Der TI-Nspire™ CX II-T CAS im Mathematikunterricht der Klasse 8

Technische und didaktische Hinweise, Beispielaufgaben und Arbeitsblätter zu allen Lern– und ausgewählten Wahlbereichen

Herausgeber: Dr. Hubert Langlotz

Freistaat Sachsen

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Herausgeber:
Hubert Langlotz

Autoren:
Martin Bellstedt, Ralph Huste, Dr. Hubert Langlotz, Dr. Wilfried Zappe
Berater: Ines Petzschler, Frank Liebner
Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Vorwort

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,
Ihnen, die vom GTR zum CAS wechseln oder aber Neueinsteiger in CAS sind, wollen wir mit diesem Material eine Möglichkeit bieten, einerseits eigene Unterrichtserfahrungen mit dem GTR weiter zu nutzen, bzw. zu überdenken und wollen andererseits gleichzeitig Anregungen für neue Unterrichtsansätze bieten.
Wir haben bis auf den Lernbereich 5 (Heuristische Strategien) sowie den Wahlbereich 3 (Simulation mit Zufallszahlen) für alle anderen Lernbereiche technische Hinweise und Aufgabenblätter formuliert, die passfähig für den derzeit gültigen Lehrplan der Klasse 8 des Bundeslandes Sachsen sind. Am Ende eines jeden Kapitels befindet sich eine Checkliste für die Schülerinnen und Schüler.
Dieses Heft ist nicht als Lehrbuchersatz zu verstehen und ebenso sollen nicht alle angebotenen Aufgabenblätter abgearbeitet werden. Wählen Sie diejenigen aus, die zu Ihrem Unterricht passen und ergänzen Sie damit Ihr Aufgabenmaterial.
Wir haben in allen Themenbereichen darauf verzichtet zu beschreiben, welche Fähigkeiten ohne Hilfsmittel zu erwarten sind. Dies hätte den Umfang des Heftes gesprengt.
Geplant sind in Fortsetzung zwei weitere Hefte für die Klassen 9-10 sowie für die Oberstufe.

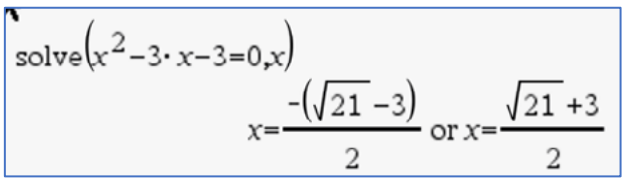
Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit dem CAS bis zum Abitur.

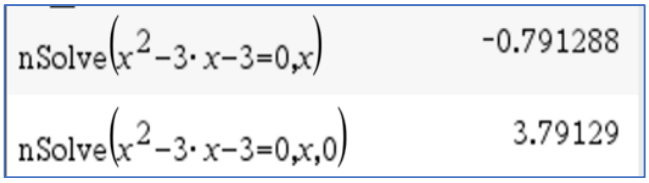
Der Herausgeber und die Autoren

Inhaltsverzeichnis

0. Einführung

Vergleicht man den TI-Nspire ohne CAS mit demjenigen mit CAS, so fällt zunächst auf, dass vieles analog aufgebaut ist. Alle Applikationen finden sich auf beiden Geräten gleich wieder.
Hauptunterschied zwischen einem CAS-Rechner und einem GTR ist, dass ersterer zusätzlich symbolisch arbeiten kann und ein GTR nur numerisch.

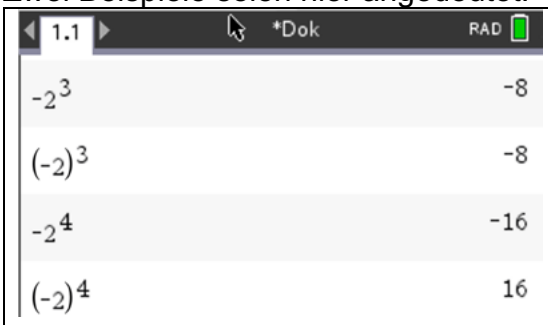
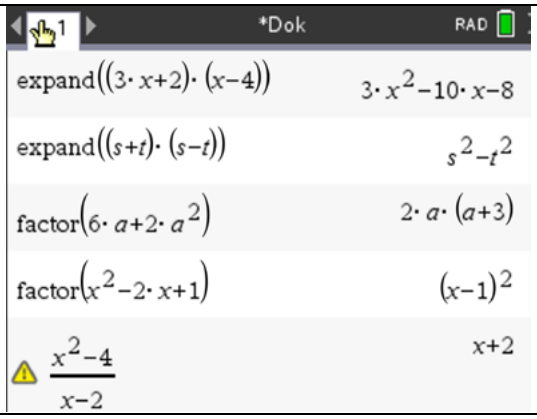




Links ist die symbolische Lösung einer quadratischen Gleichung mit einem CAS und rechts die numerische Lösung mittels GTR dargestellt.

Oft wird aber gerade formuliert, dass diese „Fähigkeit des Rechners“ eher kontraproduktiv sei, sprich der Schüler[1] verlernt das Umformen von Termen und beim Studium sei dies auch verboten.

Wir versuchen, mit diesem Heft auch diesen Aussagen nachzugehen bzw. dies durch die Art der gewählten Beispiele zu hinterfragen.
Sicherlich ist klar, dass man herkömmliche Aufgaben z.B. zum Lösen von Gleichungen nicht einfach durch Knopfdruck an den Rechner übergeben kann. Es geht vor allem darum, beim Einsatz eines CAS-Rechners sich immer die Frage zu stellen, welche Schülertätigkeiten sind für dieses Themengebiet wichtig und daraus ergibt sich dann, in welcher Form und in welcher Unterrichtsphase der Rechner eingesetzt werden sollte.
Zwei Beispiele seien hier angedeutet:

	
Beschreibe die Wirkungen der Klammersetzung und der Potenzen auf die Vorzeichen des Ergebnisses. Erkläre.	Der Rechner hat Termumformungen vorgenommen. Füge jeweils zwischen Ein- und Ausgabe mindestens einen Umformungsschritt ein.

[1] Die Personenbezeichnung „Schüler“ gilt für m/w/d Lernende

Frau Professor Regina Bruder hat am 13.10.2020 in ihrem Onlineseminar folgende Folie präsentiert:

***Vision* für einen rechnergestützten MU ab Kl.7**

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Rechnernutzung als selbstverständliches und
  individuell freigestellt
  unterschiedlich eingesetztes Werkzeug
  insbesondere zur Entwicklung von Modellierungs- und Problemlösekompetenzen und mit Anlässen für mathematisches Argumentieren;
  - Rechner als Werkzeug zum besseren Mathematikverstehen
  - Rechner als Kontrollinstrument und Reflexionsanlass

Zum Potential eines computergestützten Mathematikunterrichts erwähnte Frau Bruder insbesondere die folgenden Punkte:

Reduktion schematischer Abläufe
(Befreiung von kognitiver Last, *wenn man weiß, was der Rechner wie kann…)*

Unterstützung beim **Entdecken** mathematischer Zusammenhänge,
wenn man weiß, worum es geht (Zielklarheit)

Unterstützung **individueller** Präferenzen und Zugänge, *wenn es offene Aufgaben bzw. Wahlmöglichkeiten gibt…*

Verständnisförderung mathematischer Zusammenhänge durch
Dynamisierung und Darstellungswechsel sowie entschleunigende Beschreibungen und durch Exaktifizierung (CAS).

Wir haben im vorliegenden Heft versucht, diese vier Punkte bei der Wahl der Aufgaben im Blick zu behalten.

1. Lernbereich 1: Arbeiten mit Termen und Gleichungen

Lernbereich 1:	**Arbeiten mit Termen und Gleichungen**	**24 Ustd.**

Beherrschen des Umgangs mit Variablen und Termen beim Lösen von linearen Gleichungen	Arbeiten mit Variablen am GTR, Unterscheiden von Namen, Wert und Bedeutung einer Variablen ➔ Kl. 7, LB 2
- Erkennen der Struktur von Termen	neben Summe, Produkt und Quotient auch deren Verknüpfungen
- Umformen von einfachen Termen und Gleichungen ohne Hilfsmittel	$19\cdot a\cdot b-17\cdot a\cdot c-a\cdot b$; $3\cdot(4\cdot x+2\cdot y)$; $3-(x+4)=5\cdot x$; $(x+2)\cdot(x-3)=x^2$
- binomische Formeln	geometrische Interpretation
Kennen der Verwendung von CAS beim Umformen komplexerer Terme und Gleichungen	$\frac{2}{a+1}=\frac{3}{a-1}$; $a\cdot[a-(3\cdot c+2\cdot a)]$
Einblick gewinnen in das Lösen von Ungleichungen	

[2]

Technische Hinweise für Lehrkräfte

Variable sind „Platzhalter“, für die man z. B. Zahlen, Größen, Vektoren, Listen oder Terme einsetzen kann. Mit ihnen lassen sich Rechenoperationen ausführen. Variable werden eingesetzt als

- allgemeine Zahl 2x
- Unbekannte 2x = 4
- Veränderliche f(x) = 2x

In der Mathematik bezeichnet der Begriff **Term** einen sinnvollen Ausdruck, der Zahlen, Variablen, Symbole (für mathematische Verknüpfungen) und Klammern enthalten kann.

Hinweise

Definierte und undefinierte Variablen unterscheiden: Eine undefinierte Variable wird wie ein algebraisches Symbol behandelt.

Bei einer definierten Variablen wird der aktuelle Wert der Variablen angezeigt.

Variable definieren in ***Scratchpad*** oder ***Calculator***:

1. menu – *Aktionen – Define*.
2. „Ergibtanweisung ":=", Tasten ctrl [=].
3. Zuweisungsoperator sto→ Tasten ctrl var.

Als Variable werden Buchstaben oder Zeichenfolgen aus Buchstaben und Ziffern verwendet.
Am Anfang darf keine Ziffer stehen.
Ob ein Zeichen oder eine Zeichenfolge als Variable definiert wurde, lässt sich daran erkennen, dass bei Eingabe dieser Variablen diese fettgedruckt erscheint.

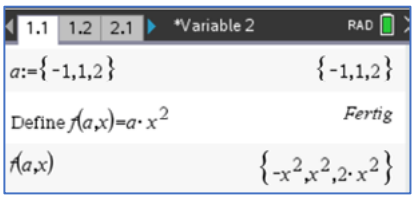
Umsetzung auf dem TI-Nspire

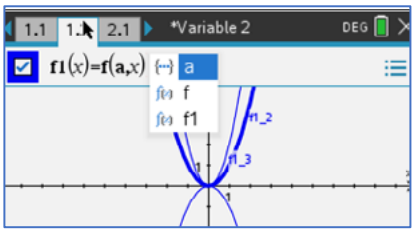
© undefinerte Variable:	
$x+y+2\cdot x-3\cdot y+x^2$	$x^2+3\cdot x-2\cdot y$
© definerte Variable:	
$x:=2$	2
$y:=-1$	-1
$x+y+2\cdot x-3\cdot y+x^2$	12

Define $dreieck1(g,h)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$	*Fertig*
$m:=3$	3
$5\rightarrow n$	5
$\sqrt{m}\cdot n^2$	$25\cdot\sqrt{3}$
$dreieck1(10,2)$	10
dreieck1(m,n)	

[2] Auszug aus dem Lehrplan Gymnasium Mathematik Klasse 8 für den Freistaat Sachsen

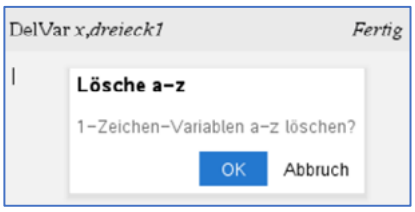
Wird eine Variable im ***Scratchpad*** oder in einem *Problem* innerhalb eines Dokuments definiert, so bleibt sie für alle Anwendungen im ***Scratchpad*** bzw. auf allen Seiten dieses *Problems* erhalten.
Öffnet man ein neues Dokument oder erzeugt man ein neues *Problem*, so stehen die vorher definierten Variablen dort nicht zur Verfügung.
Im Beispiel rechts wurde ein Dokument mit dem Namen „Variable 2“ angelegt. Es ist unterteilt in das *Problem 1* mit den Seiten 1.1 und 1.2 und ein *Problem 2* mit der Seite 2.1, erkennbar an den „Reitern“ oben links auf dem Bildschirm.
Eine Übersicht aller aktuell in einem Dokument bzw. einem *Problem* gespeicherten Variablen lässt sich mithilfe der Taste [var] anzeigen.



