Norbert Frost

Schokolade esse ich für mein Leben gern !

Einführung in die Testtheorie unter Nutzung des TI 83 Plus in 3 Doppelstunden

Die Grundidee zum im Folgenden beschriebenen Einstieg in die Testtheorie entstammt einem Artikel der Zeitschrift „mathematiklehren “ (Bd.85, Dez.1997) der beiden Autoren Dr. W. Riemer und W. Petzold. Tabellen zu Computersimulationen wurden aus dem Artikel übernommen und im Unterricht integriert.

Abb.1

Der Schokoladentest - Teil 1

Vier Sorten (Alpen)Vollmilchschokolade (Milka ‚M', Lind ‚L', Alpia ‚A' und RitterSport ‚R') wurden geraspelt und auf vier nummerierten Tellern auf verschiedenen Tischen im Unterrichtsraum platziert. Jeder Schüler erhielt zum Test, ob er die Marke am Geschmack erkenne, einen Löffel und konnte die Sorten (wiederholt) probieren, um dann seine Entscheidung auf einem Zettel festzuhalten (z.B. 1: A; 2: R; 3: L; 4: M). Jede Sorte trat nur einmal auf. Die Zettel wurden von mir eingesammelt und ‚hochfeierlich' in einem verschlossenen und versiegelten Umschlag verwahrt. Bereits während des Probierens setzte bei den Schülern eine rege Diskussion über die Qualität, die Konsistenz, die Farbe, die Süße, etc. ein.

Ohne weitere Rückfragen und Arbeitsaufträge wählte ich als Tafelanschrieb die folgende Frage

"Sind wir alle Nullschmecker?"

Empörung wurde laut, die Hälfte des Kurses war der Meinung mindestes 2 Schokoladensorten richtig getippt zu haben, dabei wurde der eigene häufige Schokoladenkonsum sowie die Besonderheiten der einen oder anderen Sorte genannt. Ich forderte einzelne Schüler auf, Schätzwerte über die Trefferzahl anzugeben. Sechs Ergebnisse wurden in einer Tabelle an der Tafel festgehalten. Anschließend mussten alle Schüler ein Votum für einen dieser Vorschläge abgeben.

Vorschlag eines Schülers		Geschätzte Trefferzahl in Prozent					Votum (21 Schüler)
		0	1	2	3	4	
1	Alicija	5	25	50	15	5	-
2	Peter	10	25	30	25	10	-
1	Alicija•	15	27	50	0	8	3
2	Peter•	10	25	55	0	10	3
3	Henning	15	25	40	0	20	7
4	Aileen	15	30	50	0	5	6
5	Pamela	12	36	44	0	8	1
6	Florian	20	30	42	0	8	1

Tab.1 Geschätzte Wahrscheinlichkeiten

Die Schätzwerte der Tabelle spiegelten die vorher in der Diskussion aufgetretenen Selbsteinschätzungen der Schüler wieder.
Ich kehrte zurück zur Tafelüberschrift und forderte die Schüler auf, eine Erklärung für einen "Nullschmecker“ zu geben. Schnell wurde klar, dass es sich um ein 'zufälliges Raten' handeln musste. Es wurde die Idee entwickelt, das 'Schmecken der Schokoladensorten' als Zufallsexperiment aufzufassen und die Wahrscheinlichkeit jeder beliebigen Reihenfolge zu ermitteln.

An jeden Schüler wurden nun 4 Karten (Kreuz Kr, Pik P, Herz H und Karo Ka) verteilt. Nach kurzer Überraschung (Was haben denn die Karten mit der Schokolade zu tun?) und Diskussion ergab sich, dass der Schokoladentest als zufälliges Experiment nun mit den Karten simuliert werden konnte. Jeder Schüler mischte seine Karten, deckte nacheinander je eine Karte auf und verglich mit einem Ergebnis, das ich zufällig gezogen und an die Tafel geschrieben hatte, z. B. P Ka Kr H.
Das Experiment wurde mehrfach wiederholt und die Ergebnisse wurden wiederum in einer Tabelle (Tab.2) festgehalten.
Nach Diskussion über Sinn und Zweck der Simulation regte die Schülerin Aileen an, die Schokoladensorten mit den Buchstaben M, L, A und R abzukürzen und alle Kombinationsmöglichkeiten aufzuschreiben, um dann die Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln.

