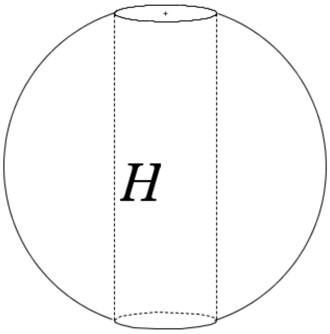
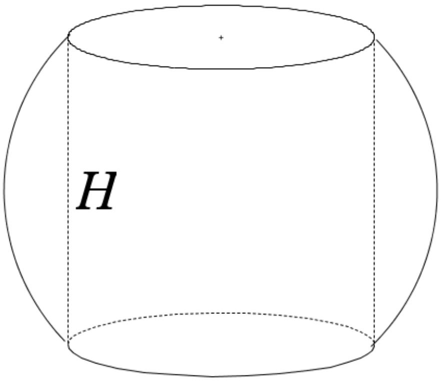
Das Volumen der durchbohrten Kugel

Den auf dem Foto[1] abgebildeten Lampion kann man sich modellhaft entstanden denken durch die Bohrung eines Zylinders durch den Mittelpunkt einer Kugel.
Die beiden Schrägbilder veranschaulichen ein solches einfaches Modell für zwei Kugeln mit unterschiedlichen Radien, aber gleicher Höhe des inneren Zylinders.





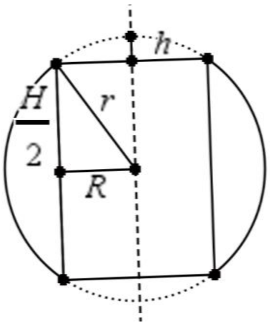
In „Hemmes mathematische Rätsel“ vom 16.11.2021 bei Spektrum online[2] ist zu einem solchen Sachverhalt folgende Aufgabe zu finden:

„Durch die Mitte einer Kugel wurde ein zylindrisches Loch gebohrt. Die Wandhöhe H der Bohrung beträgt sechs Zentimeter. Wie groß ist das Restvolumen der Kugel, also das Kugelvolumen minus Volumen der Bohrung?“

Das Überraschende bei dieser Aufgabe besteht darin, dass das Resultat nicht vom Radius der Kugel abhängig ist, wenn man alle solche Restkörper mit der gleichen Zylinderhöhe H betrachtet.
Im Folgenden wird eine Unterrichtsskizze vorgestellt für eine Untersuchung dieser Problemstellung im Mathematikunterricht. Gleichzeitig wird darauf hingewiesen, wie man den wissenschaftlichen Taschenrechner TI-30X Plus MathPrint™ bzw. TI-30X Pro MathPrint™ dabei einsetzen kann.

Ansatz: Das Volumen V_{Rest} der durchbohrten Kugel ergibt sich aus dem Volumen der Kugel abzüglich des Zylindervolumens und der Volumina der beiden Kugelkappen.

- Kugelvolumen: $V_1 = \frac{4}{3} \cdot r^3$ mit r als Radius der Kugel
- Volumen des Zylinders: $V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot H$ mit R als Radius des Grundkreises und H als Höhe



[1] Foto privat.
[2] https://www.spektrum.de/raetsel/welches-volumen-hat-die-durchbohrte-kugel/1941961

- Volumen einer Kugelkappe: $V_3 = \frac{\pi}{6} \cdot h \cdot (3 \cdot R^2 + h^2)$ mit h als Höhe der Kappe und R als Radius der Grundfläche (einer Formelsammlung entnommen)

Zunächst lässt sich feststellen: $R^2 = r^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2$ (Satz des Pythagoras) und $h = r - \frac{H}{2}$.

Aufgabe 1

Berechnen Sie für r = 5 cm und H = 6 cm sowie für r = 100 cm und H = 6 cm das Restvolumen der durchbohrten Kugel. Verwenden Sie den TI-30X Plus / Pro MathPrint unter Nutzung des Variablenspeichers.

