Die Ermittlung des Ertrages einer Solaranlage

Der Beitrag enthält zum Thema regenerative Energien mit Photovoltaikanlagen zwei Problemstellungen, für deren Lösungsweg zum einen der TI-30X Prio MathPrint™ und zum anderen der TI-Nspire™ CX II-T CAS verwendet wird.

Problemstellung 1 *(Wilfried Zappe)*

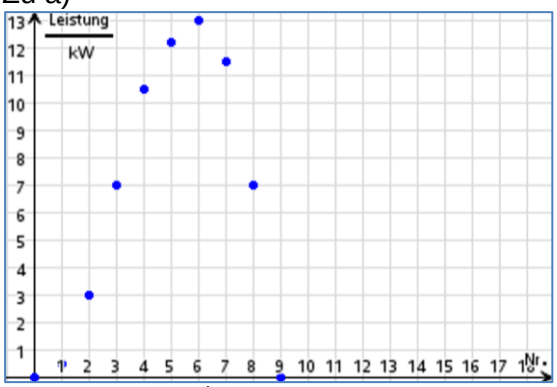
An einem Januartag wurden auf einem Biolandhof folgende Erträge der Solaranlage gemessen.

Uhrzeit	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Leistung in kW	0,0	0,5	3,0	7,0	10,5	12,2	13,0	11,5	7,0	0,0
Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

a) Stellen Sie die Werte für die Leistung in Abhängigkeit von der Reihenfolge ihrer Messung grafisch dar. (Dabei wird die Uhrzeit ersetzt durch die Nummer der Eintragung, also durch die natürlichen Zahlen von 0 bis 9.)
b) Ermitteln Sie eine ganzrationale Funktion f dritten Grades, die diese Abhängigkeit als mathematisches Modell beschreibt.
c) Ergänzen Sie die grafische Darstellung der Messwerte durch die Funktionswerte f(x) mit $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
d) Berechnen Sie einen Näherungswert für die elektrische Energie, die an diesem Tag durch die Solaranlage produziert wurde.

Lösungen

Zu a)

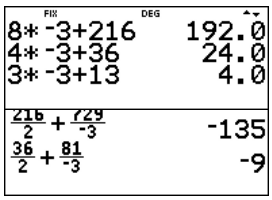


Streudiagramm[1]

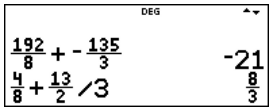
[1] *Dieser und die folgenden Graphen wurden als Streudiagramme mit TI-Nspire™ CX II-T CAS erstellt*

© T3 Deutschland 2025

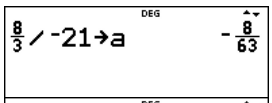
Zu b)
Eine ganzrationale Funktion dritten Grades wird durch eine Gleichung der Form $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ repräsentiert.
Durch Einsetzen der Koordinaten von vier der gegebenen zehn Punkte können die Koeffizienten a, b, c und d bestimmt werden. Beispiel:
$f(0) = 0 \Longrightarrow d = 0$
$f(2) = 3 \Longrightarrow 8a + 4b + 2c = 3 \ \ (1)$
$f(6) = 13 \Longrightarrow 216a + 36b + 6c = 13 \ \ (2)$
$f(9) = 0 \Longrightarrow 729a + 81b + 9c = 0 \ \ (3)$
Gleichung (1) multipliziert mit -3 und zur Gleichung (2) addiert, ergibt Gleichung (4):
$192a + 24b = 4 \ \ (4)$



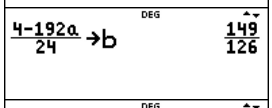
Gleichung(2) durch 2 dividieren, Gleichung (3) durch (-3) dividieren und dann beide addieren, ergibt Gleichung (5):
$-135a - 9b = \frac{13}{2} \quad (5)$
Gleichung (4) durch 8 dividieren, Gleichung (5) durch 3 dividieren und dann beide addieren ergibt Gleichung (6):
$-21a = \frac{8}{3} \quad (6)$



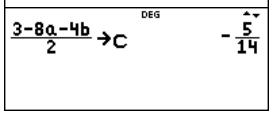
Aus Gleichung (6) folgt $a = -\frac{8}{63}$.