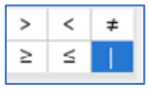


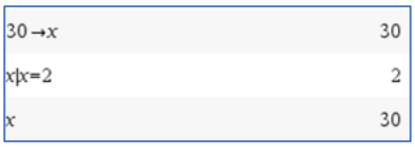
Eine definierte Variable löschen:

Die DelVar-Anweisung verwenden.
Scratchpad oder ***Calculator*** – [menu] – *Aktionen – Variable löschen*
Alle Variablen mit einem einzigen Buchstaben löschen:
Scratchpad oder ***Calculator*** – [menu] – *Aktionen – Lösche a - z*

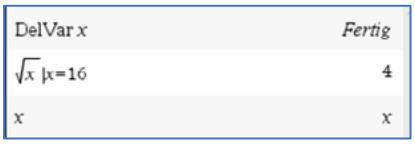


Eine Variable vorübergehend mit einem anderen Wert belegen:
Den „with“-Operator eingeben über Zweitbelegung von [=]: [ctrl] [=]

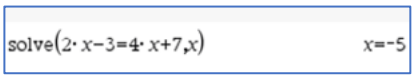




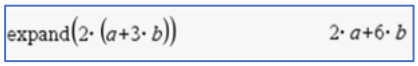
Den definierten Wert einer Variablen vorübergehend überschreiben.



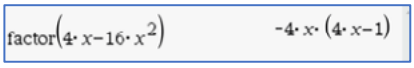
Gleichung/Ungleichung lösen:
Scratchpad oder ***Calculator*** – [menu] – *Algebra – Löse*



Term ausmultiplizieren:
Scratchpad oder ***Calculator*** [menu] *Algebra - Entwickle*

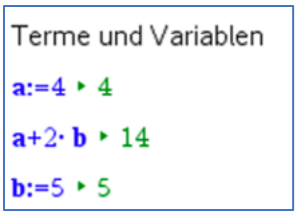


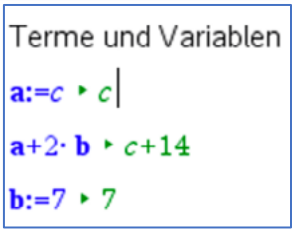
Term ausklammern:
Scratchpad oder ***Calculator***: [menu] *Algebra - Faktorisiere*



Notes

Diese Applikation ist einerseits zum Erfassen von Textdokumenten geeignet, bietet aber andererseits vor allem auch die Möglichkeit, Berechnungen durchzuführen, die mit allen anderen Applikationen verknüpft werden können.
In der Applikation **Notes** können Variablen gespeichert werden, wenn man dazu ein „Mathe-Feld“ benutzt (ctrl M).
Der Vorteil hierbei ist, dass sämtliche Berechnungen, in denen die Variable vorkommt, aktualisiert werden, wenn man den Wert dieser Variablen ändert. Dies erfolgt im Übrigen auf der gesamten **Notes**-Seite, also nicht nur „von oben nach unten“, wie in manch anderen Mathematikprogrammen.





Lists&Spreadsheet

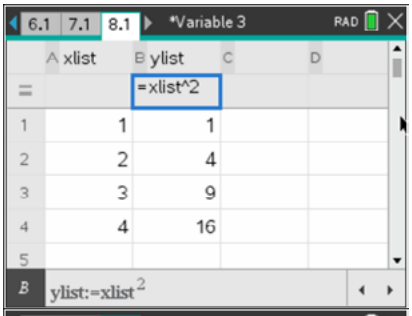
In dieser Applikation können Variablen an zwei Stellen definiert werden:

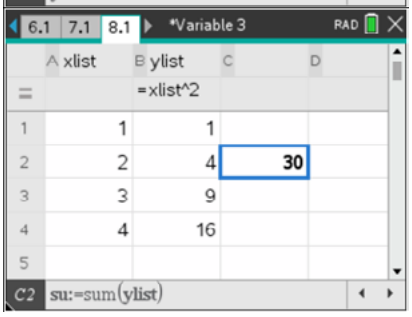
1. In der obersten Zeile kann jede Spalte als Liste mit einem Namen belegt werden. Diese Liste ist dann in allen weiteren Applikationen des gleichen Problems mit diesem Namen nutzbar.

   Hier wird z. B. eine zweite Liste **ylist** definiert, indem man die Liste **xlist** quadriert.

2. Innerhalb des List&Spreadsheetblattes lassen sich wie in anderen Tabellenkalkulationen relative oder absolute Zellbezüge definieren.

   Hier wird z. B. die Zelle C2 mit der Variablen „**su**“ durch die Anweisung **su := sum(ylist)** belegt.
   Durch Aktvierung mit enter wird dann diese Summe berechnet.





Hinweis:

Für die Schüler sollte die Einführung in das Arbeiten mit Variablen auf dem TI-Nspire CAS nicht in dieser kompakten Form erfolgen. Vielmehr sollte deren Einführung nach und nach in Verbindung mit geeigneten Aufgaben geschehen. Im Folgenden werden einige Arbeitsblätter vorgeschlagen, die Anregungen für eine schrittweise Einführung in verschiedene mathematische Anwendungen des TI-Nspire enthalten.

Arbeitsblatt 0: Rechnen mit Zahlen

Löse die Aufgaben, ohne ein digitales Hilfsmittel zu verwenden.

1. Vermindere ein Siebtel um ein Drittel.
2. Bilde das Produkt aus dem Quadrat von 3 und dem Quadrat von 7.
3. Berechne das Quadrat aus der Summe von 3 und 7.
4. Berechne den Quotienten aus zwei Drittel und fünf Siebtel.
5. Berechne einen dezimalen Näherungswert für $7^2 : 3^3$.
6. Berechne $7\frac{1}{3} - \left(3\frac{1}{7} + 1{,}2\right)$.
7. Ermittle $\left(\frac{4}{5} + 0{,}2\right)^{97}$.
8. Was ergibt sich für $\left(0{,}125 - \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4} - 0{,}25}$?
9. Berechne die Summe aus $\sqrt{10^2 - 6^2}$ und $\left(\sqrt{15^2} - \sqrt{256}\right)$.
10. Wieviel sind 200% von $2^4 \cdot \frac{1}{4^2}$?
11. Berechne $\sqrt{8} : \sqrt[3]{8}$.

Verwende nun zur Kontrolle deiner Ergebnisse den CAS-Rechner. Beachte dazu folgende Hinweise:

- Dezimalpunkt [.] statt Komma [,].
- Vorzeichenminus [(−)] und Rechenminus [−] unterscheiden.
- Gemischte Zahlen als Summe von ganzer Zahl und echtem Bruch eingeben.
- Notwendige Klammersetzungen beachten.
- Der Rechner setzt nach dem Öffnen einer Klammer auch immer sofort die schließende Klammer.
- Mit der Cursortaste ▸ oder der Tabulatortaste [tab] kann man aus der Klammer (aus dem Exponenten, aus dem Zähler oder Nenner) wieder herauskommen.
- Das Prozentsymbol findest du unter der Taste [?!▸].
- Mit [menu] ***Aktionen - Protokoll löschen*** kann der Eintrag auf einer Seite gelöscht werden, ohne die Seite selbst zu entfernen.
- Eine dezimale Näherungsangabe erhält man, wenn ein Dezimalpunkt in der Eingabe auftaucht oder nach Drücken von [ctrl][enter].

Fehler korrigieren/ Löschen von Einträgen:

Befehl rückgängig machen	[esc]
Zeichen löschen	Cursor hinter das Zeichen setzen und [del] drücken
eine ganze Zeile/ markierten Ausdruck löschen	[ctrl] [del]
Arbeitsschritt(e) rückgängig machen	[ctrl] [esc] oder [ctrl] [Z]
einen rückgängig gemachten Arbeitsschritt wieder aufrufen	[ctrl] [Y]
alle Einträge auf einer Seite löschen (Anwendung „**Calculator**“ oder **Scratchpad**)	[menu] Aktionen - Protokoll löschen
in einem Dokument eine ganze Seite löschen	[doc] Seitenlayout - Seite löschen

Eingabe korrigieren:
Solange eine Eingabe nicht durch [enter] abgeschlossen wurde, kann sie wie oben angegeben korrigiert werden.
Wurde eine Berechnung mit [enter] abgeschlossen, kann die zugehörige Eingabe nur dann korrigiert werden, wenn dieser Ausdruck mit der Pfeiltaste ▲ angesteuert, dadurch markiert und mit [enter] in die Eingabezeile kopiert wird. Der kopierte Ausdruck kann dann verändert werden.

Wichtige Tastenkürzel:

Ausdruck markieren	[shift] ◀▶
Ausdruck ausschneiden	Ausdruck markieren und [ctrl] [X]
Ausdruck kopieren	Ausdruck markieren und [ctrl] [C]
Ausdruck einfügen	[ctrl] [V]

Standardeinstellungen des Rechners wiederherstellen:

[on] ***Einstellungen – Werksstandardwerte wiederherstellen***
Der Wechsel zwischen den Applikationen erfolgt mit [tab].

LB1 Lösungen zu Arbeitsblatt 0:

Lösungen mit CAS (Es wird jeweils eine von mehreren möglichen Tastenfolgen angegeben.)

Aufgabe 1:
[ctrl] [÷] [1] [tab] [7] [−] [ctrl] [÷] [1] [tab] [3] [enter]

$\frac{1}{7}-\frac{1}{3}$ $\quad \frac{-4}{21}$

Aufgabe 2:
[3] [x²] [×] [7] [x²] [enter]

$3^2 \cdot 7^2$ $\quad 441$

Aufgabe 3:
[(] [3] [+] [7] [tab] [x²] [enter]

$(3+7)^2$ $\quad 100$

Aufgabe 4:
[ctrl] [÷] [2] [tab] [3] [tab] [ctrl] [÷] [ctrl] [÷] [5] [tab] [7] [enter]

$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$ $\quad \frac{14}{15}$

Aufgabe 5:
[ctrl] [÷] [7] [x²] [tab] [3] [^] [3] [ctrl] [enter]

$\frac{7^2}{3^3}$ $\quad 1.81481$

Aufgabe 6:
[7] [+] [ctrl] [÷] [1] [tab] [3] [tab] [−] [(] [3] [+] [ctrl] [÷] [1] [tab] [7]
[tab] [+] [1] [.] [2] [enter]

Da ein Dezimalbruch in der Eingabe vorkommt, wird das Ergebnis als dezimale Näherung angegeben. Will man dies vermeiden, kann man z. B. 1,2 durch $\frac{6}{5}$ ersetzen.

