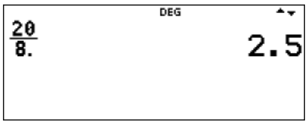
Advent, Advent, ein Lichtlein brennt … Anregungen zur „Kerzenaufgabe“

Zu den Klassikern der Aufgaben bei der Betrachtung linearer Funktionen oder linearer Gleichungssysteme zählt die Kerzenaufgabe, die es in vielfach variierter Form in Lehrbüchern[1)] oder im Internet[2)] gibt.
Im Mittelpunkt dieser Aufgaben stehen meistens Fragen zu einer oder zwei Kerzen, von denen die Höhe und die Brenndauer bekannt sind.
In diesem Beitrag wird auf Möglichkeiten hingewiesen, wie der wissenschaftliche Taschenrechner TI-30X Prio MathPrint™ im Zusammenhang mit solchen Aufgaben Verwendung finden kann.

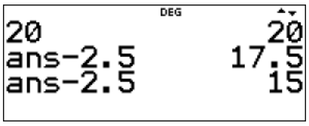
Problemstellung 1
Eine Kerze ist anfangs 20,0 cm hoch. Wird sie angezündet, brennt sie gleichmäßig innerhalb von 8 Stunden vollständig ab. Erstelle eine Tabelle, der man die Höhe nach jeder vollen Stunde entnehmen kann. Beschreibe, wie dazu der Taschenrechner verwendet werden kann.

Lösung:
Da die Kerze gleichmäßig abbrennt, wird durch den Quotienten $\frac{20{,}0\,cm}{8\,h} = 2{,}5\,\frac{cm}{h}$ ermittelt, um wie viel Zentimeter die Kerze pro Stunde an Höhe verliert.



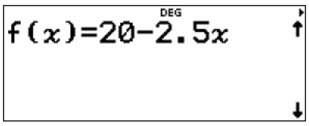
Um die Tabelle zu erstellen, gibt es mehrere Möglichkeiten:

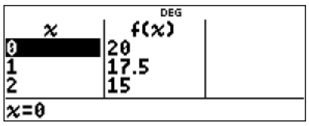
(1) Verwendung der ANS-Taste (Zweitbelegung von [(–)]).
Der Startwert 20 wird eingegeben und mit [enter] bestätigt.
Mit [−][2][·][5][enter] wird die Berechnung von 17,5 für die Kerzenhöhe nach einer Stunde veranlasst.
Jedes weitere Drücken von [enter] ergibt den Wert der Kerzenhöhe in der Folgestunde.
Parallel dazu kann die Tabelle ausgefüllt werden.



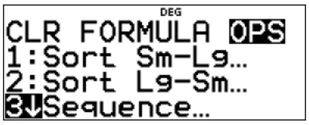
Zeit in h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Höhe in cm	20,0	17,5	15,0	12,5	10,0	7,5	5	2,5	0

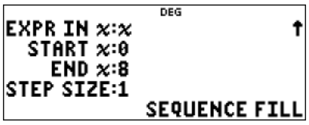
(2) Als mathematisches Modell kann aus dieser Verfahrensweise der Funktionsterm $f(x) = 20 - 2{,}5x$ gewonnen werden, etwa durch die Frage, wie oft man ANS aktivieren muss, um die Kerzenhöhe nach x Stunden zu erhalten. Die lineare Funktion kann mit dem Funktionseditor des TI-30X Prio MathPrint™ unter [table] tabelliert werden.

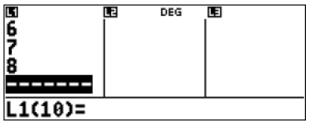




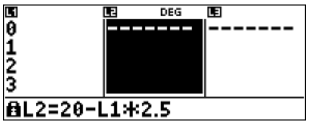
(3) Auch der Listeneditor unter [data] lässt sich für die Tabellierung verwenden.
In der Liste L1 werden die vollen Stunden als Folge erzeugt.