• Nachdem die beiden ersten Schüler die Schätzwerte angegeben hatten und der Schüler Nr.3 durch Argumentation belegte, dass genau 3 richtig bestimmte Schokoladensorten nicht möglich sein konnten, erhielten die ersteren die Möglichkeit ihre Schätzwerte zu korrigieren.

Im Schüler-Lehrer-Gespräch wurde als zentrale Idee der Stunde herausgearbeitet, dass Vergleichsmaßstäbe notwendig seien, um eine Auswertung aller Daten im Hinblick auf das "Nullschmeckerprinzip“ zu ermöglichen und um festzustellen, wie gut der eigene Geschmackstest denn wohl gewesen ist. Dazu sollten in jedem Fall die Mittelwerte (Erwartungswerte) berechnet werden.

Die Hausaufgabe bestand aus 2 Teilen:

1. Ermittlung aller Erwartungswerte μ und Standardabweichungen σ der beiden Tabellen (Tab.1 und Tab.2), Berechnungen der jeweiligen 1-σ- Intervalle, Ergänzung der Tabellen
2. Aufschreiben aller Kombinationsmöglichkeiten und Auszählen der Trefferzahl der Schokoladensorten bei einem beliebigen, selbstdefinierten ‚Hauptgewinn’ z. B. MLAR.

Der Schokoladentest - Teil 2

Um die Ergebnisse der Hausaufgabe in kompakter Form zusammenzustellen, wurde ein Arbeitsblatt verteilt, auf dem alle Tabellen der letzten Stunde notiert und die Hausaufgabe vorbereitet war. Die Schüler hatten den Auftrag, alle fehlenden Werte für μ und σ zu ergänzen bzw. neu zu berechnen.
Aus Platzgründen sind an dieser Stelle nur einige Tabellen aufgeführt, im Unterricht entwickelte Lösungen sind bereits eingearbeitet.

Treffer	0	1	2	3	4	Anz.Tr.	μ	σ
Sim. 1	9	6	5	0	1	20	0,95	1,04
Sim. 2	11	5	4	0	1	17	0,81	1,05
Sim. 3	8	9	4	0	0	17	0,81	0,73
Sim. 4	10	4	5	0	2	22	1,05	1,25

Tab.2 4 Kartensimulationen mit je 21 Schülern

Die Auswertung der Daten erfolgte durch schriftliche Berechnung oder Nutzung der 1-Variablen-Statistik des Ti83Plus, die Ergebnisse wurden graphisch dargestellt und beurteilt (in Abb. 2 ist Sim.4 dargestellt).

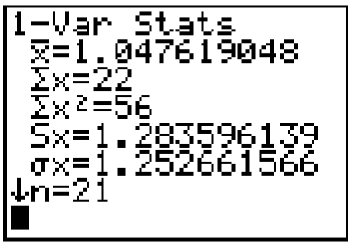

Abb. 2

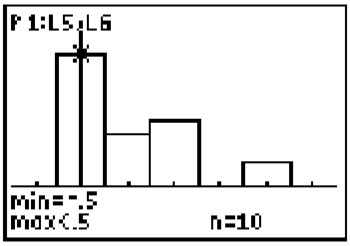

Abb. 3

Simu-lation	Trefferquote T (mit je 25 Personen)		
	T ≤ 0,64	T ≥ 1,36	0,64 < T < 1,36
1	1	1	98
2	5	5	90
3	3	4	93
4	1	6	93
5	0	2	98
6	3	3	94
7	3	2	95
8	2	5	93
9	1	5	94
10	0	1	99

Tab.3 10 Simulationen mit je 100 „Nullschmeckergruppen“

ALM**R**	1	L**AMR**	2	**MALR**	4	R**AL**M	2
ALRM	0	L**A**RM	1	**MA**RL	2	R**A**ML	1
AM**LR**	2	L		**M**		R	
A		L		**M**		R	
A		L		**M**		R	
A		L		**M**		R	

Tab.4 Permutationen und Sortentreffer bei dem Hauptgewinn MALR (zufällig)

(Arbeitsauftrag: Vervollständige die Daten !)