$7+\frac{1}{3}-\left(3+\frac{1}{7}+1.2\right)$ $\quad 2.99048$

$7+\frac{1}{3}-\left(3+\frac{1}{7}+\frac{6}{5}\right)$ $\quad \frac{314}{105}$

Aufgabe 7:
[(] [ctrl] [÷] [4] [tab] [5] [tab] [−] [0] [.] [2] [tab] [^] [9] [7] [enter]

$\left(\frac{4}{5}+0.2\right)^{97}$ $\quad 1.$

Aufgabe 8:
[(] [0] [.] [1] [2] [5] [ctrl] [÷] [1] [tab] [8] [tab] [tab] [^] [(] [ctrl] [÷] [1] [tab]
[4] [tab] [−] [0] [.] [2] [5] [enter]

$\left(0.125-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}-0.25}$ $\quad \text{undef}$

Aufgabe 9:
[ctrl] [x²] [1] [0] [x²] [−] [6] [x²] [tab] [−] [(] [ctrl] [x²] [1] [5] [x²] [tab] [−]
[ctrl] [x²] [2] [5] [6] [enter]

$\sqrt{10^2-6^2}-\left(\sqrt{15^2}-\sqrt{256}\right)$ $\quad 9$

Aufgabe 10:
[2] [0] [0] [?!▸] [▸▸▸▸▸] [enter] [2] [^] [4] [tab] [×] [ctrl] [÷] [1] [tab] [4] [x²] [enter]

$200\% \cdot 2^4 \cdot \frac{1}{4^2}$ $\quad 2$

Aufgabe 11:
[ctrl] [÷] [ctrl] [x²] [8] [tab] [tab] [ctrl] [^] [3] [tab] [8] [enter]

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{8}}$ $\quad \sqrt{2}$

Arbeitsblatt 1: Variablen und Terme mit einem CAS verwenden

Beispiel: Spiele mit „a, h, a“:

$a \cdot h \cdot a$	$a^2 \cdot h$
$ah+ah$	$2 \cdot ah$
Define $aha(x)=x+\frac{1}{x}$	*Fertig*
$aha\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{5}{2}$
$aha(0)$	undef

1. Die Variablen **a**, **h** und **a** werden multipliziert.
   Der CAS-Rechner gibt den Term $a^2 \cdot h$ zurück.
2. Die Variable **ah** wird mit sich selbst addiert.
   Der CAS-Rechner gibt den Term $2 \cdot ah$ zurück.
3. Die Variable **aha** wird als Funktion von x definiert.
   Ihr wird der Term $x + \frac{1}{x}$ zugeordnet.
4. $aha\left(\frac{1}{2}\right)$ berechnet den Wert des Terms $x + \frac{1}{x}$ für $x = \frac{1}{2}$
5. $aha(0)$: Der Funktionswert von aha(x) an der Stelle x = 0 ist nicht definiert.

Variablen:
- sind „Platzhalter“, für die man z. B. Zahlen, Größen, Listen oder Terme einsetzen kann
- beschreiben häufig veränderliche Größen
- dienen der Abkürzung umfangreicher Ausdrücke
- werden oft durch Buchstaben oder Kombinationen von Buchstaben und Zahlen angegeben

Aufgaben:

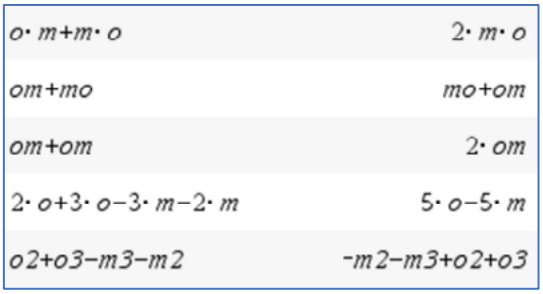
1. Spiele mit n, o, t, e, n
   a) Erkläre die Rechnung in der ersten Zeile.
   b) Gib die Angaben in der 2. Zeile ein und schließe die Eingabe durch enter ab. Versuche die Antwort des Rechners zu erklären.

$no-no$	0
Define $not(x)=2x$	

   c) Welches Ergebnis erwartest du bei den folgenden Eingaben?
      (1) $\frac{not}{not+not}$
      (2) $\frac{ton}{ton+ton}$
      (3) $\frac{note}{note-note}$
      (4) $e^2 + 2n - 3 \cdot e \cdot e - 5n + to - t \cdot o$

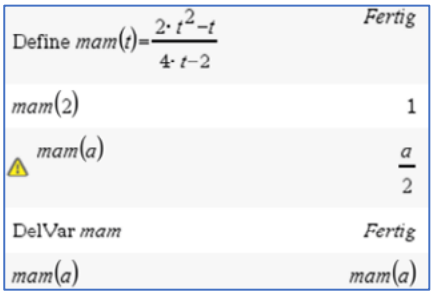
      Gib jeweils erst eine Prognose und überprüfe dann mit dem CAS-Rechner. Erkläre die Arbeitsweise des CAS bei diesen Aufgaben.

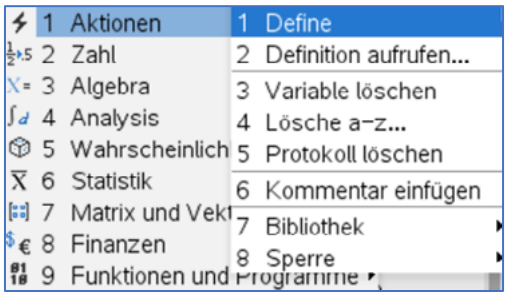
2. Erkläre anhand des Bildschirmabdrucks:
   a) Welche Wirkung hat es, wenn du beim Eingeben in den CAS-Rechner den „Malpunkt“ zwischen Buchstabenvariablen weglässt?
   b) Wie „versteht“ das CAS eine Eingabe, bei der zuerst eine Zahl und dann eine Buchstabenvariable eingegeben wird?
   c) Wie gibt das CAS eine Eingabe zurück, bei der zuerst eine Buchstabenvariable und danach ohne „Malpunkt“ eine Zahl eingegeben wird?



3. Finde einen Term, bei dem neben verschiedenen geeigneten Rechenoperationen nur die vier Buchstaben a, a, m, m verwendet werden und bei dem die nachfolgenden Ergebnisse entstehen.
   a) 2a + 2m b) am² c) 2ma
   d) mama e) 2a + 1 f) 2

4. Vollziehe die Rechnungen auf dem nebenstehenden Bildschirmabdruck nach und erkläre sie.
   Klicke auf den Warnhinweis und beurteile, ob er berechtigt ist.





Hinweise:

Ausgeschlossen von Variablennamen sind solche, die der Rechner als Befehl kennt, z. B. „not“.
Das erste Zeichen einer Variablen darf keine Zahl sein.
Das CAS kann Terme automatisch vereinfachen. Dabei werden die Variablen nach fallenden Potenzen und alphabetisch geordnet.
Die Zuweisung von Zahlen zu Variablen kann z. B. mit der Anweisung *Define* erfolgen.
Die Belegung einer Variablen kann mit *DelVar* gelöscht werden.
Die Anweisungen *Define* und *DelVar* findest du im ***Calculator*** unter menu *Aktionen*. Werden Buchstaben auf dem CAS-Rechner fettgedruckt angezeigt, dann sind diese Buchstaben vorher als Variable definiert worden.
Du kannst sehen, welche Variablen dein CAS-Rechner im aktuellen Problem gespeichert hat, wenn du die Taste var drückst.

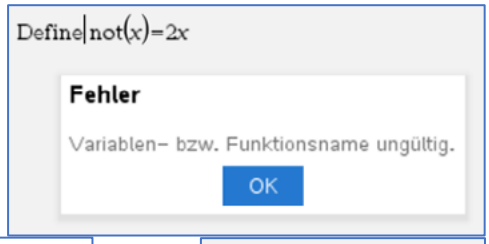
LB1 Lösungen zu Arbeitsblatt 1:

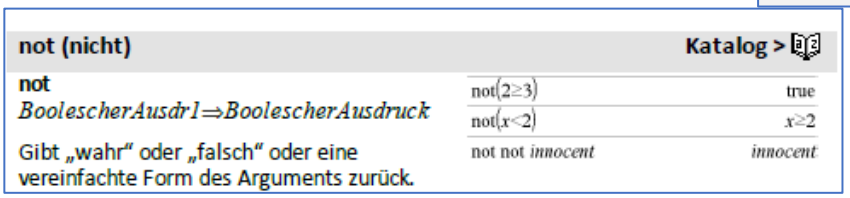
Aufgabe 1a:

„no“ wird als Variable aufgefasst und demzufolge ergibt no – no den Wert null.

Aufgabe 1b:

Der Rechner gibt eine Fehlermeldung zurück, weil „not“ nicht als Variablennamen verfügbar ist. Der Ausdruck „not“ gehört zu den vorinstallierten Befehlen des Rechners. Man findet dazu im Referenceguide den Hinweis:





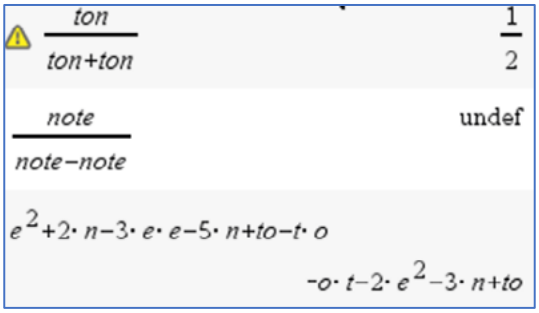
Aufgabe 1c:

(1) Fehlermeldung (s. Aufgabe 1b)

(2) $\frac{ton}{ton+ton} = \frac{1 \cdot ton}{2 \cdot ton} = \frac{1}{2}$

(3) $\frac{note}{note-note} = \frac{1 \cdot note}{0 \cdot note} = \frac{1}{0}$ → nicht definiert wegen Division durch 0.

(4) Der Rechner fasst automatisch zusammen und sortiert nach Vorzeichen, alphabetisch und nach fallenden Potenzen.



Aufgabe 2:

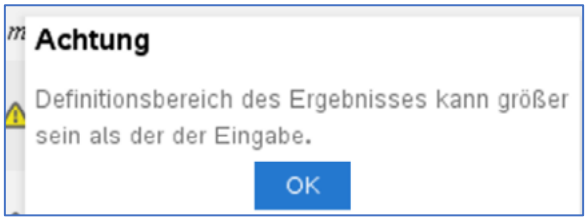
a) Steht ein „Malpunkt“ zwischen Buchstaben, so werden die davor sowie die dahinter stehenden Buchstaben als verschiedene Variablen aufgefasst und es wird ihr Produkt gebildet.
Steht kein „Malpunkt“ zwischen Buchstaben, so wird die Buchstabenfolge als eine einzige Variable aufgefasst.

b) Steht eine Zahl vor einer Variablen, so wird die Eingabe als Produkt "$Zahl$" · "$Variable$" interpretiert, auch wenn man nicht auf die „Maltaste“ drückt.

c) Steht eine Zahl nach der Variablen, so wird die Zeichenkette als eine Variable interpretiert.

Aufgabe 3:

$a+a+m+m$	$2\cdot a+2\cdot m$
$am\cdot am$	am^2
$ma+ma$	$2\cdot ma$
$mama$	$mama$
⚠ $a+a+\frac{m}{m}$	$2\cdot a+1$
⚠ $\frac{a}{a}+\frac{m}{m}$	2



Auch hier gibt es Warnhinweise, die jedes Mal berechtigt sind, denn in der Eingabe steht mindestens eine Variable im Nenner. Hier wäre der Term nicht definiert. In der Ergebnisanzeige kommt kein Bruch vor, es gibt dort also keine Einschränkung des Definitionsbereiches.

Aufgabe 4:

Define $mam(t)=\frac{2\cdot t^2-t}{4\cdot t-2}$	*Fertig*
$mam(2)$	1
⚠ $mam(a)$	$\frac{a}{2}$
DelVar *mam*	*Fertig*
$mam(a)$	$mam(a)$

Zeile 1: Die Variable mam(t) (sprich „mam von t“) wird dem Term $\frac{2\cdot t^2-t}{4\cdot t-2}$ zugeordnet.

Zeile 2: mam(2) ist der Wert dieses Terms für t = 2, denn

$$mam(2)=\frac{2\cdot 2^2-2}{4\cdot 2-2}=\frac{6}{6}=1$$

Zeile 3: Es ist $mam(a)=\frac{2\cdot a^2-a}{4\cdot a-2}=\frac{a\cdot(2a-1)}{2\cdot(2a-1)}=\frac{a}{2}$. Der Warnhinweis ist berechtigt (siehe Lösung zu Aufgabe 3), denn der definierte Term $\frac{2\cdot t^2-t}{4\cdot t-2}$ ist für $t=\frac{1}{2}$ nicht definiert, während der umgeformte Term $\frac{t}{2}$ keine nicht definierten Stellen hat.

Zeile 4: Der Befehl *DelVar* mam löscht die Variable „mam“.

Zeile 5: Nachdem die Variable „mam“ gelöscht wurde, ist auch der ihr vorher zugewiesene Term nicht mehr aktiviert.