Lösung:

Hinweise: Zum Speichern die Taste x nutzen. Variablen mit (ggf. mehrfacher) Betätigung von [x^{yzt}_{abcd}] anzeigen lassen. Eine gespeicherte Variable mit [2nd][sto→] wieder aufrufen.

<table>
<tr><td colspan="2">Die gegebenen Größen für den Radius der Kugel und die Höhe des Zylinders werden unter den Variablen a bzw. b gespeichert.</td></tr>
<tr><td>5→a 5
6→b 6</td><td>100→a 100
6→b 6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mithilfe dieser Variablen werden der Radius des Zylinders $R = \sqrt{r^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2}$ und die Höhe der Kugelkappe $h = r - \frac{H}{2}$ berechnet und unter den Variablen c bzw. d gespeichert.</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$→c 4
a−b/2→d 2</td><td>$\sqrt{a^2-(b/2)^2}$→c
99.95498987
a−b/2→d
97</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mithilfe der bisher definierten Variablen werden das Kugelvolumen $V_1 = \frac{4}{3} \cdot r^3$, das Zylindervolumen $V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot H$ sowie das Volumen der Kugelkappe $V_3 = \frac{\pi}{6} \cdot h \cdot (3 \cdot R^3 + h^2)$ berechnet und unter den Variablen x, y bzw. z gespeichert:</td></tr>
<tr><td>$\frac{4}{3}$π*a³→x $\frac{500\pi}{3}$
π*c²*b→y 96π
$\frac{\pi}{6}$*d*(3*c²+d²)→z
$\frac{52\pi}{3}$</td><td>$\frac{4}{3}$*π*a³→x
4188790.205
π*c²*b→y
188325.9132
$\frac{\pi}{6}$*d*(3*c²+d²)→z
2000175.597</td></tr>
<tr><td colspan="2">Das Restvolumen $V_{Rest} = V_1 - V_2 - 2 \cdot V_3$ wird dann mithilfe der Variablen x, y und z berechnet:</td></tr>
<tr><td>x−y−2*z 36π
DEG
36π◂▸
113.0973355</td><td>x−y−2*z
113.097335</td></tr>
</table>

Beide Male erhalten wir das gleiche Ergebnis. Ist das ein Zufall?
Wir untersuchen weitere Beispiele.

Aufgabe 2:
Geben Sie an, wie groß der Kugelradius bei H = 6 cm mindestens sein muss. Bestimmen Sie einen solchen Kugelradius als ganzzahlige Zufallszahl, und ermitteln Sie für diesen Kugelradius das Restvolumen (als Vielfache von π). Gehen Sie arbeitsteilig vor.

Lösung:
Der Kugelradius muss mindestens so groß sein wie die halbe Höhe des Zylinders: $r \geq \frac{H}{2}$. Für H = 6 gilt also $r \geq 3\ cm$.
Der Radius der Kugel wird als eine ganzzahlige Zufallszahl aus dem Intervall [3; 100] ermittelt:

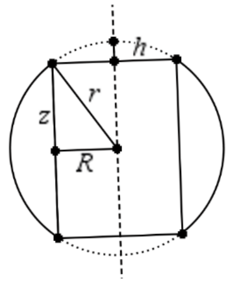
Mit demselben Vorgehen wie umseitig ergibt sich folgender Rechengang:

Radius r als Zufallszahl	$randint(3{,}100) \to a$
Konstante Zylinderhöhe H = 6 cm	$6 \to b$
Grundkreisradius R des Zylinders	$\sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \to c$
Höhe h der Kugelkappe	$a - \frac{b}{2} \to d$
Volumen V_1 der Kugel	$\frac{4}{3}\pi \cdot a^3 \to x$
Volumen V_2 des Zylinders	$\pi \cdot c^2 \cdot b \to y$
Volumen V_3 einer Kugelkappe	$\frac{\pi}{6} \cdot d \cdot (3 \cdot c^2 + d^2) \to z$
Restvolumen $V_{Rest} = V_1 - V_2 - 2 \cdot V_3$	$x - y - 2 \cdot z$

Für jede dieser Zufallszahlen (sie müssen nicht ganzzahlig, aber mindestens gleich 3 sein), ergibt sich nach der Rechnung dasselbe Ergebnis, nämlich $36\pi\ cm^3 \approx 113\ cm^3$.