Dies eingesetzt in Gleichung (4) führt zu $b = \frac{149}{126}$.

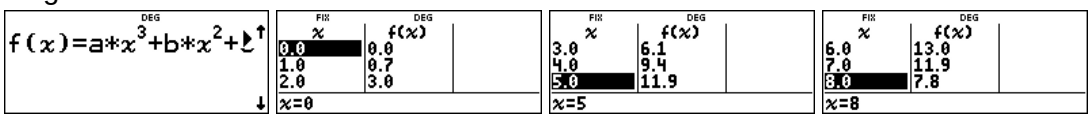


Die Werte von a und b eingesetzt in Gleichung (1) ergibt $c = -\frac{5}{14}$.



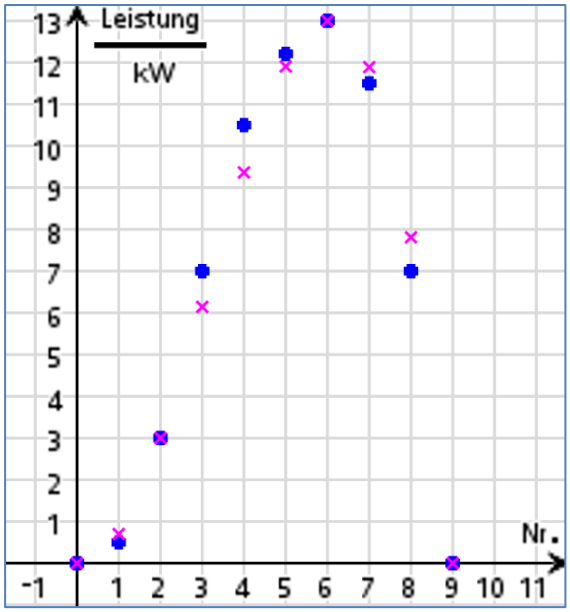
Als mathematisches Modell kann z. B. die Funktion
$f(x) = -\frac{8}{63}x^3 + \frac{149}{126}x^2 - \frac{5}{14}x$ angegeben werden.

Zu c)
Die Funktionswerte f(x) für $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ der Modellfunktion werden mit table 1 auf Zehntel gerundet ermittelt:



Die grafische Darstellung der Messwerte (blaue Punkte) wird durch diese Funktionswerte (rote Kreuze) ergänzt. Die Anschauung erlaubt die Feststellung, dass das mathematische Modell eine brauchbare Näherung liefert.

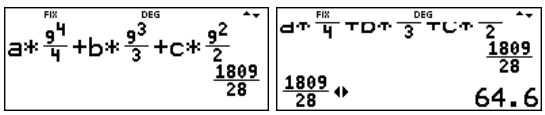
© T3 Deutschland 2025



Zu d)

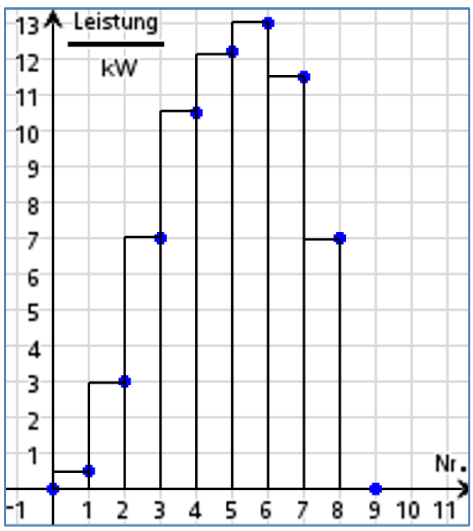
Die elektrische Energie kann näherungsweise aus dem bestimmten Integral $\int_0^9 f(x)dx$ berechnet werden.

$$\int_0^9 \left(-\frac{8}{63}x^3+\frac{149}{126}x^2-\frac{5}{14}x\right)dx=\left[-\frac{8}{63\cdot 4}x^4+\frac{149}{126\cdot 3}x^3-\frac{5}{14\cdot 2}x^2\right]_0^9=-\frac{8}{63\cdot 4}9^4+\frac{149}{126\cdot 3}9^3-\frac{5}{14\cdot 2}9^2$$



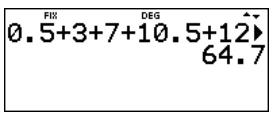
Die Solaranlage hat an diesem Tage rund 64,6 kWh geliefert.