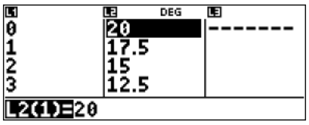






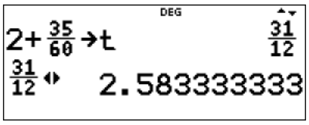
In der Liste L2 werden die Höhen berechnet.

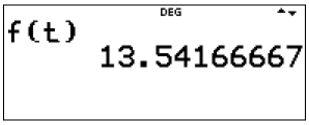




Vergleicht man diese drei Varianten, so ist zu erkennen, dass die zweite Möglichkeit mit [table] die wohl zweckmäßigste ist. Sie ist mit wenigen Vorbereitungen realisiert. Das Wichtigste ist, dass mit der linearen Funktion $f(x) = 20 - 2{,}5x$ sich Höhen der Kerze auch zu Zeiten bestimmen lassen, die keine vollen Stunden sind.

Beispiel: Berechne die Höhe der Kerze nach einer Brenndauer von 2 Stunden und 35 Minuten. Es ist nur erforderlich, die Zeit von 2 h 35 Min. als Dezimalzahl zu schreiben und dann kann damit die Höhe als Funktionswert f(x) berechnet werden.



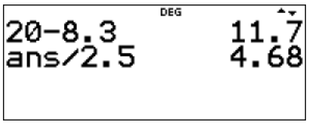


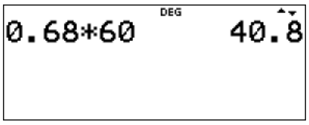
Nach unserem mathematischen Modell wäre die Kerze nach 2 Stunden und 35 Minuten ca. 13,5 cm hoch.

Auch Umkehraufgaben lassen sich mit Variante 2 einfach lösen, zum Beispiel um die Brenndauer zu berechnen, in der die Kerze eine vorgegebene Höhe erreicht hat.

Beispiel: Berechne die Uhrzeit (auf Minuten genau), zu welcher die Kerze, wenn sie seit 12 Uhr ununterbrochen brennt, noch 8,3 cm hoch ist.

$$8{,}3 = 20 - 2{,}5x \Longrightarrow 2{,}5x = 11{,}7 \Longrightarrow x = \frac{11{,}7\ cm}{2{,}5\ \frac{cm}{h}} = 4{,}68\ h$$





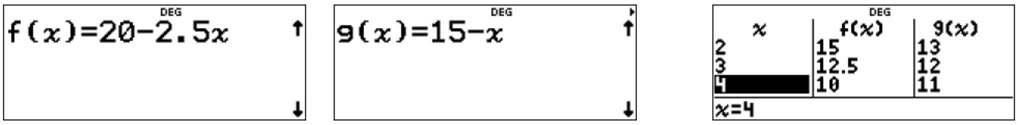
Um 16 Uhr und rund 41 Minuten ist die Kerze noch 8,3 cm hoch.

Problemstellung 2

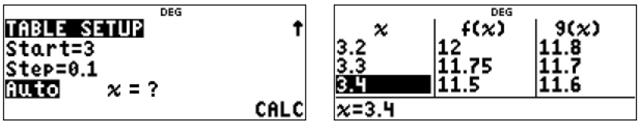
Zwei Kerzen brennen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ab. Kerze A ist 20 cm hoch und verliert jede Stunde 2,5 cm an Höhe. Kerze B ist 15 cm hoch und wird jede Stunde um 1,0 cm kleiner. Es soll herausgefunden werden, nach wie vielen Stunden beide Kerzen die gleiche Höhe haben, wenn sie zum selben Zeitpunkt angezündet wurden und seitdem ununterbrochen brennen. Beschreibe, wie dazu der Taschenrechner verwendet werden kann und wie sich die Lösung ohne Taschenrechner finden lässt.

Lösung:

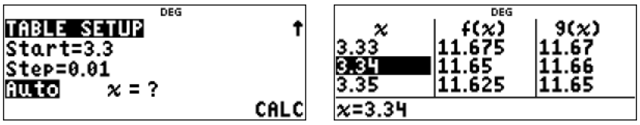
(1) Als mathematisches Modell können die Funktionsterme $f(x) = 20 - 2{,}5x$ und $g(x) = 15 - x$ gewonnen werden. Die linearen Funktionen können mit dem Funktionseditor des TI-30X Prio MathPrint™ unter $\boxed{\text{table}}$ tabelliert werden.