Treffer	0	1	2	3	4	
Wahr-schein-lichkeit	$\frac{9}{24}$ = 37,5%	$\frac{8}{24}$ = 33,3%	$\frac{6}{24}$ = 25%	0 = 0%	$\frac{1}{24}$ = 4,2%	μ=1 σ=1
Erw.abs. Häufigk.	7,875	7	5,25	0	0,875	21 Sch

Tab.5 Wahrscheinlichkeitsverteilung eines „Nullschmeckers“

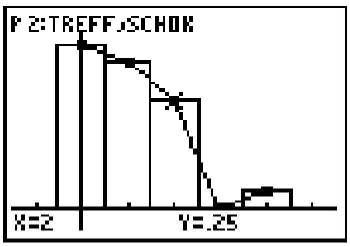

Abb. 4

Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für 4 Schokoladensorten
Für alle selbst erstellten Daten wurde außerdem das jeweilige 1-σ- Intervall berechnet.

Zahlreiche Auswertungen und Berechnungen waren nun durchgeführt worden, aber immer noch stand kein Ergebnis des eigenen „Testschmeckens“ fest. Die Spannung war kaum zu überbieten.
Nach kurzer Diskussion unter Einbeziehung der Ergebnisse der Tab.3 legten wir fest, dass der Erwartungswert unseres Tests in jedem Fall außerhalb des Intervalls [0,65 .. 1,35] liegen sollte. Wäre dies nicht der Fall, so müssten wir uns selbst zu den „Nullschmeckern“ zählen.
Ich hatte keine große Erwartung an ein positives Schülerergebnis, da ich selbst kaum eine Schokoladensorte am Geschmack erkennen konnte. Um so größer war die Überraschung, als das Briefkuvert geöffnet wurde und die Ergebnisse mit dem ‚Hauptgewinn’ **LARM** verglichen wurden (Teller 1: Lindt **L**, Teller 2: Alpia **A**, Teller 3: RitterSport **R**, Teller 4: Milka **M**).

Treffer	0	1	2	3	4
Abs. Häufigkeit	5	3	7	0	6
Rel. Häufigkeit	23,8%	14,3%	33,3%	0%	28,6%

Hierbei ist $\mu = 1{,}95$ und $\sigma = 1{,}49$.
Damit war klar, dass die Schüler des Kurses als‚Profitester’ demnächst in der Fernsehsendung „Wetten Dass“ auftreten wollten.

Der Schokoladentest - Teil 3
Das vorliegende Testverfahren wurde genutzt, um die Begriffe H_0 - und H_1 - Hypothese einzuführen.
H_0 : $\mu_0 \in [\,0{,}65\,;\,1{,}35\,]$
H_1: $\mu_1 \notin [\,0{,}65\,;\,1{,}35\,] \Leftrightarrow \mu_1 > 1{,}35$
Informationen mit Diskussion zu links- und rechtsseitigen Testverfahren schlossen sich an.
Da Grundwahrscheinlichkeiten bei diesem Test nicht vorhanden waren und das Verfahren - basierend auf Berechnung und Vergleich von Erwartungswerten – sehr komplex war, bot sich mit der im Folgenden angegebenen Aufgabenstellung ein didaktische Reduktion an.

Aufgabe :
Ein Schokoladenhersteller möchte seine Marktposition im oberen Preissegment ausbauen. Eine neu entwickelte Schokoladensorte von 'noch besserer sensorischer Qualität’ soll weitere Käuferschichten gewinnen.
Die neue Sorte soll im Vergleich zur aktuellen sehr guten hauseigenen Sorte getestet werden.

