Titelbild: Das Originalbild eines Tsunami Backflips

Motocross-Looping

Dr. Alfred Roulier

Am 16.4.2012 wurde in der Neuen Zürcher Zeitung und im Internet dieses spektakuläre Bild des Pressefotografen Christian Beutler publiziert: Ein sogenannter Tsunami Flip eines Motocross Free Stylers, der an der Basler „Night of Jumps“ dargeboten wurde.

Die Bildinformationen dienen vorzüglich einem Anwendungsbeispiel aus der Physik, dem schiefen Wurf und der Drehung eines starren Körpers. Dabei leisten die Werkzeuge des TI-Nspire™ besonders gute Dienste.

Ist die Flugbahn parabolisch?

Zur Beantwortung dieser Frage wird das Bild in eine Seite der Graphs-Applikation kopiertund eine Parabel der Form

$$y = a - b \cdot (x + c)^2$$

eingepasst. Dabei ist darauf zu achten, dass diese den Weg des Schwerpunktes von Fahrer und Maschine, der auf Sattelhöhe angenommen wird, möglichst gut beschreibt.

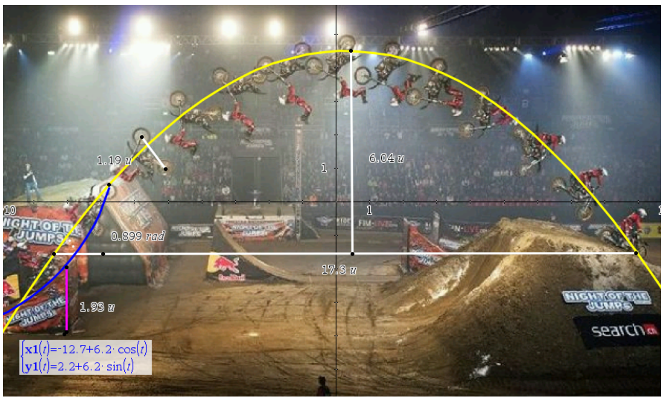

Abb.1: Ausmessung der Flugbahn

Mit den Parametern $a = 4.5$, $b = 0.08$ und $c = -0.3$ gelingt dies gut, und es kann festgehalten werden: *"Ja, die Flugbahn verläuft in guter Näherung parabolisch."*

Die Parabel kann nun mit dem Messwerkzeug, wie in Abb. 1 gezeigt, ausgewertet werden. Als Referenzgrösse zur Bestimmung des Massstabs dient der Radabstand des Motorrads, welcher gemäss Internet für eine Husqvarna-Maschine 1.45 m beträgt. Damit beträgt der Abgangswinkel $\alpha_{max} = 0.9$ (51.6°), die Scheitelhöhe $h = 7.37$ m und die Flugweite $w = 21.1$ m.

Mit den bekannten Formeln des schiefen Wurfes ergeben sich für die Abgangsgeschwindigkeit v_0 und die Flugzeit T folgende Werte:

$$v_0 = \sqrt{\frac{w \cdot g}{2 \cdot \sin(\alpha_{max}) \cdot \cos(\alpha_{max})}} = 14.6 \text{ m s}^{-1} = 52.6 \text{ km h}^{-1}$$

$$T = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin(\alpha_{max})}{g} = 2.33 \text{ s}$$

Trägheitsmoment von Fahrer+Maschine

Für die weitere Analyse des Tsunami Backflips benötigen wir das Trägheitsmoment J von Fahrer und Maschine bezüglich einer Drehachse durch den Schwerpunkt. Dazu vereinfachen wir unser Objekt durch 4 quadratische Quader mit Kantenlänge $\rho = 0.725$ m (halber Radabstand) und der eingetragenen Verteilung der Masse von $m = 170$ kg.