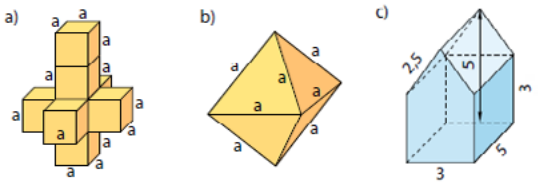
Arbeitsblatt 2: Arbeiten mit Variablen und Termen – Übungen

1. Öffne ein neues Dokument mit der Anwendung ***Calculator***. Gib die sieben Terme ein, die du auf den Screenshots am linken Rand siehst. Der CAS-Rechner formt die eingegebenen Terme um.
   Begründe diese Umformungen durch handschriftliches Nachrechnen.
   Durch Klicken auf die Warnhinweise kannst du diese lesen.
   Prüfe, ob die Warnhinweise berechtigt sind.

$\frac{3\cdot a-6\cdot b}{3}$	$a-2\cdot b$
2^{3+1}	16
$3^{2}+1$	10
$\sqrt{x^2}$	$\lvert x\rvert$

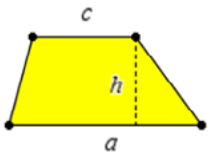
⚠ $\frac{1+b}{(1+b)\cdot(2-b)}$	$\frac{-1}{b-2}$
⚠ $\frac{a^2-a}{a-1}$	a
⚠ $\frac{\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x}}{x+1}$	$\frac{-1}{x+1}$

2. Ermittle für jeden der abgebildeten Körper einen Term für die Berechnung seines Volumens. Berechne für die Teilaufgaben a und b die Termwerte für a = 5 cm.
   Hinweise: Für die Höhe h einer Pyramide mit gleichlangen Seitenkanten a gilt:
   $h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.



Bilder aus „Fundamente der Mathematik, Sachsen-Anhalt, Klasse 7“; Cornelsen 2015, S. 163, 170

3. Für den Flächeninhalt eines Trapezes gilt die Formel $A=\frac{a+c}{2}\cdot h$.



$fl(a,c,h):=\frac{a+c}{2}\cdot h$	*Fertig*
$fl(3,2,1.5)$	3.75
$fl(10,5,x)$	$\frac{15\cdot x}{2}$
$fl(x,2\cdot x,3\cdot x)$	$\frac{9\cdot x^2}{2}$

   a) Erläutere die geometrische Bedeutung der Variablen fl, a, c und h in der ersten Zeile des Screenshots.
   b) Begründe, warum man die Variable a nicht sowohl für eine Seite als auch für den Flächeninhalt benutzen kann.
   c) Beschreibe die Form der Trapeze, deren Flächeninhaltsberechnungen auf dem Screenshot abgebildet sind.
   d) Beurteile, ob die folgenden Tastenfolgen für eine Realisierung der Flächeninhaltsberechnung eines Trapezes geeignet sind. Korrigiere eventuelle Fehler.

$\frac{5+7}{2}\cdot 3$: [ctrl] [÷] [5] [+] [7] [×] [3] [enter] $\frac{5+4}{2}\cdot 1$: [(] [5] [+] [4] [)] [×] [0] [,] [5] [enter]

4. Welcher Name wurde hier verwendet? Finde die erzeugenden Terme. Entwickle eigene „Rätsel“.

Name:

Term 1:

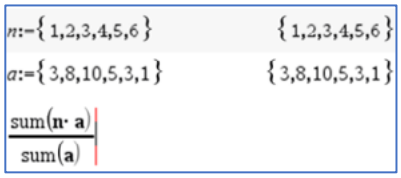
Term 2:

Vertiefungen:

5. Definiere den Term z(x). Gib eine Vermutung dafür an, wie der Term z(z(x)) aussieht. Berechne z(z(x)) mit dem CAS-Rechner und vergleiche das Ergebnis mit deiner Vermutung.
   a) $z(x) := x + 1$ b) $z(x) := \frac{1}{x}$ c) $z(x) := \frac{1}{x-1}$ d) $z(x) := 2$

6. Bei einer Mathe-Arbeit ergab sich folgender Notenspiegel:

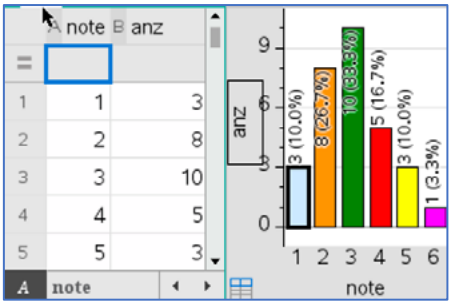
Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	3	8	10	5	3	1



   a) Erläutere die Bedeutung der nebenstehenden Rechnung von Phi Nung in diesem Sachzusammenhang.

   b) Francis will die Noten unter der Variablen „not“ speichern und erhält nebenstehende Fehlermeldung.
   Erkläre, woran das liegen könnte.

   c) Öffne in einer neuen Seite die Anwendung ***Lists&Spreadsheet***.
   Übertrage die Listen des Notenspiegels in die Spalten A und B, indem du in den Spaltenkopf die zugehörigen Variablen *note* bzw. *anz* einträgst und mit [enter] bestätigst.
   Über [menu] – *Daten* – *Ergebnisdiagramm* erzeugst du eine Säulendarstellung aus zusammenhängenden Säulen, ein Histogramm.
   Setze dann den Cursor auf die waagerechte Achse und wähle [ctrl] [menu] – *Kategorisches X erzwingen.* Du erhältst dann das Säulendiagramm mit getrennten und verschiedenfarbigen Säulen.
   Versuche, das Verfahren zu realisieren und beschreibe dein Vorgehen.



LB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 2:

Aufgabe 1:

Zeile 1: $\frac{3a-6b}{3} = \frac{3\cdot(a-2b)}{3} = a - 2b$

Zeile 2: $2^{3+1} = 2^4 = 16$

Zeile 3: $3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

Zeile 4: $\sqrt{x^2} = |x|$, weil x sowohl nicht negativ als auch negativ sein kann. Dann wäre x² in jedem Fall nicht negativ und man kann die Wurzel ziehen.

$\frac{3\cdot a-6\cdot b}{3}$	$a-2\cdot b$
2^{3+1}	16
3^2+1	10
$\sqrt{x^2}$	$\lvert x\rvert$

$\sqrt{2^2}$	2
$\sqrt{(-2)^2}$	2

Zeile 1: $\frac{1+b}{(1+b)\cdot(2-b)} = \frac{1}{2-b} = \frac{-1}{b-2}$

Zeile 2: $\frac{a^2-a}{a-1} = \frac{a\cdot(a-1)}{a-1} = a$

Zeile 3: $\frac{\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x}}{x+1} = \frac{\frac{1-(x+1)}{x}}{x+1} = \frac{\frac{1-x-1}{x}}{x+1} = \frac{\frac{-x}{x}}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$

⚠ $\frac{1+b}{(1+b)\cdot(2-b)}$	$\frac{-1}{b-2}$
⚠ $\frac{a^2-a}{a-1}$	a
⚠ $\frac{\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x}}{x+1}$	$\frac{-1}{x+1}$

Die Warnhinweise betreffen wieder die Definitionsbereiche von eingegebenem und ausgegebenem Term. Sie sind in jedem Falle berechtigt:

Zeile	DB eingegebener Term	DB ausgegebener Term
1	$b \in \mathbb{Q}, b \neq -1, b \neq 2$	$b \in \mathbb{Q}, b \neq 2$
2	$a \in \mathbb{Q}, a \neq 1$	$a \in \mathbb{Q}$
3	$x \in \mathbb{Q}, x \neq -1, x \neq 0$	$x \in \mathbb{Q}, x \neq -1$

Aufgabe 2a:

$V = 8 \cdot a^3 = 8 \cdot (5\ cm)^3 = 8 \cdot 125\ cm^3 = 1000\ cm^3$

Aufgabe 2b:

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (5\ cm)^3 = \frac{125}{3} \cdot \sqrt{2}\ cm^3 \approx 58{,}9\ cm^3$

Aufgabe 2c:

$\left(\frac{3\ m \cdot 2\ m}{2} + 3\ m \cdot 3\ m\right) \cdot 5\ m = 60\ m^3$

Aufgabe 3a:

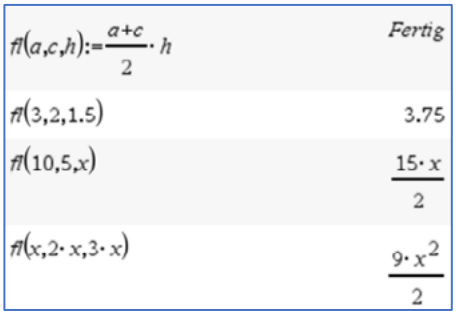
a und c sind die Längenmaße der zueinander parallelen Seiten, h ist die Maßzahl der Höhe und fl die Maßzahl des Flächeninhalts.

$fl(a,c,h) := \frac{a+c}{2} \cdot h$	*Fertig*

Aufgabe 3b:

In ein und derselben Formel kann man nicht zwei oder mehrere Größen durch die gleiche Variable beschreiben. Es kommt zu Fehlermeldungen. Die Eingabe $a(a,c,h) := \frac{a+c}{2} \cdot h$ ergibt diese Fehlermeldung:

Aufgabe 3c:



fl(3,2,1.5): Das Trapez mit den Grundseiten von 3 LE und 2 LE sowie einer Höhe von 1,5 LE hat einen Flächeninhalt von 3,75 FE. Die längere Grundseite ist um 1 LE größer als die andere und die Höhe halb so groß wie die längere Grundseite.

fl(10,5,x): Das Trapez mit den Grundseiten von 10 LE und 5 LE sowie einer Höhe von x LE hat einen Flächeninhalt von $\frac{15}{2}\cdot x$ FE. Die längere Grundseite ist doppelt so groß wie die andere und die Höhe kann beliebig gewählt werden. Es sind aber nur positive Werte für die Höhe sinnvoll.

fl(x,2x,3x): Das Trapez mit den Grundseiten von x LE und 2x LE sowie einer Höhe von 3x LE hat einen Flächeninhalt von $\frac{9}{2}\cdot x^2$ FE. Die längere Grundseite ist doppelt so groß wie die andere und die Höhe dreimal so groß wie die kürzere Grundseite.

Aufgabe 3d:

[ctrl] [÷] [5] [+] [7] [×] [3] [enter] Hier fehlt der Nenner 2.

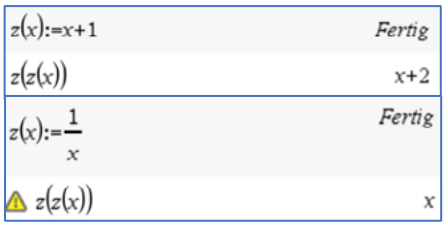
[(] [5] [+] [4] [)] [×] [0] [.] [5] [enter] Das würde gehen, denn für $\frac{1}{2}$ kann mit 0,5 multipliziert werden, allerdings müsste das Komma durch einen Punkt ersetzt werden.