In einem Versuch werden 3 ‚Testschmeckergruppen’ mit je 100 Personen aufgefordert, beide Sorten zu vergleichen.
In der 1. Gruppe entscheiden sich 50 Personen, in der 2. Gruppe 40 Personen und in der 3. Gruppe 60 Personen für die neue Sorte.

- Wie viele Personen müssen sich mindestens für die neue Sorte entscheiden, damit sie auf den Markt gebracht wird.
- Welche Risiken bestehen für den Hersteller bei einer Fehlentscheidung ?

Lösungen:
Nach interaktivem Schülergespräch wurde festgelegt, dass sich mehr als die Hälfte aller Testpersonen für die neue Sorte entscheiden müssten.
Da nur 2 Sorten gegeneinander konkurrierten, wurden folgende Hypothesen festgelegt.
H_0 : $p = 0{,}5$
H_1 : $p > 0{,}5$
Die Binomialverteilung wurde benutzt, um die Ergebnisse zu berechnen:
$P(H_1 \mid H_0\!: p = 0{,}5) = P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40) =$
$= 1 - F(100\,;\,0{,}5\,;\,40) = 0{,}46$

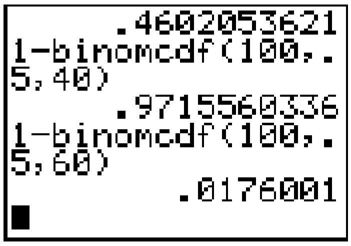

Abb. 5

Die Lösungen wurden mit dem GTR ermittelt und interpretiert. Anhand der Ergebnisse war klar, dass das Risiko einer Markteinführung des neuen Produktes bei nur 40 positiv urteilenden 'Testschmeckern’ sehr groß war.

Die Begriffe "Irrtumswahrscheinlichkeit“, "Signifikanzniveau“ und "α- Fehler“ wurden eingeführt. Auch das an sich gute Ergebnis des α-Fehlers von ca. 1,8 % bei 60 positiv urteilenden 'Testschmeckern’ wurde kritisch hinterfragt. Nicht nur mathematische Aspekte bzgl. der zu geringen Stichprobengröße von n = 100 spielten eine Rolle, sondern auch wirtschaftliche Fragen wurden besprochen.
Im Falle einer Fehlentscheidung wurden u.a. folgende Argumente in die Diskussion eingebracht:

- Imageverlust der Firma
- Zurückgehende Verkäufe der übrigen Produkte
- Kostenaspekte (Transportkosten, Verwaltungskosten, Gerichtskosten, Anwaltskosten, Regressansprüche, …)
- Gesundheitliche Risiken (Die neu verwendete Kakaosorte erweist sich im Nachhinein als gesundheitsgefährdend. …) …

Mit Hilfe der Funktion f(x) = 1 – F(100 ; 0,5 ; x) wurden weitere α - Fehler tabellarisch und graphisch untersucht und ausgewertet.

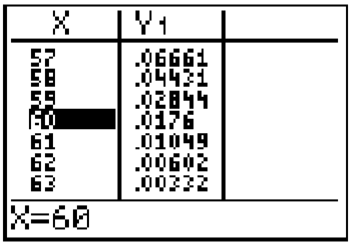

Abb. 6

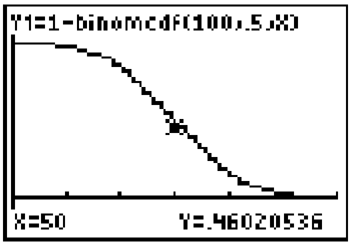

Abb. 7

Als Hausaufgabe schlossen sich weitere Untersuchungen mit größerer Testpersonenzahl und Benutzung der Normalverteilung an (n = 500, n = 1000 , n = 5000…).
Der kritische Wert k sollte jeweils für die α - Fehler von 0,05 und 0,01 ermittelt werden.

Der Autor:
Norbert Frost
Lange Str. 1a D-31655 Stadthagen
Schule Ratsgymnasium Stadthagen
norbert.frost@teleos-web.de