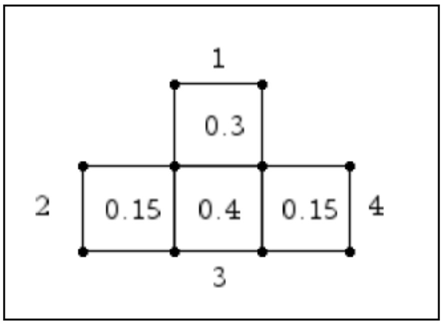

Abb.2: Schematische Form

Der Schwerpunkt des Gebildes liegt $yz = 0.6$ m über der Grundlinie. Dies folgt aus der Schwerpunktsformel:

$$yz = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{\sum m_i}$$

Das Trägheitsmoment eines um sein eigenes Zentrum drehender Körper beträgt $m_j \cdot \rho^2/6$. Das totale Trägheitsmoment ist die Summe der Quadermomente vermehrt nach dem Satz von Steiner um $m_j \cdot d_j^2$ (d = Abstand Würfelzentrum - Schwerpunkt). Die Auswertung ergibt $J = 63.3$ kg m^2.

Drehimpuls

Die gekrümmte Rampe erzwingt eine Rückwärtsdrehung von Fahrer und Maschine. Der entsprechende Drehimpuls lässt sich mit der Formel $L = J \cdot \omega$ einfach berechnen. Unter der Annahme einer kreisförmigen Rampe (verifiziert durch den blauen Kreisbogen in Abb. 1) ist die Winkelgeschwindigkeit gleich dem Quotienten von Bahngeschwindigkeit und Bahnradius. Aus der gemessenen Rampenhöhe $h_1 = 2.35$ m und dem Abgangswinkel $\alpha = 0.9$ ergibt sich

$$r = \frac{h_1}{1 - \cos\alpha} = 6{,}2\text{m}$$

und daraus ein Drehimpuls von $L_1 = 149$ kg m^2 s^{-1}.

Sobald der Schwerpunkt von Fahrer und Maschine hinter die Vertikale zu liegen kommt (vgl Abb. 3) und das Vorderrad die Rampe verlassen hat, nimmt der Fahrer weiteren Drehimpuls auf. Vorher ist das durch die Fliehkraft nach vorne gerichtete Drehmoment um den Drehpunkt P am Hinterrad grösser als jenes nach hinten und das Rad kann nicht abheben.

Die Grössen ρ, q und s folgen aus den Abmessungen des Motorrads mit $s = 1$ m, $\rho = 0.725$:

$$q = \sqrt{s^2 + \rho^2} \approx 1{,}25 \text{ m}$$

Der von ρ und q eingeschlossene Winkel β beträgt:

$$\beta = \arctan\left(\frac{s}{\rho}\right) = 0{,}927$$

Der Abgangswinkel wurde oben mit $\alpha = 0.9$ bestimmt. Somit ist der für das Drehmoment wirksame Winkel

$$\gamma = \alpha + \beta - \pi/2 \approx 0{,}256.$$

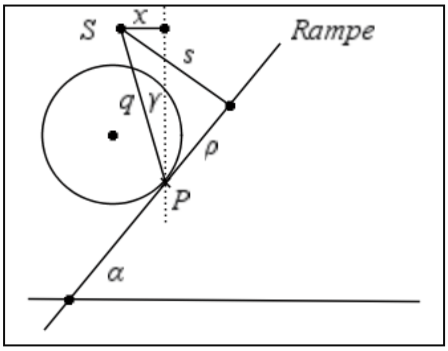

Abb.3: Geometrie am Rampenende

Das Drehmoment zu Beginn der Drehimpulsaufnahme ist $M = m \cdot g \cdot q \cdot \sin(\gamma) = 528$ Nm.

Die Dauer $\Delta t = 2 \cdot \rho / v_0 = 0.098$ s der Drehimpulsaufnahme ist sehr kurz. Zwar ist der Drehimpuls das Zeitintegral des Drehmoments, aber in der kurzen Zeit verändert sich γ kaum, so dass wir ein konstantes Drehmoment annehmen dürfen und $L_2 = 51.8$ kg m^2 s^{-1} erhalten.

Winkelgeschwindigkeiten

Während der Flugzeit von 2.33 s hat sich der Fahrer mit der Maschine um den Winkel $2 \cdot (\pi - \alpha) = 4.48$ gedreht. Die effektive Winkelgeschwindigkeit betrug somit $\omega_{eff} = 1.92$ s^{-1}.