Alternativer Lösungsweg:



Ein Näherungswert für die an diesem Tage erzeugte Energie kann auch über die oben dargestellte Rechtecksumme ermittelt werden.
Alle Rechtecke haben die Breite 1 und als Höhe den gemessenen Wert der Leistung am rechten Rand der Teilintervalle. Die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke ist

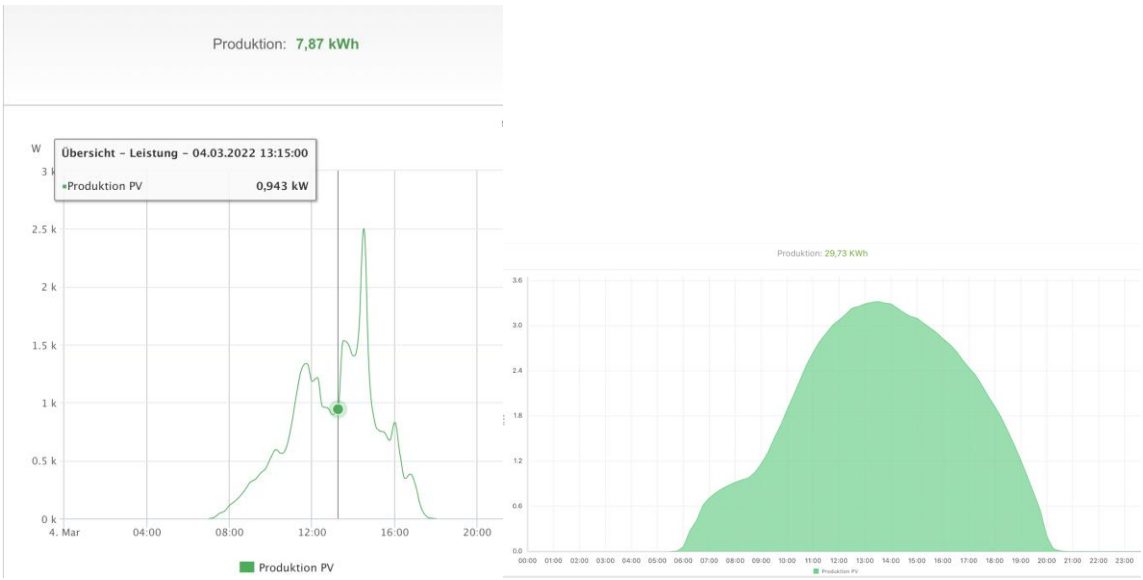
$E = 1 \cdot (0{,}5 + 3{,}0 + 7{,}0 + 10{,}5 + 12{,}2 + 13{,}0 + 11{,}5 + 7{,}0 + 0{,}0) = 64{,}7\ kWh$



Problemstellung 2 *(Hubert Langlotz)*

Bei meiner Solaranlage auf dem Dach des Eigenheimes wird in einer App protokolliert, welche Leistung (in Kilowatt kW) die Anlage im Laufe eines Tages zu welchem Zeitpunkt geliefert hat. So ist zu erkennen, dass im linken Bild um 13.15 Uhr die Leistung 0,943 kW beträgt. Im rechten Bild ist angegeben, dass 29,73kWh erzeugt worden sind.
Wie könnte der Wert für die Energiemenge im rechten Bild ermittelt worden sein?

Die Energieproduktion entspricht in der rechten Darstellung der grünen Fläche. Ein möglicher Zugang wäre es, eine Funktionsgleichung für die dargestellte Kurve zu finden, was allerdings sicher nicht in der App so genutzt wird. Wir demonstrieren dies hier, um zu zeigen, dass der gemessene Wert in etwa mit der Fläche der Kurve übereinstimmt.



Um diese Kurve, für die kein Funktionsterm bekannt ist, einer mathematischen Untersuchung zugänglich zu machen, kann man mit ausgewählten Punkten auf der Kurve mittels einer Regression 4. Grades eine Funktion f konstruieren, deren Graph die gegebene Kurve näherungsweise ‚nachzeichnet', also die Stromproduktion modelliert.