Das ist doch ein Grund zum Staunen und eine Anregung zum Verallgemeinern.

Aufgabe 3:



Leiten Sie eine Formel für das Restvolumen der Kugel in Abhängigkeit von der Höhe H des durch die Bohrung entstandenen Zylinders her.

Hinweis: Setzen Sie zur Vereinfachung der Rechnung $\frac{H}{2} = z$.

Es gilt wie oben schon beschrieben $R^2 = r^2 - z^2$ (Satz des Pythagoras) und $h = r - z$.

Lösung für die Mittelstufe:

Kugel: $V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$;

Zylinder: $V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot 2z = 2\pi \cdot z \cdot (r^2 - z^2) = 2\pi \cdot r^2 \cdot z - 2\pi \cdot z^3$;

Kugelkappe: $V_3 = \frac{\pi}{6} \cdot h \cdot (3 \cdot R^3 + h^2)$

$V_3 = \frac{\pi}{6} \cdot (r - z) \cdot (3 \cdot (r^2 - z^2) + (r - z)^2) = \frac{\pi}{6} \cdot (r - z) \cdot (3r^2 - 3z^2 + r^2 - 2r \cdot z + z^2)$

$V_3 = \frac{\pi}{6} \cdot (r - z) \cdot (4r^2 - 2z^2 - 2r \cdot z) = \frac{\pi}{3} \cdot (r - z) \cdot (2r^2 - z^2 - r \cdot z)$

$V_3 = \frac{\pi}{3} \cdot (2r^3 - r \cdot z^2 - r^2 \cdot z - 2r^2 \cdot z + z^3 + r \cdot z^2)$

$V_3 = \frac{\pi}{3} \cdot (2r^3 - 3r^2 \cdot z + z^3)$

$V_{Rest} = V_1 - V_2 - 2 \cdot V_3$

$V_{Rest} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 - (2\pi \cdot r^2 \cdot z - 2\pi \cdot z^3) - 2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} \cdot (2r^3 - 3r^2 \cdot z + z^3)\right)$

$V_{Rest} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 - 2\pi \cdot r^2 \cdot z + 2\pi \cdot z^3 - 4\frac{\pi}{3} \cdot r^3 + \frac{2}{3}\pi \cdot 3r^2 \cdot z - \frac{2}{3}\pi \cdot z^3$

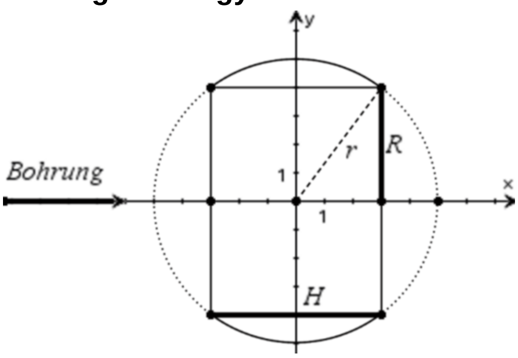
$V_{Rest} = \cancel{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3} - \cancel{2\pi \cdot r^2} \cdot z + 2\pi \cdot z^3 - \cancel{4\frac{\pi}{3} \cdot r^3} + \cancel{2\pi \cdot r^2} \cdot z - \frac{2}{3}\pi \cdot z^3$

$V_{Rest} = \left(2 - \frac{2}{3}\right) \cdot \pi \cdot z^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot z^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} \cdot H^3$

Die Formel für das Restvolumen lautet $\boldsymbol{V_{Rest} = \frac{\pi}{6} \cdot H^3}$.

Für H = 6 cm ist - wie vorn in Beispielen berechnet - stets $V_{Rest} = \frac{\pi}{6} \cdot (6\ cm)^3 = 36\pi\ cm^3$.