Andererseits erhalten wir aus den soeben errechneten Werten für L_1, L_2 und J sowie $\omega_{ber} = (L_1 + L_2) / J$ eine Winkelgeschwindigkeit $\omega_{ber} = 3.17$ s^{-1}. Dieser Wert ist um 65 % zu gross. Liegt ein Rechenfehler vor ?

Korrektur im Flug

Nach dem Absprung beträgt der totale Drehimpuls L_t des Systems Fahrer + Maschine $L_t = L_r + L_{vr} + L_{hr}$. Dabei ist $L_r = L_1 + L_2$ die Summe der auf der Rampe aufgenommene Drehimpulse rückwärts, L_{vr} der Drehimpuls des allenfalls noch weiterdrehenden Vorderrads und L_{hr} jener des Hinterrads. Wenn der Fahrer eines oder beides der Räder bremst oder das Hinterrad beschleunigt, ändert sich der Drehimpuls der Räder. Weil aber nach dem Erhaltungssatz L_t konstant bleibt, muss L_r diese Änderung kompensieren, indem ω_{ber} zu- oder abnimmt. Da die Räder vorwärts, der Looping jedoch rückwärts dreht, bedeutet Bremsen eine Abnahme, Gas geben dagegen eine Zunahmevon ω_{ber}.

Der in unserem Fall an der Rampe berechnete Drehimpuls beträgt $L_1 + L_2 = 201$ kg m^2 s^{-1}, der aus effektiver Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment abgeleitete jedoch nur 122 kg m^2 s^{-1}.

Beim Absprung hatte ein Rad mit Radius $r_r = 0.5$ m und Masse $m_r = 10$ kg also mit Trägheitsmoment von $j_r = m_r \cdot r_r^2 = 2.5$ kg m^2 und bei einer Fahrtgeschwindigkeit v_0 eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega_r = 30.6$ s^{-1}. Das ergibt einen Drehimpuls von $L_r = 76.5$ kg m^2 s^{-1}, was ziemlich genau der errechneten Differenz entspricht. Indem der Fahrer nach dem Absprung das Vorderrad blockierte, erzeugte er damit gerade die richtige Impulskorrektur. Das Hinterrad liess er unverändert weiterdrehen, damit bei der Landung kein Bremsschock entsteht.

Ob der Tsunami-Flip in Wirklichkeit so ablief, wissen wir nicht. Aus den Internetvideos über das Trainieren von solchen Sprüngen geht jedoch mindestens hervor, dass dieses Finetuning gelernt und geübt wird.

Wäre ein Doppelsalto möglich?

Bei einem Doppelsalto müssten sich Fahrer und Rad während der Flugzeit T um zusätzliche $2 \cdot \pi$ drehen. Die veränderbaren Grössen bei Anlage und Durchführung sind der Abgangswinkel α und die Absprunggeschwindigkeit v_0. Mit der eingangs notierten Formel für die Flugzeit und den bisher verwendeten Parametern erhalten wir für den Soll-Drehimpuls:

$$L_{soll} = \frac{621 \cdot (2 \cdot \pi - \alpha)}{v_0 \cdot \sin(\alpha)}$$

Im Abschnitt "Drehimpuls" werden die beiden Komponenten "Rampenkrümmung" und "Schwerpunkt" berechnet, die wir ebenfalls als Funktion von v_0 und α ausdrücken können und wir erhalten:

$$L_{ist} = 10.1 \cdot v_0 + \frac{3100 \cdot (\sin(\alpha) - 0.63)}{v_0}$$

Die Gleichung $L_{ist} = L_{soll}$ liefert für beispielsweise ein $\alpha = 1.05$ (60°) die Lösung $v_0 = 15.7\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ (57.5 km $\mathrm{h^{-1}}$). Die Antwort lautet daher: *"Ja, ein Doppelsalto ist möglich."*

Die Rampensteigung muss gegenüber dem Einfachsalto etwas steiler und die Absprunggeschwindigkeit etwas grösser sein. Dies entspricht der Realität, wie der Vergleich mit dem Video zeigt, vgl.
http://www.youtube.com/watch?v=FYgWZHbhe30

Autor:
Dr. Alfred Roulier, Neuenegg (CH)
a.roulier@bluewin.ch