Aufgabe 4:

Erzeugender Name: „werner“;
Term 1 (Beispiel): $w\cdot e\cdot r\cdot n\cdot e\cdot r$ Term 2 (Beispiel): $w+e\cdot r+n+e\cdot r$

Aufgabe 5a:

$z(x) := x+1, \quad z(z(x)) = (x+1)+1 = x+2$



Aufgabe 5b:

$z(x) := \frac{1}{x}; \quad z(z(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

Aufgabe 5c:

$z(x) := \frac{1}{x+1}; \quad z(z(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x+1}+1} = \frac{1}{\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+2}{x+1}} = \frac{x+1}{x+2}$

$z(x):=\frac{1}{x+1}$	*Fertig*
⚠ $z(z(x))$	$\frac{x+1}{x+2}$

Aufgabe 5d:

$z(x) := 2; \; z(z(x)) = 2$

$z(x):=2$	*Fertig*
$z(z(x))$	2

Aufgabe 6a:

$n:=\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$
$a:=\{3,8,10,5,3,1\}$	$\{3,8,10,5,3,1\}$
$n\cdot a$	$\{3,16,30,20,15,6\}$
$\text{sum}(\{3,16,30,20,15,6\})$	90
$\text{sum}(a)$	30
$\frac{\text{sum}(n\cdot a)}{\text{sum}(a)}$	3

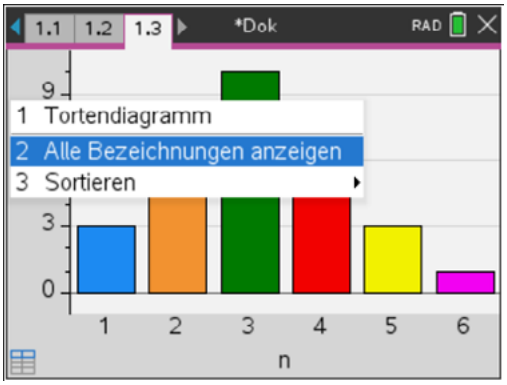
Die Variable n gibt die Liste der Noten an.
Die Liste a enthält die Anzahl der einzelnen Noten, also z. B. gibt es dreimal die Note 1 usw.
Das Produkt $n \cdot a$ gibt eine Liste zurück, deren Elemente die Produkte der Elemente gleicher Nummer beider Listen n und a sind.
$n \cdot a = \{1 \cdot 3, 2 \cdot 8, 3 \cdot 10, 4 \cdot 5, 5 \cdot 3, 6 \cdot 1\}$
$= \{3,16,30,20,15,6\}$
$sum(n \cdot a)$ gibt die Summe der Listenelemente zurück: $sum(n \cdot a)$=3+16+30+20+15+6=90
$sum(a)$ gibt analog die Liste der Anzahlen der erteilten Noten zurück, es wurden also 30 Arbeiten bewertet.
$\frac{sum(n \cdot a)}{sum(a)} = \frac{90}{30} = 3{,}0$ gibt den Notendurchschnitt bei der Klassenarbeit an.

Aufgabe 6b:

Der Name „not“ kann nicht als Variablenname verwendet werden, da er im TI als Befehl vorinstalliert ist.

Aufgabe 6c:

Einen großen Teil der Beschreibung des Vorgehens kann man dem Aufgabentext entnehmen. Zu ergänzen ist noch, wie man das mit dem Säulendiagramm und dem Bezeichnen hinbekommt:
Nach dem Schritt [ctrl] [menu] – *Kategorisches X erzwingen* setzt man den Cursor auf die Grafikoberfläche und wählt noch *„Alle Bezeichnungen anzeigen“.*
Beim Schritt [menu] – *Daten – Ergebnisdiagramm* wählt man für „x-Liste“ die Variable note und für *„Ergebnisliste“* die Variable anz aus und entscheidet sich, ob das Diagramm auf derselben Seite wie die Tabelle („*Seite teilen*“) oder auf einer neuen Seite angezeigt wird.



Arbeitsblatt 3: Arbeiten mit Variablen und Termen – Umformen von Termen mit CAS

1. Interpretiere die Ergebnisse des CAS-Rechners. Beschreibe die Wirkung der verwendeten Befehle.

$\text{factor}\left(2\cdot x^2+6\cdot x\right)$	$2\cdot x\cdot(x+3)$
$\text{expand}\left(5\cdot a^2\cdot(1-a)\right)$	$5\cdot a^2-5\cdot a^3$

menu - *Algebra – Faktorisiere*
menu - *Algebra – Entwickle*

2. Welche Zahl hat sich Daniel gedacht?
„Ich denke mir eine Zahl, multipliziere sie erst mit 7, das Ergebnis mit 11 und dieses wiederum mit 13. Von diesem Produkt subtrahiere ich die gedachte Zahl und dividiere das Ergebnis durch 1000.“

3. Beschreibe eine Möglichkeit für eine handschriftliche Überprüfung der Anzeige des CAS-Rechners.

$\text{expand}\left(\frac{x^3-x^2}{x+1}\right)$	$\frac{-2}{x+1}+x^2-2\cdot x+2$

4. Wende den Befehl *domain(Term, Variable)* auf die folgenden Terme an, so wie in den nebenstehenden Beispielen.
a) $\sqrt{x+1}$ b) $\frac{1}{x^2-1}$ c) $\frac{1}{x^2+1}$
Beschreibe, wozu dieser Befehl verwendet wird.

$\text{domain}\left(\frac{1}{x}-1,x\right)$	$x\neq 0$
$\text{domain}\left(\frac{1}{x-1},x\right)$	$x\neq 1$

5. Beurteile, ob die Umformungen richtig sind. Benenne gegebenenfalls fehlerhafte Umformungen.

$$\frac{4}{a^2+5b^2}-\frac{10}{3a^2+5b^2}=\frac{4\cdot 3-10\cdot 1}{3a^2+5b^2}=\frac{2}{3a^2+5b^2}$$

Vertiefungen:

6. Unter menu *Algebra - Bruchwerkzeuge* gibt es verschiedene Befehle für die Arbeit mit Brüchen. Probiere diese Befehle aus und beschreibe ihre Wirkung.

7. Unter menu *Zahl* findest du weitere interessante Befehle für Zahlenterme. Untersuche die Handhabung und Wirkung der Befehle *Kleinstes gemeinsames Vielfaches* und *Größter gemeinsamer Teiler*. Bereite dazu einen kleinen Vortrag vor.

LB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 3:

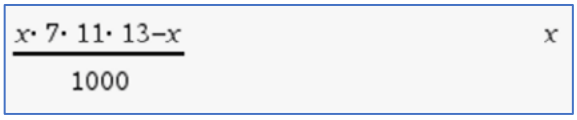
Aufgabe 1

expand() versucht den eingegebenen Term in eine Summe und/oder eine Differenz einfacher Ausdrücke umzuformen. Dagegen versucht *factor()* den eingegebenen Term in ein Produkt und/oder einen Quotienten einfacher Faktoren umzuformen.

Aufgabe 2:

$$\frac{x \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - x}{1000} = \frac{1001x - 1x}{1000} = \frac{1000x}{1000} = x$$

Daniel erhält als Ergebnis immer die ursprünglich gedachte Zahl.



Aufgabe 3:

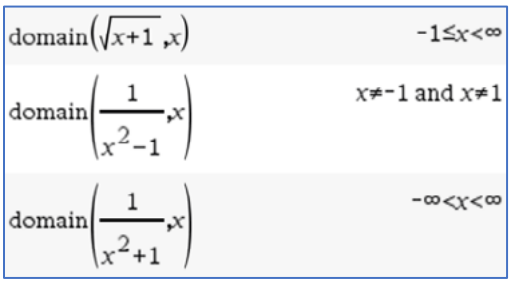
Eine von mehreren möglichen Überprüfungen besteht darin, den vom CAS zurückgegebenen Term durch Bilden des Hauptnenners und Zusammenfassen wieder in die ursprünglich gegebene Form zu bringen.

$$\frac{-2}{x+1} + x^2 - 2x + 2 = \frac{-2 + x^2 \cdot (x+1) - 2x \cdot (x+1) + 2 \cdot (x+1)}{x+1}$$

$$= \frac{-2 + x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x + 2x + 2}{x+1} = \frac{x^3 - x^2}{x+1}$$

Aufgabe 4:

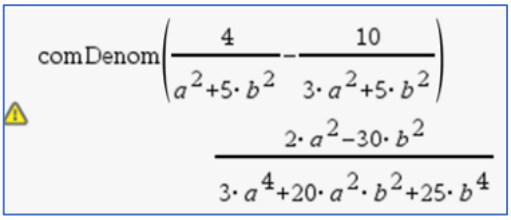
Der Befehl *„domain(Term, Variable)“* gibt die Werte zurück, für die der Term in Bezug auf die eingegebene Variable nicht definiert ist oder für die er definiert ist. Man kann auf den rationalen Definitionsbereich schließen.



Aufgabe 5:

$$\frac{4}{a^2 + 5b^2} - \frac{10}{3a^2 + 5b^2} = \frac{4 \cdot 3 - 10 \cdot 1}{3a^2 + 5b^2} = \frac{2}{3a^2 + 5b^2}$$

Die Umformung ist fehlerhaft. Der Bildschirmabdruck zeigt eine richtige Lösung.

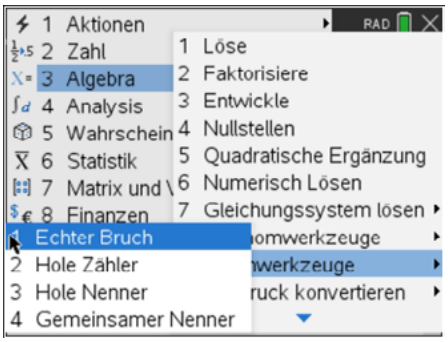


Der Fehler liegt in der falschen Berechnung des Hauptnenners, der hier nur aus den ersten Summanden beider Nenner gebildet wurde. Bei der Berechnung des Hauptnenners müssen die beiden einzelnen Nenner vollständig berücksichtigt werden. Zur Nutzung des CAS-Rechners vergleiche dazu Aufgabe 6.

$$\frac{4}{a^2 + 5b^2} - \frac{10}{3a^2 + 5b^2} = \frac{4 \cdot (3a^2 + 5b^2) - 10 \cdot (a^2 + 5b^2)}{(a^2 + 5b^2) \cdot (3a^2 + 5b^2)} = \frac{2a^2 - 30b^2}{3a^4 + 20a^2 \cdot b^2 + 25b^4}$$

Aufgabe 6:

Der Befehl *„Echter Bruch“* zerlegt einen unechten Bruch in eine Summe aus ganzzahligen und echt gebrochenen Anteilen.



$$\text{propFrac}\left(\frac{45}{7}\right) \qquad 6+\frac{3}{7}$$

$$\text{propFrac}\left(\frac{a^2-1}{a}\right) \qquad a-\frac{1}{a}$$

Der Befehl *„Hole Zähler“* gibt den Zähler eines Bruches zurück. Bei kürzbaren Brüchen wie $\frac{34}{68}=\frac{1}{2}$ wird der Zähler des gekürzten Bruches zurückgegeben.

$$\text{getNum}\left(\frac{34}{67}\right) \qquad 34$$

$$\text{getNum}\left(\frac{34}{68}\right) \qquad 1$$

$$\text{getNum}\left(\frac{x^3-2\cdot x}{x-1}\right) \qquad x\cdot\left(x^2-2\right)$$

Analoges gilt für *„Hole Nenner“*:

$$\text{getDenom}\left(\frac{34}{67}\right) \qquad 67$$

$$\text{getDenom}\left(\frac{34}{68}\right) \qquad 2$$

$$\text{getDenom}\left(\frac{x^3-2\cdot x^2}{x+1}\right) \qquad x+1$$

Die Anweisung *„Gemeinsamer Nenner“* bringt Bruchterme mit unterschiedlichen Nennern auf den gemeinsamen Hauptnenner.

$$\text{comDenom}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right) \qquad \frac{3-a}{3\cdot a}$$

$$\text{comDenom}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \qquad \frac{x+y}{x\cdot y}$$

Aufgabe 7:

Das kleinste gemeinsame Vielfache:

lcm(Zahl1, Zahl2) (least common multiple)

gibt das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Argumente zurück.
Das ***lcm*** zweier Brüche ist das ***lcm*** ihrer Zähler dividiert durch den größten gemeinsamen Teiler *(**gcd**)* ihrer Nenner.
Das ***lcm*** von Dezimalbruchzahlen ist ihr Produkt.

$\mathrm{lcm}(2,3)$	6
$\mathrm{lcm}\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$	3
$\mathrm{lcm}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$	$\frac{3}{2}$
$\mathrm{lcm}(1.2,0.5)$	0.6

Der größte gemeinsame Teiler:

gcd(Zahl1, Zahl2) (greatest common divisor)

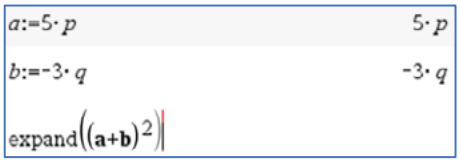
gibt den größten gemeinsamen Teiler der beiden Argumente zurück.
Der ***gcd*** zweier Brüche ist der ***gcd*** ihrer Zähler dividiert durch das kleinste gemeinsame Vielfache *(**lcm**)* ihrer Nenner.