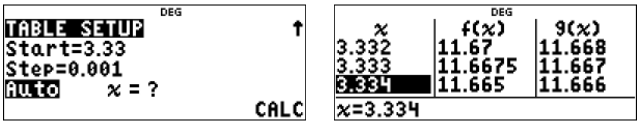
Zwischen der dritten und vierten Stunde könnten die Höhen gleich groß sein, denn bis zur dritten Stunde hat f immer größere Funktionswerte als g, während ab der vierten Stunde die Funktionswerte von f kleiner werden als die von g. Durch eine kleinere Schrittweite für x kann man dieses Intervall weiter einschränken.



Das Intervall, in dem der x-Wert für gleiche Höhen liegt, wird auf (3,4; 3,4) eingeschränkt. Die Schrittweite wird weiter verkleinert.

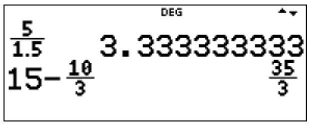


Das Intervall, in dem der x-Wert für gleiche Höhen liegt, wird auf (3,33; 3,34) eingeschränkt. Die Schrittweite wird weiter verkleinert.



Das Intervall, in dem der x-Wert für gleiche Höhen liegt, wird auf (3,333; 3,334) eingeschränkt. Damit kann man sich im Rahmen des vorliegenden Sachverhalts zufriedengeben und als Näherungslösung festhalten, dass beide Kerzen nach ca. 3,33 Stunden bzw. rund 3 Stunden und 20 Minuten gleiche Höhe von etwa 11,7 cm haben.

(2) Die Funktionsterme $f(x) = 20 - 2{,}5x$ und $g(x) = 15 - x$ können zur Berechnung der Brenndauer für das Erreichen der gleichen Höhe als lineares Gleichungssystem aufgefasst werden:



Durch Gleichsetzen ergibt sich $20 - 2{,}5x = 15 - x$.
Daraus folgt $5 = 1{,}5x$ und damit $x = \frac{5}{1{,}5} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ sowie $g\left(\frac{10}{3}\right) = 15 - \frac{10}{3} = \frac{35}{3} \approx 11{,}7$. Also entsprechen die Näherungswerte von (1) den exakten Lösungen.

Problemstellung 3

Zu den beiden Kerzen von Aufgabe 2 soll noch eine dritte Kerze hinzukommen. Sie soll nach gemeinsamen Anzünden aller drei Kerzen und ununterbrochenem, gleichmäßigem Abbrennen zum gleichen Zeitpunkt die gleiche Höhe wie die beiden ersten Kerzen haben. Gib die Höhe und die Brenndauer von zwei Kerzen an, die als Kerze 3 in Frage kommen könnten. Veranschauliche den Sachverhalt durch eine grafische Darstellung der zugehörigen linearen Funktionen.

Lösung:

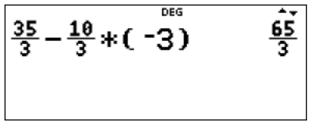
Die dritte Kerze muss zum Zeitpunkt $x = \frac{10}{3}$ die Höhe $y = \frac{35}{3}$ haben (siehe Lösung von Teilaufgabe 2).

Für die dritte Kerze gilt also $\frac{35}{3} = m \cdot \frac{10}{3} + n$ mit $m < 0$ und $n > 0$. Dabei gibt m den Höhenverlust pro Stunde und n die Anfangshöhe an.

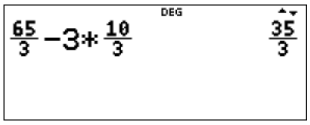
Umgestellt nach n ergibt sich $n = \frac{35}{3} - \frac{10}{3}m = \frac{5}{3} \cdot (7 - 2m)$.