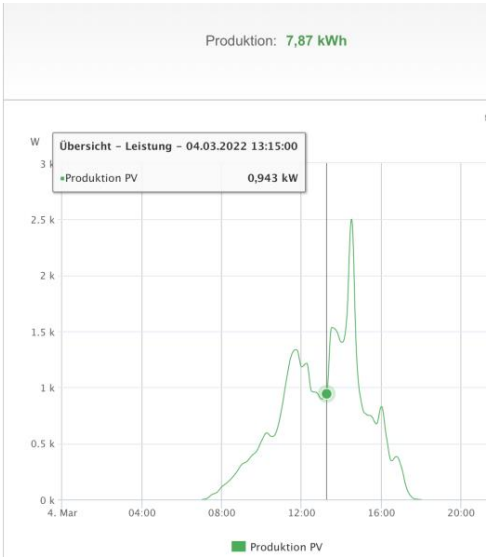
Aufgabe 1

a) Ermitteln Sie eine mögliche Funktionsgleichung, die den dargestellten Kurvenverlauf beschreibt.
b) Ermitteln Sie mit Ihrer Funktionsgleichung die Tagesproduktion und vergleichen Sie diesen Wert mit dem in der Grafik angegebenen Wert.
c) Begründen Sie Ihren Ansatz und nennen Sie Grenzen des Modells.

© T3 Deutschland 2025

Aufgabe 2

An den meisten Tagen sehen die Kurven nicht so „glatt“ aus, wie oben dargestellt.



Die Ermittlung der produzierten Energiemenge erfolgt in der Realität z. B. über ein sensorgesteuertes Messsystem, welches zu bestimmten Zeitpunkten (hier in der App alle 15 Minuten) die aktuell anliegende Leistung abfragt. Die Daten kann man i.d.R. auslesen und in einer Datei speichern.

Hier wird einmal die ausgelesene Exceltabelle angegeben:

04.03.22	07:00,	0
04.03.22	07:15,	9,3333
04.03.22	07:30,	43,3333
04.03.22	07:45,	64
04.03.22	08:00,	114
04.03.22	08:15,	148,6667
04.03.22	08:30,	192,3333
04.03.22	08:45,	248,3333
04.03.22	09:00,	313,3333
04.03.22	09:15,	338,6667
04.03.22	09:30,	391,6667
04.03.22	09:45,	434,3333
04.03.22	10:00,	526,6667
04.03.22	10:15,	594,3333
04.03.22	10:30,	560,6667
04.03.22	10:45,	616
04.03.22	11:00,	812,6667
04.03.22	11:15,	1081,6666
04.03.22	11:30,	1293,3334
04.03.22	11:45,	1336,3334
04.03.22	12:00,	1183,3334

© T3 Deutschland 2025

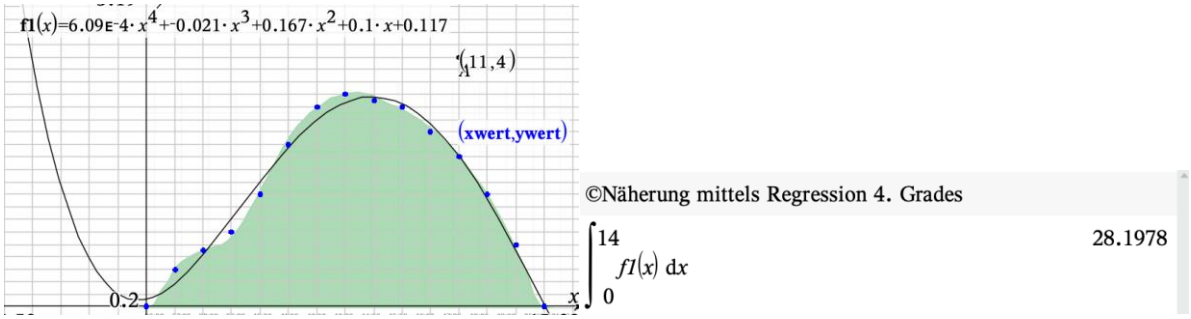
04.03.22	12:15,	1215,3334
04.03.22	12:30,	965,3333
04.03.22	12:45,	953
04.03.22	13:00,	897
04.03.22	13:15,	942,6667
04.03.22	13:30,	1533,6666
04.03.22	13:45,	1502,6666
04.03.22	14:00,	1403
04.03.22	14:15,	1598
04.03.22	14:30,	2501
04.03.22	14:45,	1295,3334
04.03.22	15:00,	859
04.03.22	15:15,	758,6667
04.03.22	15:30,	742
04.03.22	15:45,	674,3333
04.03.22	16:00,	829,3333
04.03.22	16:15,	556,3333
04.03.22	16:30,	344,6667
04.03.22	16:45,	383,3333
04.03.22	17:00,	289
04.03.22	17:15,	107
04.03.22	17:30,	25,6667
04.03.22	17:45,	2,6667
04.03.22	18:00,	0

