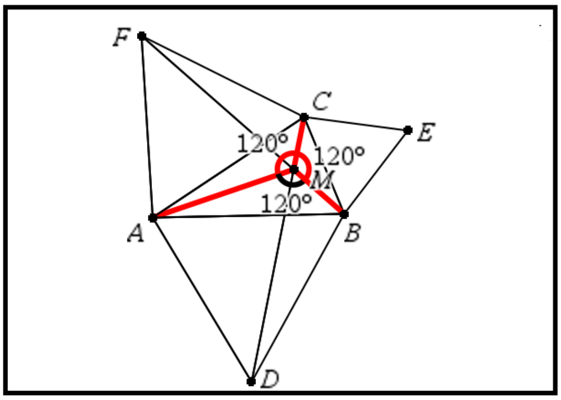
Es sei M der Schnittpunkt der Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{BF}$.
Zeigt man, dass $|\sphericalangle EMA| = 180°$ gilt, so geht die Strecke $\overline{AE}$ ebenfalls durch M und die Strecken $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ schneiden sich im Punkt M.
Nach dem Kongruenzsatz SWS gilt $\Delta ABF \cong \Delta ADC$.
Begründung:
In beiden Dreiecken schließen die Seiten b und c einen gleich großen Winkel ein,
denn es gilt: $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle BAF| = [\sphericalangle BAC[+ 60°$
Wegen $\Delta ABF \cong \Delta ADC$ folgt $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle FBA|$.

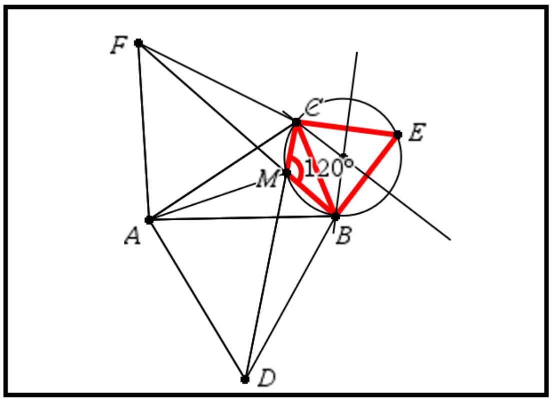
Aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes folgt dann, dass $\sphericalangle MDA$ und $\sphericalangle MBA$ Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AM}$ des Kreises durch die Punkte A, D, B und M sind.
$ADBM$ ist also ein Sehnenviereck und wegen $|\sphericalangle BDA| = 60°$ gilt $|\sphericalangle AMB| = 180° - 60° = 120°$.



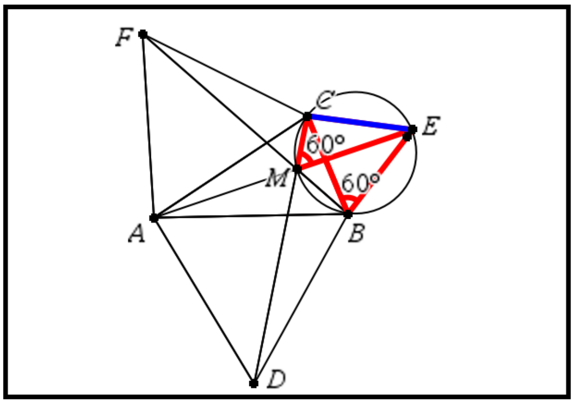


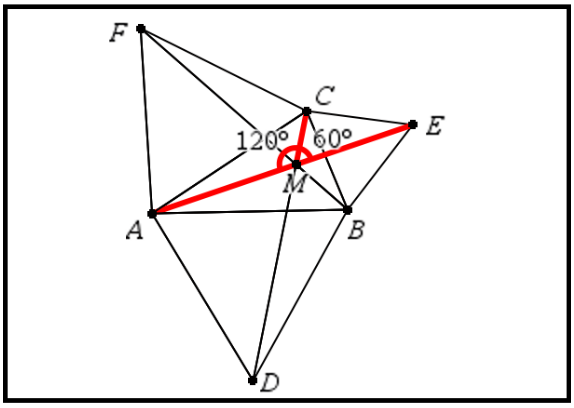
Analog erhält man, dass $|\sphericalangle CMA| = |\sphericalangle BMC| = 120°$ und $CMBE$ ein Sehnenviereck ist.





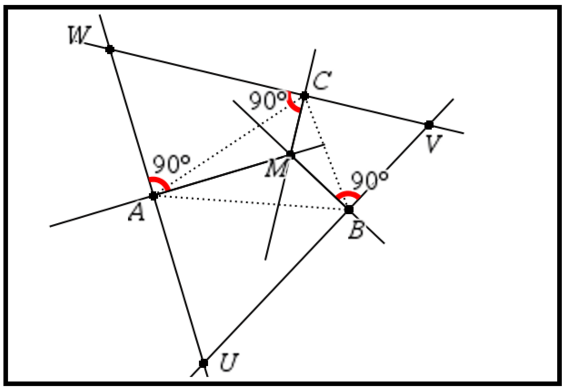
Da $|\sphericalangle EBC| = 60°$ und die Winkel $\sphericalangle EBC$ und $\sphericalangle EMC$ Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{CE}$, sind, folgt $|\sphericalangle EMC| = 60°$.
Damit erhält man $|\sphericalangle EMA| = |\sphericalangle EMC| + |\sphericalangle CMA| = 60° + 120° = 180°$ q.e.d.