Weil $n > 0$ sein muss, muss $7 - 2m > 0$, also $m < \frac{7}{2}$ gelten. Schwerwiegender ist die Forderung $m < 0$.

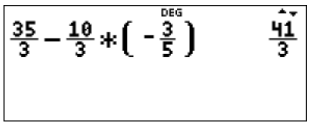
(1) Wählt man z. B. $m = -3$, dann wäre $n = \frac{35}{3} - \frac{10}{3} \cdot (-3) = \frac{65}{3}$.



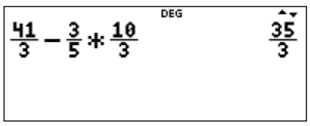
Probe: $y = \frac{65}{3} - 3x$ müsste für $x = \frac{10}{3}$ die Höhe $y = \frac{35}{3}$ ergeben.



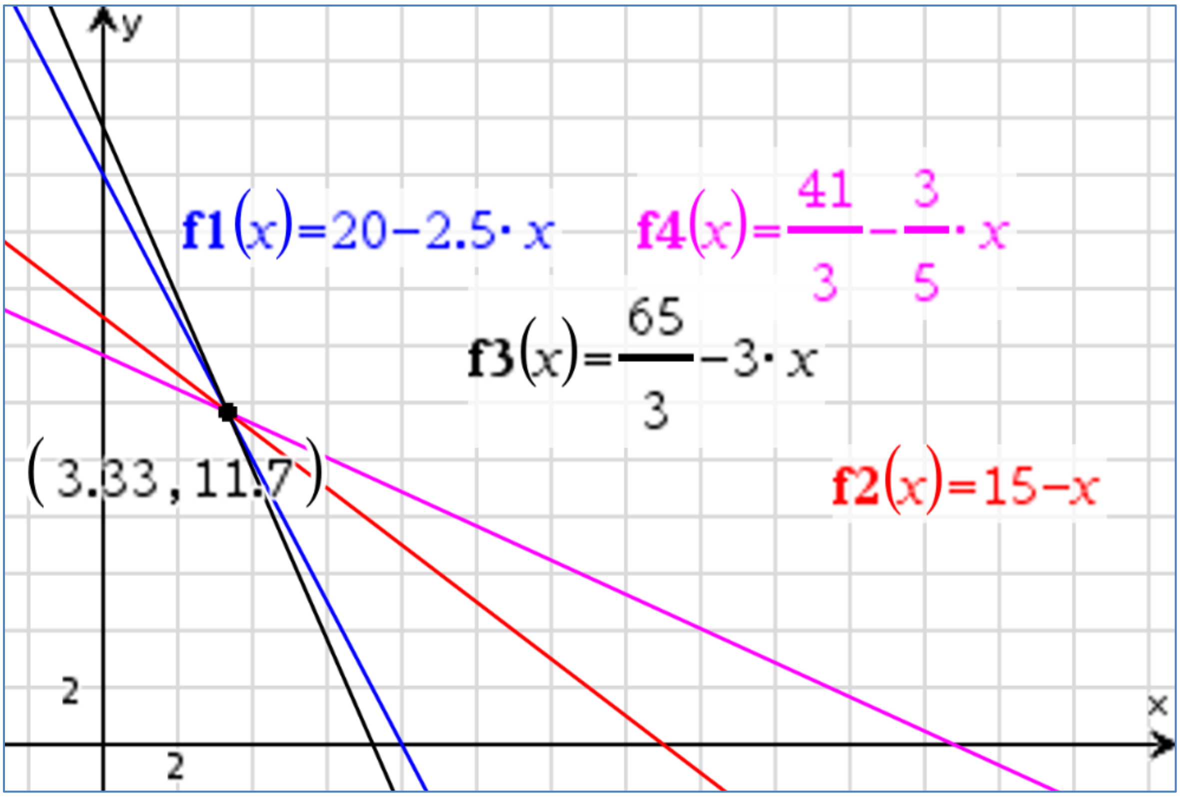
(2) Wählt man z. B. $m = -\frac{3}{5}$, dann wäre $n = \frac{35}{3} - \frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{41}{3}$.