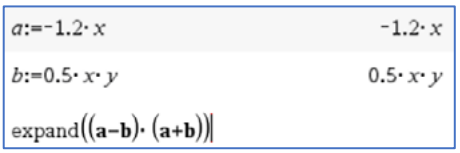
$\mathrm{gcd}(3,12)$	3
$\mathrm{gcd}(18,12)$	6
$\mathrm{gcd}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{6}$
$\mathrm{gcd}\left(\frac{3}{4},\frac{6}{7}\right)$	$\frac{3}{28}$

Arbeitsblatt 4: Arbeiten mit Variablen und Termen – Binomische Formeln mit CAS

1. Betrachte die beiden Screenshots.
   Welche Ergebnisse wird der CAS-Rechner anzeigen, wenn man enter drückt? Gib erst eine Prognose mithilfe binomischer Formeln an und überprüfe dann mit dem CAS-Rechner.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$



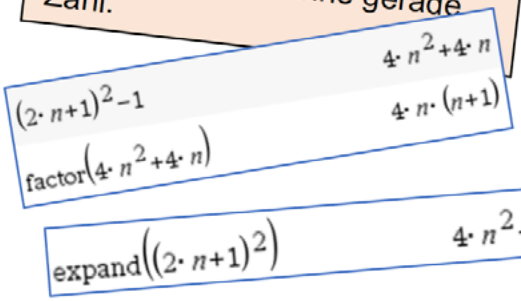


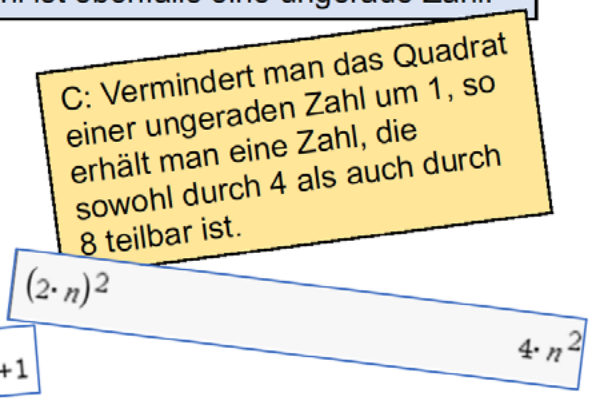
2. Ordne den Aussagen A, B und C die passende Rechnung zu und begründe mit deren Hilfe diese Aussagen. Welche der Aussagen lässt sich noch verschärfen (erweitern)?

A: Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ebenfalls eine ungerade Zahl.

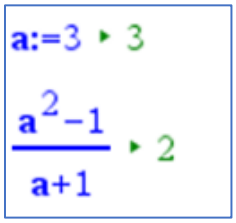
B: Das Quadrat einer geraden Zahl ist ebenfalls eine gerade Zahl.

C: Vermindert man das Quadrat einer ungeraden Zahl um 1, so erhält man eine Zahl, die sowohl durch 4 als auch durch 8 teilbar ist.



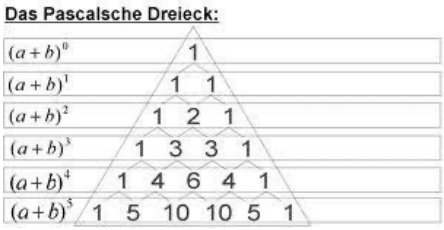


3. Öffne ein ***Notes***-Arbeitsblatt. Definiere in einem Mathe-Feld (ctrl M) die Variable a := 3 und gib in einem zweiten Mathe-Feld den Term $\frac{a^2-1}{a+1}$ ein. Gib dann für a verschiedene Zahlen ein und vergleiche jede eingegebene Zahl a mit dem zugehörigen Termwert. (Bestätige alle Eingaben mit enter.) Beschreibe deine Beobachtung und begründe den Zusammenhang mithilfe einer binomischen Formel.

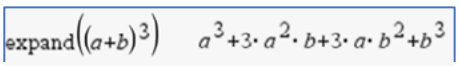


Vertiefung:

4. Die Entwicklung der Potenzen von a und b sowie die Werte der Koeffizienten in den Summendarstellungen von $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ usw. folgen einem bestimmten Muster. Beschreibe dieses Muster mit eigenen Worten. Nutze dazu auch das Pascalsche Dreieck.[3]



   Wie sieht die Summendarstellung von $(a+b)^6$ aus?



[3] https://images.gutefrage.net/media/fragen-antworten/bilder/26181075/0_big.jpg?v=1308836886000

LB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 4:

Aufgabe 1:
$(5p-3q)^2 = 25p^2 - 30p \cdot q + 9q^2$
$(-1{,}2x - 0{,}5x \cdot y) \cdot (-1{,}2x + 0{,}5x \cdot y) = 1{,}44x^2 - 0{,}25x^2 \cdot y^2$

Aufgabe 2:
A gehört zu

$\text{expand}\left((2\cdot n+1)^2\right)$	$4\cdot n^2+4\cdot n+1$

Begründung: Die ersten beiden Summanden sind gerade Zahlen, deren Summe ist ebenfalls gerade und wenn man 1 dazu addiert, erhält man eine ungerade Zahl.

B gehört zu

$(2\cdot n)^2$	$4\cdot n^2$

Begründung: Da das Ergebnis den Faktor 4 enthält, ist es durch 4 teilbar, also ist es auch durch 2 teilbar und deshalb eine gerade Zahl.

C gehört zu

$(2\cdot n+1)^2-1$	$4\cdot n^2+4\cdot n$
$\text{factor}\left(4\cdot n^2+4\cdot n\right)$	$4\cdot n\cdot(n+1)$

Das Produkt enthält den Faktor 4, also ist es durch 4 teilbar. Die Zahlen n und n+1 sind aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen immer eine gerade ist, deshalb ist das Produkt auch durch 2 teilbar. Wenn das Produkt durch 4 und durch 2 teilbar ist, ist es auch durch 8 teilbar.
Verschärfen bzw. erweitern lässt sich Aussage B, denn das Quadrat einer geraden Zahl ist nicht nur durch 2, sondern auch durch 4 teilbar.

Aufgabe 3:
Als Ergebnis wird immer (außer für a = -1) eine Zahl angezeigt, die um 1 kleiner ist als die eingegebene Zahl. Das liegt an folgender Termumformung:
$\frac{a^2-1}{a+1} = \frac{a^2-1^2}{a+1} = \frac{(a+1)\cdot(a-1)}{(a+1)} = a-1$

Aufgabe 4:

Beschreibung des Pascalschen Dreiecks: Oben steht ein Dreieck aus drei Einsen. In den folgenden Zeilen steht am Anfang und am Ende auch jeweils eine Eins. Dazwischen liegen Zahlen, die sich als Summe der beiden darüber liegenden Zahlen ergeben. Die Zahlen des Pascalschen Dreiecks aus der n-ten Reihe sind die Koeffizienten in der Summenentwicklung von $(a+b)^n$. Die Exponenten der Potenzen von a und b in jedem Summanden beginnen bei a mit n und bei b mit 0. Bei a werden sie immer um 1 kleiner und bei b um 1 größer. Beide Potenzen werden miteinander und mit den Koeffizienten multipliziert. Aus diesen Produkten wird die Summe gebildet.

$$(a+b)^6 = 1a^6 \cdot b^0 + 6a^5 \cdot b^1 + 15a^4 \cdot b^2 + 20a^3 \cdot b^3 + 15a^2 \cdot b^4 + 6a^1 \cdot b^5 + 1a^0 \cdot b^6$$

Arbeitsblatt 5: Lösen von Gleichungen mit CAS

Nutzung des CAS-Rechners zur Kontrolle der Ergebnisse beim handschriftlichen Umformen von Gleichungen:

Beim Umformen von Gleichungen werden oft Fehler gemacht, da die Äquivalenzumformungen nicht richtig angewendet werden. Der TI-Nspire bietet hier die Möglichkeit, die einzelnen Schritte zu kontrollieren bzw. Fehler zu erkennen. Die umzuformende Gleichung muss in Klammern gesetzt werden und hinter die Klammer wird der Umformungsschritt angegeben. Eine Überprüfung des Ergebnisses ist für eine Belegung der Variablen x möglich.	$(3\cdot x-4=5\cdot x)+3\cdot x$ → $6\cdot x-4=8\cdot x$ $(3\cdot x-4=5\cdot x)-3\cdot x$ → $-4=2\cdot x$ $\frac{-4=2\cdot x}{2}$ → $-2=x$ $3\cdot x-4=5\cdot x \mid x=-2$ → true $3\cdot x-4=5\cdot x \mid x=3$ → false

Auch kompliziertere Gleichungen lassen sich unter Anwendung des *solve*-Befehls mit dem CAS „auf Knopfdruck“ lösen. Da Leistungsüberprüfungen auch ohne Hilfsmittel stattfinden, sollte das händische Lösen von Gleichungen trotzdem geübt werden.

1. Interpretiere die Ergebnisse des CAS-Rechners.

$\text{solve}\left(x=\left(\frac{1}{4}-0.25\right)\cdot x,x\right)$	$x=0.$
$\text{solve}\left(x=\left(\frac{1}{4}+0.75\right)\cdot x,x\right)$	true
$\text{solve}\left(1=\left(\sqrt{4}-2\right)\cdot x,x\right)$	false

menu – *Algebra – Löse*
solve (Gleichung, Variable)

2. Gegeben sei ein Trapez mit dem Flächeninhalt 100 cm², der Höhe 4 cm und der Länge einer der parallelen Seiten von 15 cm. Gesucht ist die Länge der anderen parallelen Seite.
   a) Begründe, dass der Lösungsansatz richtig ist. Übernimm den Ansatz auf deinen CAS-Rechner und beende die Rechnung mit enter. Formuliere einen Antwortsatz.

   $\text{solve}\left(100=\frac{x+15}{2}\cdot 4,x\right)$

   b) Löse die Gleichung $100=\frac{x+15}{2}\cdot 4$ handschriftlich ohne CAS. Überprüfe deine Umformungsschritte mit dem CAS.

3. Wer mit dem Taxi fährt, muss mit einer Grundgebühr von „g“ Euro rechnen. Jeder gefahrene Kilometer kostet „x“ Euro. Nach „f“ km Fahrt werden die Kosten durch die „n“ Fahrgäste gleichmäßig aufgeteilt.
   a) Begründe, weshalb sich dieser Sachverhalt durch den Term $\frac{f\cdot x+g}{n}$ mathematisch modellieren lässt. Welche Grundbereiche sind für die Variablen sinnvoll?
   b) Wie teuer ist ein gefahrener Kilometer bei einer Grundgebühr von 5 Euro, wenn jeder der zwei Fahrgäste für die 36 km Fahrstrecke 40,30 Euro zahlen muss?

Vertiefungen:

4. Jemand löst die Gleichung $x - (a - 3x) = 4 \cdot (x + 1)$ nach x mit dem CAS.

$$\text{solve}(x-(a-3\cdot x)=4\cdot(x+1),x) \qquad a=-4$$

   a) Was bedeutet das Ergebnis für die Lösungsmenge von x?
   b) Welche Lösungsmenge hat die Gleichung für a = 0?

5. Löse die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ nach a sowohl mit dem CAS als auch handschriftlich.

6. Gib die nebenstehende Gleichung in den CAS-Rechner ein und ermittle das Ergebnis. Der Rechner zeigt eine Warnung an. Ist diese Warnung berechtigt?

$$\text{solve}\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=n,x\right)$$

7. Interpretiere die Ergebnisanzeige des CAS-Rechners, indem du die Gleichung zunächst handschriftlich löst.

$$\text{solve}\left(\frac{x}{2}-3=2\cdot x-\frac{3}{2}\cdot x-3,x\right) \qquad \text{true}$$

8. In dem nebenstehenden Dokument wird ein „Beweis“ vorgeführt, mit dem gezeigt wird, dass angeblich 0 = 1 eine wahre Aussage ist.
   a) Vollziehe die Lösungsschritte zunächst ohne CAS-Rechner nach und suche den oder die Umformungsfehler.
   b) Nutze dann deinen CAS-Rechner für die einzelnen Umformungsschritte. Beobachte und erkläre die Ausgaben des Rechners nach jedem Schritt.

$$\begin{aligned}
& a = b \mid \cdot a \\
\Leftrightarrow\ & aa = ba \\
\Leftrightarrow\ & a^2 = ab \mid + a^2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + a^2 = ab + a^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 = a^2 + ab \mid - 2ab \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 - 2ab = a^2 - ab \\
\Leftrightarrow\ & 2aa - 2ab = aa - ab \\
\Leftrightarrow\ & 2a(a-b) = a(a-b) \mid : (a-b) \\
\Leftrightarrow\ & 2a = a \mid : a \\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 \mid - 1 \\
\Leftrightarrow\ & 1 = 0
\end{aligned}$$

9. Gegeben ist die Gleichung 4x = 16. Durch Multiplikation mit x erhält man daraus $4x^2 = 16x$. Sind diese beiden Gleichungen zueinander äquivalent? Prüfe erst durch Nachdenken und „frage“ dann deinen CAS-Rechner.