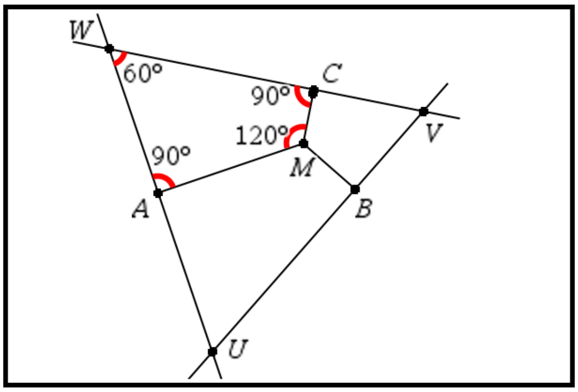




Beweis Teil 2:

Es ist Folgendes zu beweisen:
Ist P ein Punkt innerhalb des Dreieck ΔABC und $P \neq M$, so gilt
$|\overline{MA}| + |\overline{MB}| + |\overline{MC}| < |\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}|$.
Auf den Geraden MA, MB und MC wird jeweils in den Punkten A, B und C eine Senkrechte errichtet. Diese schneiden sich in den Punkten U, V und W.



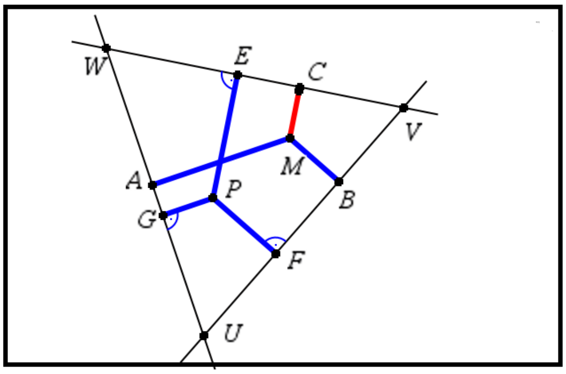


Dass $|\sphericalangle CMA| = 120°$ gilt, wurde bereits im ersten Teil des Beweises gezeigt.
Also gilt wegen der Winkelsumme in Vierecken:
$|\sphericalangle CWA| = 360° - (|\sphericalangle CMA| + |\sphericalangle WAM| + |\sphericalangle WCM|) = 360° - (120° + 90° + 90°) = 60°$

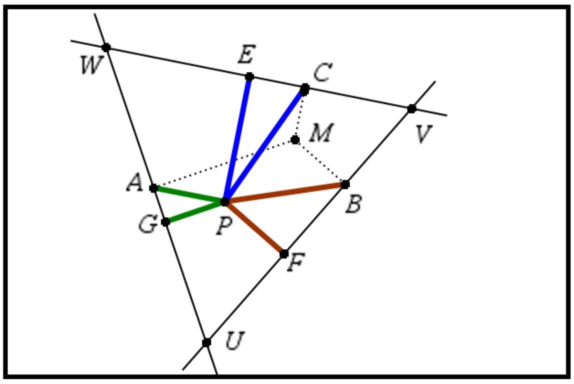
Analog erhält man $|\sphericalangle CVB| = 60°$ und wegen der Winkelsumme im Dreieck dann auch $|\sphericalangle WUV| = 60°$. Da jeder Innenwinkel im Dreieck ΔUVW 60° beträgt, ist dieses Dreieck gleichseitig.

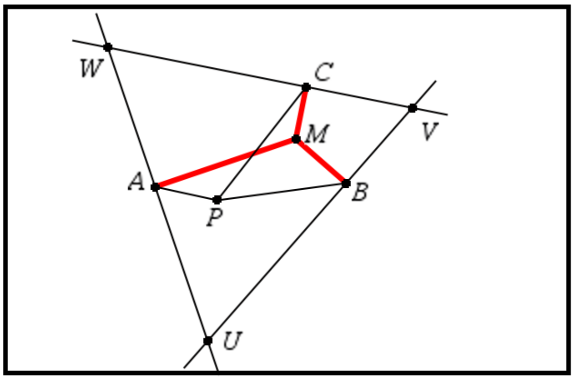
P sei ein von M verschiedener Punkt innerhalb des gleichseitigen Dreiecks ΔUVW und $|\overline{PE}|$, $|\overline{PF}|$ und $|\overline{PG}|$ die Abstände des Punktes P von den Seiten des Dreiecks ΔUVW.

Nach dem Satz von Viviani gilt:
$|\overline{PG}| + |\overline{PF}| + |\overline{PE}| = |\overline{MA}| + |\overline{MB}| + |\overline{MC}|$



Da die Länge des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade die kürzeste Verbindung von Punkt und Gerade ist, gelten folgende Ungleichungen:
$|\overline{PG}| < |\overline{PA}|$, $|\overline{PF}| < |\overline{PB}|$ und $|\overline{PE}| < |\overline{PC}|$





Daraus folgt, dass $|\overline{PG}| + |\overline{PF}| + |\overline{PE}| < |\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}|$ gilt.
Wegen $|\overline{PG}| + |\overline{PF}| + |\overline{PE}| = |\overline{MA}| + |\overline{MB}| + |\overline{MC}|$ erhält man dann also auch die zu beweisende Ungleichung $|\overline{MA}| + |\overline{MB}| + |\overline{MC}| < |\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}|$. q.e.d.

Quellen:

1. E. Donath, „Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks“
Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969

2. https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/geometrie/beweis/feuerbach/feuerbachkreis.pdf

3. Tasja Werner, „Der Fermatpunkt – eine Erweiterung der Schulgeometrie“, Universität Bremen, 2008