Probe: $y = \frac{41}{3} - \frac{3}{5}x$ müsste für $x = \frac{10}{3}$ die Höhe $y = \frac{35}{3}$ ergeben.



(3) Grafische Darstellungen:



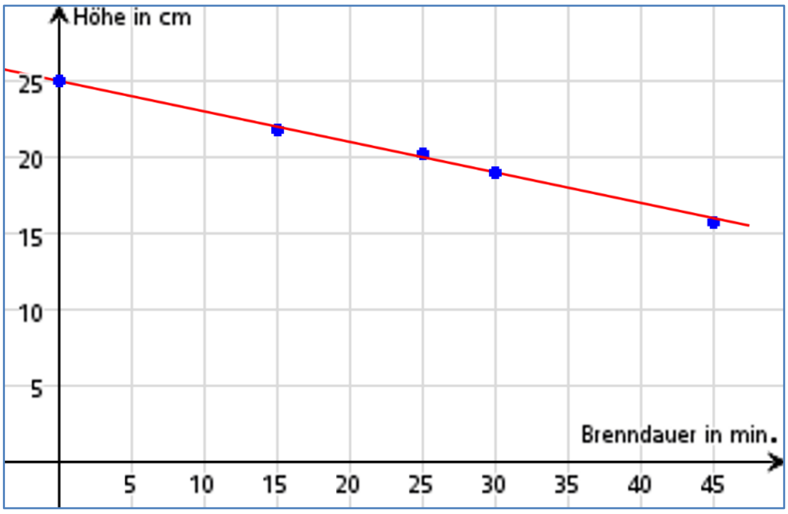
Problemstellung 4
Bruno zündet eine Kerze an und lässt sie einige Zeit abbrennen. Er misst ihre Höhe zu einigen Brenndauern.

Brenndauer in min.	0	15	25	30	45
Höhe in cm	25,0	21,8	20,2	19,0	15,7

a) Zeichne ein Punktdiagramm zu den Messwerten, das die Höhe in Abhängigkeit von der Brenndauer darstellt.
b) Zeichne eine Gerade, die den Verlauf nach deiner Auffassung möglichst gut wiedergibt und ermittle die zugehörige Geradengleichung.
c) Berechne die Summe der Quadrate der Abweichungen der Funktionswerte der Geraden von den Messwerten der Höhe.
d) Vergleiche deine Summe der Fehlerquadrate mit denen deiner Mitschüler.

Lösung:

a) Punktdiagramm

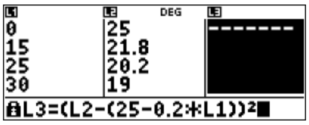


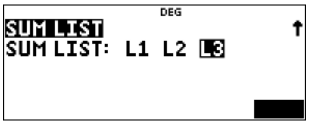
b) Gerade z. B. durch die Punkte A(0;25) und B(30;19):

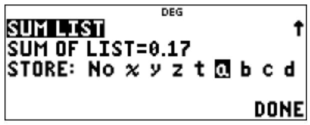
$$\frac{y-25}{x-0}=\frac{19-25}{30-0}\Longrightarrow\frac{y-25}{x}=\frac{-6}{30}\Longrightarrow y=-\frac{1}{5}x+25\Longrightarrow y=-0{,}2x+25$$

oder:
Gerade z. B. durch die Punkte A(0;25) und C(45;15,7):
$$y=\frac{15{,}7-25}{45-0}x+25\approx 0{,}21x+25$$

c) Die Summe der Fehlerquadrate für die Ausgleichsgerade $y=-0{,}2x+25$ ist 0,17wird im Listeneditor berechnet unter data OPS SUM LIST:







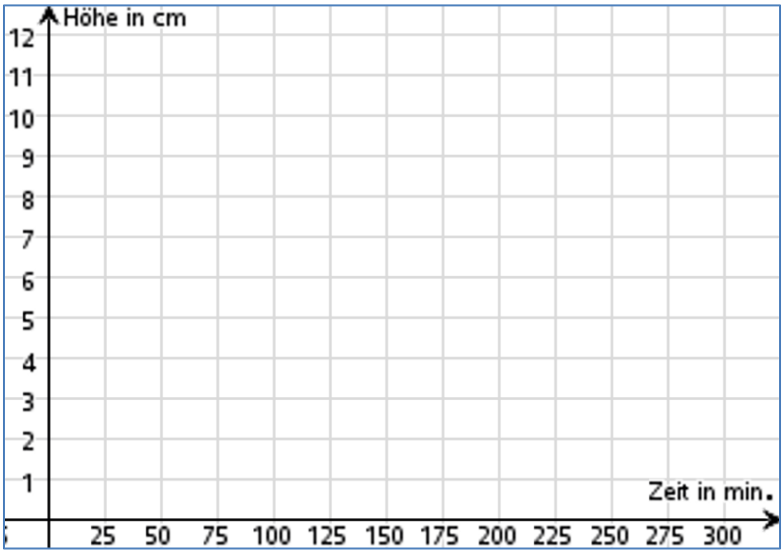
d) Auswertung individuell:
Hinweis: Der durch lineare Regression ermittelte optimale Wert für die Summe der Fehlerquadrate ist 0,1333.

Problemstellung 5

Beim Abbrennen einer Kerze, die im oberen Teil kegelstumpfförmige Abmessungen hat, wurden folgende Daten gemessen.

Zeit in min.	0	40	110	170	250	300
Höhe in cm	12,0	10,0	8,2	6,5	4,5	4,0

a) Zeichne ein Streudiagramm.



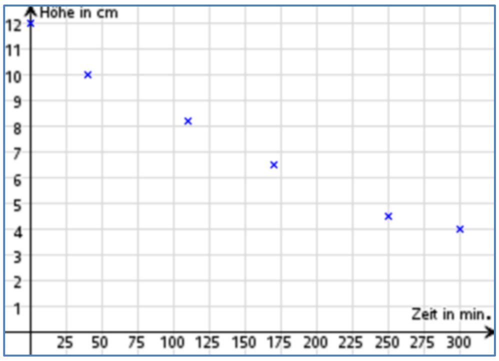
b) Erläutere auch anhand des Diagramms, weshalb es sinnvoll ist, in diesem Falle keinen linearen Zusammenhang zwischen Zeit und Kerzenhöhe zu vermuten.

c) Ermittle aus den Wertepaaren (0|12) und (300|4) Gleichungen für folgende mathematischen Modelle eines möglichen Zusammenhangs zwischen Zeit und Kerzenhöhe:
(1) Gleichung einer linearen Funktion $y = f(x) = m \cdot x + n$
(2) Gleichung einer Exponentialfunktion $y = g(x) = a \cdot b^x$

d) Ermittle für jede dieser Modellfunktionen die Summe der Fehlerquadrate zwischen Funktions- und Messwerten. Vergleiche die Ergebnisse und zeichne die Graphen beider Funktionen in das Streudiagramm von Teilaufgabe a ein.
Welche ist besser geeignet, um den Sachverhalt mathematisch zu modellieren?

Lösungen:

a) Streudiagramm



b) Da der Kerzendurchmesser von oben nach unten zunächst größer wird, ehe er dann annähernd gleich bleibt, ist zu vermuten, dass die Kerze im oberen Teil schneller an Höhe verliert als im unteren Teil. Das Diagramm bestätigt diese Vermutung, z. B. verringert sich die Höhe in den ersten 40 Minuten um 2 cm, für die nächsten 2 cm Höhenverlust werden aber ungefähr 80 Minuten gebraucht.