10. Gegeben ist die Gleichung 3x = 9. Quadriert man beide Seiten der Gleichung, so erhält man $9x^2 = 81$. Untersuche, ob beide Gleichungen dieselbe Lösungsmenge besitzen. Wähle zunächst als Grundbereich die natürlichen Zahlen und dann die rationalen Zahlen. Was gibt dein CAS-Rechner zurück?

11. Ein Autofahrer hat die gefahrene Strecke (in Kilometer) und den Kraftstoffverbrauch (in Liter) notiert.
   a) Gib einen Term an, mit dem sich der Verbrauch auf 100 km berechnen lässt.
   b) Realisiere diese Berechnung in der Tabellenkalkulation.
   c) Berechne analog, wie viele Kilometer pro Liter gefahren wurden.

	A strecke	B verbrauch
1	305	19
2	283	20
3	375	28
4	439	31

LB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 5:

Aufgabe 1:
Zeile 1 führt auf $x = 0 \cdot x$. Diese Gleichung wird nur für x = 0 zu einer wahren Aussage.
Zeile 2 führt auf $x = 1 \cdot x$. Diese Gleichung wird für alle Zahlen x zu einer wahren Aussage.
Zeile 3 führt auf $1 = 0 \cdot x$. Diese Gleichung wird für keine Zahl x zu einer wahren Aussage. Es ist immer eine falsche Aussage.

$\text{solve}\left(x=\left(\frac{1}{4}-0.25\right)\cdot x,x\right)$	$x=0.$
$\text{solve}\left(x=\left(\frac{1}{4}+0.75\right)\cdot x,x\right)$	true
$\text{solve}\left(1=\left(\sqrt{4}-2\right)\cdot x,x\right)$	false

Aufgabe 2a:
Der Ansatz ist richtig. Die Länge der anderen parallelen Seite beträgt 35 cm.

$\text{solve}\left(100=\frac{x+15}{2}\cdot 4,x\right)$	$x=35$

Aufgabe 2b:

$100 = \frac{x+15}{2} \cdot 4$ | : 4
$25 = \frac{x+15}{2}$ | · 2
$50 = x + 15$ |- 15
$35 = x$

$\frac{100=\frac{x+15}{2}\cdot 4}{4}$	$25=\frac{x+15}{2}$
$\left(25=\frac{x+15}{2}\right)\cdot 2$	$50=x+15$
$(50=x+15)-15$	$35=x$

Aufgabe 3a:
$\frac{f \cdot x+g}{n}$: Der Summand $f \cdot x$ gibt die Kosten an, die durch f Kilometer Fahrt bei einem Preis von x Euro pro Kilometer entstehen. Dazu wird die Grundgebühr g in Euro addiert, die auch ohne Fahrt anfällt. Der Zähler $f \cdot x + g$ ergibt die Gesamtkosten. Werden diese durch die Anzahl n der Fahrgäste geteilt, so kommt der Betrag heraus, den jeder Fahrgast zahlen muss, falls die Kosten gleichmäßig verteilt werden.
Sinnvolle Grundbereiche für f, g und x sind die positiven rationalen Zahlen und für n die natürlichen Zahlen.

Aufgabe 3b:
Aus dem Ansatz $\frac{36 \cdot x+5}{2} = 40{,}30$ ergibt sich x = 2,1 Euro/km.

$\text{solve}\left(\frac{36\cdot x+5}{2}=40.3,x\right)$	$x=2.1$

Aufgabe 4a:
$x-(a-3x)=4\cdot(x+1)$ führt auf $4x-a=4x+4$.
Wenn a = - 4 ist, dann ist jede rationale Zahl eine Lösung der gegebenen Gleichung.
Für alle rationalen Zahlen $a \neq$ - 4, gibt es keine Lösung.

$\text{solve}(x-(a-3\cdot x)=4\cdot(x+1),x)\|a=-4$	true
$\text{solve}(x-(a-3\cdot x)=4\cdot(x+1),x)\|a\neq-4$	false
$\text{solve}(x-(a-3\cdot x)=4\cdot(x+1),x)\|a=0$	false

Aufgabe 4b:
Für a = 0 hat demzufolge die Gleichung keine Lösung.

Aufgabe 5:
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \quad |-\frac{1}{b}$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ | Hauptnenner auf der rechten Seite

$\frac{1}{a}=\frac{b}{b\cdot c}-\frac{c}{b\cdot c}$ | zusammenfassen

$\frac{1}{a}=\frac{b-c}{b\cdot c}$ | Kehrwerte auf beiden Seiten bilden

$a=\frac{b\cdot c}{b-c}$

$\text{solve}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c},a\right) \qquad a=\frac{b\cdot c}{b-c}$

Aufgabe 6:

$\text{solve}\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=n,x\right) \qquad x=n$

Achtung
Definitionsbereich des Ergebnisses kann größer sein als der der Eingabe.
OK

Der Warnhinweis ist berechtigt, denn die Gleichung x = n ist für alle rationalen Zahlen definiert, während die gegebene Gleichung für x = 1 nicht definiert ist, weil dann der Nenner null ist.

Aufgabe 7:
$\frac{x}{2}-3=2x-\frac{3}{2}x-3 \qquad |+3$
$\frac{x}{2}=2x-\frac{3}{2}x \qquad$ | zusammenfassen
$\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x \qquad |\cdot 2$
$x=x$
Die Gleichung ist für alle rationalen Zahlen erfüllt.

Aufgabe 8:
In der ersten Zeile von oben wird die Multiplikation mit a angekündigt. Das macht nur Sinn, wenn a nicht null ist. In der vierten Zeile von unten wird die Division durch a – b angekündigt. Das ist nur möglich, wenn diese Differenz nicht null ist. In der ersten Zeile steht aber a = b, also wird hier eine „verbotene“ Rechenoperation durchgeführt.
In der dritten Zeile von unten wird die Division durch a angekündigt. Das ist nur möglich, wenn diese Zahl nicht null ist.
Rechnung mit CAS-Rechner:

$$
\begin{aligned}
& a = b \mid \cdot a \\
\Leftrightarrow\ & aa = ba \\
\Leftrightarrow\ & a^2 = ab \mid + a^2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + a^2 = ab + a^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 = a^2 + ab \mid - 2ab \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 - 2ab = a^2 - ab \\
\Leftrightarrow\ & 2aa - 2ab = aa - ab \\
\Leftrightarrow\ & 2a(a-b) = a(a-b) \mid : (a-b) \\
\Leftrightarrow\ & 2a = a \mid : a \\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 \mid - 1 \\
\Leftrightarrow\ & 1 = 0
\end{aligned}
$$

$(a=b)\cdot a$	$a^2=a\cdot b$
$(a^2=a\cdot b)+a^2$	$2\cdot a^2=a^2+a\cdot b$
$(2\cdot a^2=a^2+a\cdot b)-2\cdot a\cdot b$	$2\cdot a^2-2\cdot a\cdot b=a^2-a\cdot b$
$\text{factor}(2\cdot a^2-2\cdot a\cdot b=a^2-a\cdot b)$	$2\cdot a\cdot(a-b)=a\cdot(a-b)$

⚠ $\dfrac{2\cdot a\cdot(a-b)=a\cdot(a-b)}{a-b}$	$2\cdot a=a$
⚠ $\dfrac{2\cdot a=a}{a}$	$2=1$

Aufgabe 9:
Die Gleichung 4x = 16 hat nur die Lösung x = 4.
Die Gleichung 4x² = 16x hat die Lösungen x = 4 und x = 0.
Da die Lösungsmengen verschieden voneinander sind, sind die Gleichungen nicht zueinander äquivalent.

$\text{solve}(4\cdot x=16,x)$	$x=4$
$\text{solve}(4\cdot x^2=16\cdot x,x)$	$x=0 \text{ or } x=4$

Aufgabe 10:
Die Gleichung 3x = 9 hat nur die Lösung x = 3. Die Gleichung 9x² = 81 hat im Bereich der rationalen Zahlen die Lösungen x = – 3 und x = 3, aber im Grundbereich der natürlichen Zahlen fällt dann die Lösung x = – 3 weg.
Merke: Das Quadrieren einer Gleichung ist im Allgemeinen keine äquivalente Umformung.

$\text{solve}(3\cdot x=9,x)$	$x=3$
$\text{solve}((3\cdot x)^2=9^2,x)$	$x=-3 \text{ or } x=3$

Aufgabe 11a:

$$\frac{verbrauch}{strecke} \cdot 100$$

Aufgabe 11b:

	A str...	B ver...	C
=			=verbrauch/strecke*100.
1	305	19	6.22951
2	283	20	7.06714
3	375	28	7.46667
4	439	31	7.0615

$c = \frac{verbrauch}{strecke} \cdot 100.$

Aufgabe 11c:

Der Quotient $\frac{strecke}{verbrauch}$ gibt an, wie viele Kilometer pro Liter gefahren wurden.

=strecke/verbrauch*1.
16.0526
14.15
13.3929
14.1613

Die Multiplikation mit der Dezimalzahl 1**.** erfolgt, damit die Ergebnisse als Dezimalzahlen angegeben werden.

Arbeitsblatt 6: Lösen von Ungleichungen mit CAS

1. Interpretiere die Ergebnisse des CAS-Rechners.

solve($x^2<0,x$)	false
solve($2\cdot x\geq 1-x,x$)	$x\geq\frac{1}{3}$
solve($\lvert x\rvert>0,x$)	$x\neq 0$
solve($\lvert x\rvert\geq 0,x$)	true

menu - *Algebra – Löse*
solve (Gleichung, Variable)

ctrl = öffnet diese Zweitbelegung:

>	<	≠
≥	≤	|

2. Beschreibe anhand nebenstehender Rechnungen die Wirkung der Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl auf das Relationszeichen.

$(x-1<2)\cdot -1$	$-(x-1)>-2$
$(a\cdot x+2\cdot x\geq b)\cdot -2$	$-2\cdot(a+2)\cdot x\leq -2\cdot b$
$(m\cdot x\leq c)\cdot c \mid c<0$	$c\cdot m\cdot x\geq c^2$ and $c<0$

3. Beurteile, für welche rationalen Zahlen die folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind. Versuche erst eine Lösung durch Nachdenken zu finden, überprüfe dann deine Lösung mithilfe des CAS-Rechners.
   a) Eine Zahl ist kleiner als ihre Hälfte.
   b) Eine Zahl ist größer als ihr Doppeltes.

4. Untersuche mithilfe eines ***Notes***-Arbeitsblattes anhand selbstgewählter Beispiele, ob man Ungleichungen auf beiden Seiten quadrieren darf, ohne dass sich ihr Wahrheitswert ändert.

a:=1 ▸ 1	b:=2 ▸ 2
a<b ▸ true	$a^2<b^2$ ▸ true

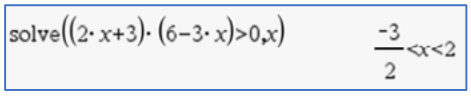
Hinweis: Öffne in einem neuen Dokument die Anwendung ***Notes***. Gib mit ctrl M vier „Mathe-Felder“ zum Eingeben der Variablen und Ungleichungen ein. Probiere systematisch verschiedene Werte für a und b aus und beurteile die Ergebnisse mit Blick auf die Problemstellung. Beachte, dass bei Änderung eines Eintrages in einem Mathe-Feld diese Änderung mit enter abgeschlossen wird.