(Hinweis: Die tabellierten Werte liegen auch als tns-Datei vor.)

a) Erläutern Sie, wie eine näherungsweise Berechnung realisiert werden könnte.
b) Beschreiben Sie, wie man die Messung der Solarproduktion verbessern kann.

Lösungen
Aufgabe 1
Zu a) und b)
Zunächst muss das Bild an den Maßstab angepasst werden (die Energieproduktion ist von 6.00 Uhr bis 20.00 Uhr größer als 0 und der Maximalwert wird gegen 13 Uhr mit 3,4kW erreicht, mit diesen Werten lässt sich das Bild einpassen).
Danach kann man mittels eines freien Punktes (hier A) die Kurve abfahren und die entsprechenden Daten in die Tabelle eintragen. (Anmerkung: Man kann dies händisch erledigen oder aber auch den capture-Befehl nutzen).

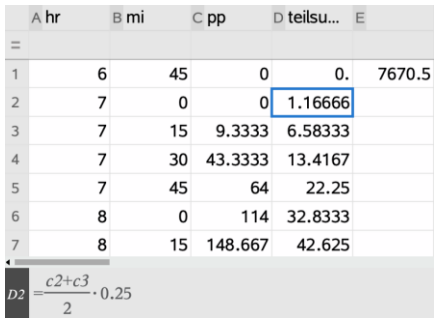
© T3 Deutschland 2025



Führt man die Regression 4. Grades durch, sieht man, dass diese im interessierenden Bereich relativ gut passt, allerdings eine Verbesserung eventuell möglich wäre, falls man die gewählten Punkte noch einmal etwas verschiebt, was allerdings nur in der Anwendung Data&Statistics machbar wäre.

Zu c)
Da der TI-Nspire™ CX II-T CAS nur Regressionen bis zum Grad 4 anbietet, wurde diese gewählt, weil der Graph z. B. zwei Wendepunkte besitzt. Das gewählte Modell passt allerdings nur im Intervall [0; 14] relativ gut, aber dies genügt ja in diesem Fall.
Eine weitere Möglichkeit wäre, die Funktionsgleichung über ein entsprechendes Gleichungssystem zu bestimmen.

Aufgabe 2
Zu a)
Man überträgt die Werte in Lists&Spreadsheet. Z. B. Mit Hilfe des Trapezverfahrens lassen sich nun die Teilflächen berechnen und die Summe ermitteln. Natürlich hätte man auch ein anderes Näherungsverfahren nutzen können (Ober- und Untersumme). In der Spalte C werden in jeder Zelle die Flächen der Teiltrapeze berechnet. Da in der Formel für die Trapezfläche $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ neben der jeweiligen Leistung (in der Formel a und c) die Breite (h) des Trapezes eingeht.



	A hr	B mi	C pp	D teilsu...	E
1	6	45	0	0.	7670.5
2	7	0	0	1.16666	
3	7	15	9.3333	6.58333	
4	7	30	43.3333	13.4167	
5	7	45	64	22.25	
6	8	0	114	32.8333	
7	8	15	148.667	42.625	

D2 = $\frac{c2+c3}{2} \cdot 0.25$

Die Abweichung zum gemessenen Wert beträgt hier knapp 3 %.

Zu b)
Je mehr Werte man erfasst, umso genauer wird die Messung. Die App liefert immer in Abständen von 15 Minuten neue Werte. Intern werden sicher die Zeitintervalle weitaus kürzer sein.

© T3 Deutschland 2025

Autoren:
Dr. Wilfried Zappe
Dr. Hubert Langlotz

© T3 Deutschland 2025