Lösung für die gymnasiale Oberstufe mit Integralrechnung:



Wir legen die Kugel so in ein Koordinatensystem, das die zu berechnenden Volumina als Rotationskörper bei Rotation um die x-Achse bestimmt werden können.

Wir betrachten für den Kreisbogen die Funktion $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, sowie für die Parallele zu x-Achse (Mantellinie des Zylinders) die Funktion $f_2(x) = R = \sqrt{r^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2}$, beide im Intervall $0 \le x \le \frac{H}{2}$.

Bei Rotation von f_1 um die x-Achse entsteht als Restkörper eine Kugelteilstück ohne die beiden Kugelkappen und bei Rotation von f_2 um die x-Achse entsteht ein Zylinder. Die Differenz der Volumina beider Körper entspricht dem gesuchten Restvolumen.

$$V_1 = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{H}{2}} \left(f_1(x)\right)^2 dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{H}{2}} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{H}{2}} (r^2 - x^2)\, dx$$

$$V_1 = 2 \cdot \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3\right]_0^{\frac{H}{2}} = 2 \cdot \pi \cdot \left(r^2 \cdot \frac{H}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^3\right)$$

$$V_2 = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{H}{2}} \left(f_2(x)\right)^2 dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{H}{2}} \left(\sqrt{r^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2}\right)^2 dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{H}{2}} \left(r^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2\right) dx$$

$$V_2 = 2 \cdot \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \left(\frac{H}{2}\right)^2 \cdot x\right]_0^{\frac{H}{2}} = 2 \cdot \pi \cdot \left[r^2 \cdot \frac{H}{2} - \left(\frac{H}{2}\right)^3\right]$$

$$V_1 - V_2 = 2 \cdot \pi \cdot \left(r^2 \cdot \frac{H}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^3\right) - 2 \cdot \pi \cdot \left[r^2 \cdot \frac{H}{2} - \left(\frac{H}{2}\right)^3\right] = 2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} \cdot H^3$$

Anmerkung: Alle Zeichnungen wurden erstellt mit TI-Nspire CX CAS.

Literaturhinweise

„Hemmes mathematische Rätsel" vom 16.11.2021 bei Spektrum online
https://www.spektrum.de/raetsel/welches-volumen-hat-die-durchbohrte-kugel/1941961

„Professor Stewarts Mathematisches Sammelsurium, Teil1"; Seite 67/ 68 und 322 bis 324; Genehmigte Lizenzausgabe 219, Nikol Verlagsgesellschaft, Hamburg

Anhang:
Mit dem CAS-Rechner TI-Nspire CX CAS lassen sich die allgemeinen Herleitungen rasch und effizient durchführen. Bei der Lösung ist zu beachten, dass der CAS-Rechner TI-Nspire CX CAS nicht zwischen Groß- und Kleinschreibung von Variablen unterscheidet. Deshalb kann man nicht h und H verwenden, hier wird H durch“2z“ bzw. „höhe“ ersetzt:

$v1:=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$	$\frac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3}$
$v2:=\pi\cdot\left(r^2-z^2\right)\cdot 2\cdot z$	$2\cdot\pi\cdot\left(r^2-z^2\right)\cdot z$
$v3:=\frac{\pi}{6}\cdot(r-z)\cdot\left(3\cdot\left(r^2-z^2\right)+(r-z)^2\right)$	$\frac{\pi\cdot(r-z)\cdot\left(2\cdot r^2-r\cdot z-z^2\right)}{3}$
$v1-v2-2\cdot v3$	$\frac{4\cdot\pi\cdot z^3}{3}$
$\frac{4\cdot\pi\cdot z^3}{3}\Big\vert z=\frac{höhe}{2}$	$\frac{höhe^3\cdot\pi}{6}$

$f1(x):=\sqrt{r^2-x^2}:f2(x):=\sqrt{r^2-\left(\frac{höhe}{2}\right)^2}$	*Fertig*
$2\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{höhe}{2}}(f1(x))^2\,dx-2\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{höhe}{2}}(f2(x))^2\,dx$	$\frac{höhe^3\cdot\pi}{6}$

Autor:
Dr. Wilfried Zappe