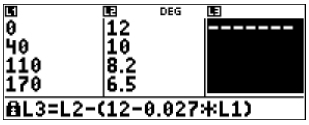
c) Wertepaaren (0|12) und (300|4) in die Gleichungen einsetzen und Koeffizienten berechnen:

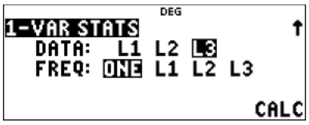
Gleichung einer linearen Funktion $y = f(x) = -0{,}027 \cdot x + 12$

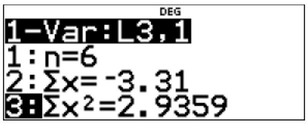
Gleichung einer Exponentialfunktion $y = g(x) = 12 \cdot 0{,}99634^x$

d) Summe der Fehlerquadrate mit Statistikvariablen ermitteln:

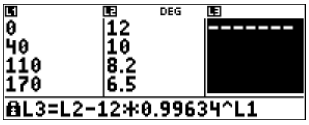
$f(x) = -0{,}027 \cdot x + 12$

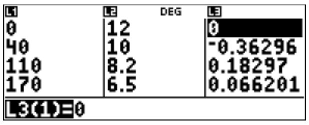


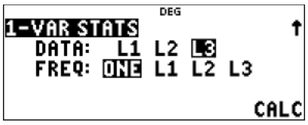


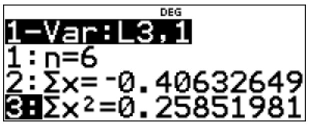


$g(x) = 12 \cdot 0{,}99634^x$



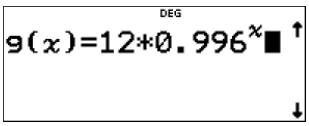


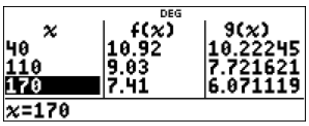


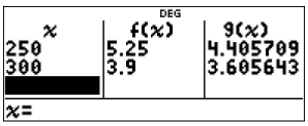


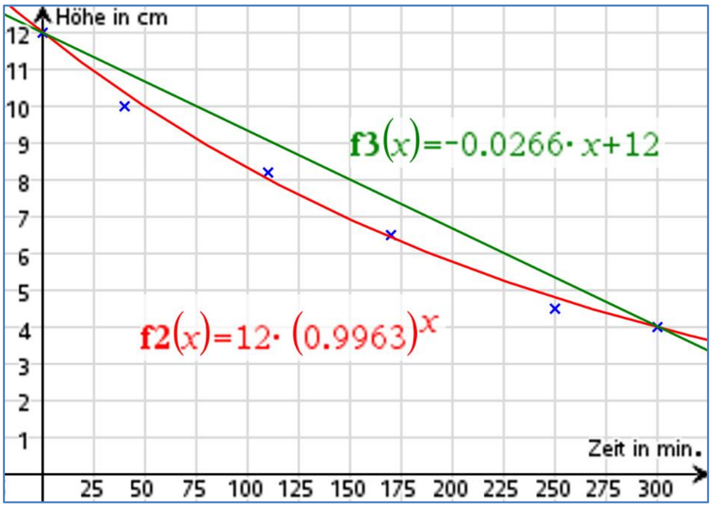
Die Summe der Fehlerquadrate ist ablesbar unter $\sum x^2$: Diese Summe ist für die Exponentialfunktion wesentlich kleiner als für die lineare Funktion.

Für die grafische Darstellung von f(x) und g(x) werden beide Funktionen mit table tabelliert und ihre Funktionswerte in das Streudiagramm übertragen.









Die Exponentialfunktion eignet sich hier besser als Modellfunktion als die lineare Funktion, aber es ist darauf hinzuweisen, dass sie als mathematisches Modell nur in dem betrachteten Intervall für die konkret untersuchte Kerze taugt. Die Exponentialfunktion hat einen ins Unendliche reichenden Definitionsbereich, aber die Kerze würde ja nicht unendlich lange brennen. Es wurde nicht einmal untersucht, wie das Abbrennen der Kerze nach dem Zeitraum von fünf Stunden weitergeht.

Quellenangaben

1) Beispielsweise in „Fundamente der Mathematik, Sachsen-Anhalt, Gymnasium Klasse 7“, Cornelsen 2015, S. 103 Nr. 14
2) Zum Beispiel: https://mein-lernen.at/funktionen/lineare-funktionen-textaufgaben/lineare-textaufgabe-kerze-brenndauer/

Autor:
Dr. Wilfried Zappe