5. Denke dir vier verschiedene Ungleichungen mit der Lösungsmenge $\mathcal{L}=\{x\in\mathbb{Q}; x\leq -1\}$ aus. Lasse deinen Banknachbarn mit dem CAS-Rechner überprüfen, ob du passende Ungleichungen gefunden hast.

6. Martins Eltern wollen sich zwischen zwei Stromtarifen entscheiden. Der Anbieter A verlangt eine Grundgebühr von 150 € und 29,6 Ct/kWh. Bei Anbieter B liegen die Konditionen bei 110 € Grundgebühr und 30,8 Ct/ kWh. Berechne, wie viele Kilowattstunden (kWh) höchstens verbraucht werden können, damit der Anbieter B günstiger für Martins Eltern ist.

Vertiefung:

7. Der CAS-Rechner löst die Ungleichung auf Knopfdruck. Erläutere, was bei einer handschriftlichen Lösung zu beachten ist, gehe dabei z. B. auf notwendige Fallunterscheidungen ein.



8. Löse die Ungleichung $\frac{x^2-2x}{x^2-4} \leq 2$ mit $x \neq \pm 2$ handschriftlich. Führe mögliche Termumformungen bzw. Fallunterscheidungen durch. Kontrolliere mit dem CAS-Rechner deine Lösung.

LB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 6

Aufgabe 1:
Interpretationen:
Zeile 1: Das Quadrat einer Zahl ist niemals negativ, deshalb erfolgt die Anzeige „*false*“.
Zeile 2: Die Ungleichung wird umgeformt wie eine Gleichung.
$2x \geq 1 - x|$ + x
$3x \geq 1$ | : 3
$x \geq \frac{1}{3}$
Zeile 3: Der Betrag einer rationalen Zahl ist immer größer als null, mit Ausnahme der Zahl Null, denn deren Betrag ist gleich null.
Zeile 4: Der Betrag einer rationalen Zahl ist immer größer oder gleich null (Begründung siehe Zeile 3).

$\text{solve}(x^2<0,x)$	false
$\text{solve}(2\cdot x\geq 1-x,x)$	$x\geq\frac{1}{3}$
$\text{solve}(\lvert x\rvert>0,x)$	$x\neq 0$
$\text{solve}(\lvert x\rvert\geq 0,x)$	true

Aufgabe 2:
Die Darstellungen machen deutlich, dass bei der Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl nicht nur jede Seite mit dieser negativen Zahl multipliziert wird, sondern dass sich außerdem das Relationszeichen umkehrt.

$(x-1<2)\cdot -1$	$-(x-1)>-2$
$(a\cdot x+2\cdot x\geq b)\cdot -2$	$-2\cdot(a+2)\cdot x\leq -2\cdot b$
$(m\cdot x\leq c)\cdot c \mid c<0$	$c\cdot m\cdot x\geq c^2$ and $c<0$

Aufgabe 3a:
Eine Zahl ist kleiner als ihre Hälfte: Dies gilt für alle negativen Zahlen.
$x < \frac{x}{2}$ $\quad |-\frac{x}{2}$
$\frac{x}{2} < 0$ $\quad | \cdot 2$
$x < 0$

$\text{solve}\left(x<\frac{x}{2},x\right)$	$x<0$

Aufgabe 3b:
Eine Zahl ist größer als ihr Doppeltes: Dies gilt ebenfalls für alle negativen Zahlen
$x > 2x$ $\quad |-2x$
$-x > 0$ $\quad | \cdot (-1)$
$x < 0$ $\quad$ | Das Relationszeichen kehrt sich um!

$\text{solve}(x>2\cdot x,x)$	$x<0$

Aufgabe 4: Lösungen selbstgewählter Beispiele

$a:=-1 \blacktriangleright -1$	$b:=3 \blacktriangleright 3$
$a<b \blacktriangleright \text{true}$	$a^2<b^2 \blacktriangleright \text{true}$

Wahrheitswert bleibt gleich.

$a:=-1 \blacktriangleright -1$	$b:=-3 \blacktriangleright -3$
$a<b \blacktriangleright \text{false}$	$a^2<b^2 \blacktriangleright \text{true}$

Wahrheitswert ändert sich.

$a:=-3 \blacktriangleright -3$	$b:=-1 \blacktriangleright -1$
$a<b \blacktriangleright \text{true}$	$a^2<b^2 \blacktriangleright \text{false}$

Wahrheitswert ändert sich.

$a:=\frac{1}{2} \blacktriangleright \frac{1}{2}$	$b:=\frac{1}{4} \blacktriangleright \frac{1}{4}$
$a<b \blacktriangleright \text{false}$	$a^2<b^2 \blacktriangleright \text{false}$

Wahrheitswert bleibt gleich.

$a:=\frac{1}{9} \blacktriangleright \frac{1}{9}$	$b:=\frac{1}{3} \blacktriangleright \frac{1}{3}$
$a<b \blacktriangleright \text{true}$	$a^2<b^2 \blacktriangleright \text{true}$

Wahrheitswert bleibt gleich.

$a:=\frac{-1}{9} \blacktriangleright \frac{-1}{9}$	$b:=\frac{-1}{3} \blacktriangleright \frac{-1}{3}$
$a<b \blacktriangleright \text{false}$	$a^2<b^2 \blacktriangleright \text{true}$

Wahrheitswert ändert sich.

$a:=\frac{-1}{3} \blacktriangleright \frac{-1}{3}$	$b:=\frac{1}{9} \blacktriangleright \frac{1}{9}$
$a<b \blacktriangleright \text{true}$	$a^2<b^2 \blacktriangleright \text{false}$

Wahrheitswert ändert sich.

$a:=\frac{-1}{3} \blacktriangleright \frac{-1}{3}$	$b:=\frac{2}{3} \blacktriangleright \frac{2}{3}$
$a<b \blacktriangleright \text{true}$	$a^2<b^2 \blacktriangleright \text{true}$

Wahrheitswert bleibt gleich.

Vermutungen:

Wenn auf beiden Seiten einer Ungleichung negative Zahlen stehen und jede Seite quadriert wird, dann ändert sich der Wahrheitswert der Ungleichung.
Wenn auf der linken Seite der Ungleichung eine Zahl a zwischen – 1 und 0 und auf der rechten Seite eine Zahl b zwischen 0 und 1 steht und wenn gilt $|a| > |b|$, dann ändert sich nach dem Quadrieren der Wahrheitswert.
Merke: Quadrieren einer Ungleichung ist nicht immer eine äquivalente Umformung.

Aufgabe 5:
Lösungen individuell; Beispiele für Ungleichungen mit der Lösungsmenge
$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq -1\}$:

(1) $3x + 1 \leq 2x$
(2) $\frac{x}{2} + 1 \geq x + 1{,}5$
(3) $x^2 + x \geq 2x + x^2 + 1$

Aufgabe 6:
Kosten Anbieter A: $0{,}296 \cdot x + 150$
Kosten Anbieter B: $0{,}308 \cdot x + 110$
Dabei gibt x die Anzahl der verbrauchten Kilowattstunden an.
Lösung der Ungleichung:

```
solve(0.296·x+150>0.308·x+110,x)
                                x<3333.33
```

Interpretation des Ergebnisses: Solange der Jahresverbrauch kleiner als 3 333,33 kWh ist, ist das Angebot von B günstiger.

Aufgabe 7:
Beim handschriftlichen Lösen der Ungleichung $(2x + 3) \cdot (6 - 3x) > 0$ lässt sich verwenden, dass auf der linken Seite der Ungleichung ein Produkt aus zwei Faktoren steht. Dieses Produkt ist größer als null, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide negativ sind.

1. Fall: Beide Faktoren sind positiv.

   2x + 3 > 0 und 6 – 3x > 0
   2x > - 3 6 > 3x
   $x > -\frac{3}{2}$ x < 2
   Beide Lösungen lassen sich zusammenfassen zu $-\frac{3}{2} < x < 2$.

2. Fall: Beide Faktoren sind negativ.

   2x + 3 < 0 und 6 – 3x < 0
   2x < - 3 6 < 3x
   $x < -\frac{3}{2}$ x > 2
   Beide Lösungen sind unvereinbar, denn eine Zahl x kann nicht gleichzeitig kleiner als $-\frac{3}{2}$ und größer als 2 sein.
   Als Lösung bleibt nur $-\frac{3}{2} < x < 2$.

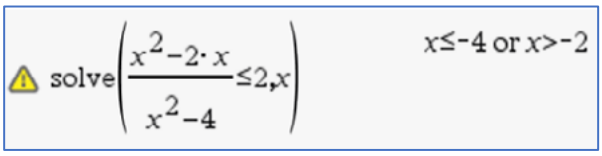
Aufgabe 8:

$$\frac{x^2-2x}{x^2-4} \leq 2$$

$$\frac{x\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)} \leq 2$$

$$\frac{x}{(x+2)} \leq 2$$

1. Fall: Falls x + 2 > 0 ist, bleibt das Relationszeichen nach dem Multiplizieren mit x + 2 erhalten. Wir setzen also $x > -2$ voraus.
   $x \leq 2\cdot(x+2)$
   $x \leq 2x+4$
   $-x \leq 4$
   $x \geq -4$
   Zusammen mit obiger Voraussetzung ($x > -2$) erhält man im 1. Fall die Lösungsmenge $x > -2$.
2. Fall: Falls x + 2 < 0 ist, kehrt sich das Relationszeichen nach dem Multiplizieren mit x + 2 um. Wir setzen also $x < -2$ voraus.
   $x \geq 2\cdot(x+2)$
   $x \geq 2x+4$
   $-x \geq 4$
   $x \leq -4$
   Zusammen mit obiger Voraussetzung ($x < -2$) erhält man im 2. Fall die Lösungsmenge $x \leq -4$.
   Die gegebene Ungleichung ist also für $x > -2$ oder $x \leq -4$ erfüllt.
   Lösung mit CAS-Rechner:



Checkliste Terme und Variablen

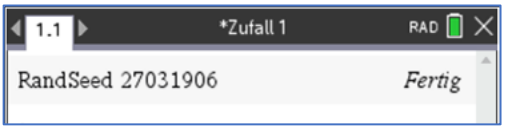
Ich möchte …	Was tust Du?	Das kann ich sicher.	Ich muss das noch üben.
Terme ordnen und zusammenfassen.	Term eingeben und [enter] drücken $3\cdot y+7\cdot x-5-7\cdot y^2-3\cdot x+10$ $\quad 4\cdot x-7\cdot y^2+3\cdot y+5$		
Terme ausmultiplizieren.	Eingabe: [menu] *Algebra - Entwickle* $\text{expand}(2\cdot(a+3\cdot b))$ $\quad 2\cdot a+6\cdot b$		
Terme ausklammern.	Eingabe: [menu] *Algebra - Faktorisiere* $\text{factor}(4\cdot x-16\cdot x^2)$ $\quad -4\cdot x\cdot(4\cdot x-1)$		
Terme und Variable definieren.	Eingabe von *Define* über [menu] *Aktionen – Definiere* oder [:=] über [ctrl] [=] oder mit [sto→] über [ctrl] [var] Define $dreieck1(g,h)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$ *Fertig* $m:=3$ 3 $5\rightarrow n$ 5 $\sqrt{m}\cdot n^2$ $25\cdot\sqrt{3}$ $dreieck1(10,2)$ 10 dreieck1(m,n)		
eine Variable mit einem Wert belegen.	„with"-Operator **|** eingeben: [ctrl] [=] $2\cdot(x-1)+5\|x=4$ 11 $2\cdot(x-1)+5\|x=\{1,2,a\}$ $\{5,7,2\cdot a+3\}$		
eine Variable löschen.	***Scratchpad*** oder ***Calculator*** – [menu] – *Aktionen – Variable löschen* ***Scratchpad*** oder***Calculator*** – [menu] – *Aktionen – Lösche a – z* DelVar *x,dreieck1* *Fertig* **Lösche a–z** 1–Zeichen–Variablen a–z löschen? OK Abbruch		
eine Gleichung/ Ungleichung lösen.	***Scratchpad*** oder ***Calculator*** – [menu] – *Algebra – Löse* Solve(Gleichung,Lösungsvariable) $\text{solve}(2\cdot x-3=4\cdot x+7,x)$ $\quad x=-5$		

2. Lernbereich 2: Zufallsversuche

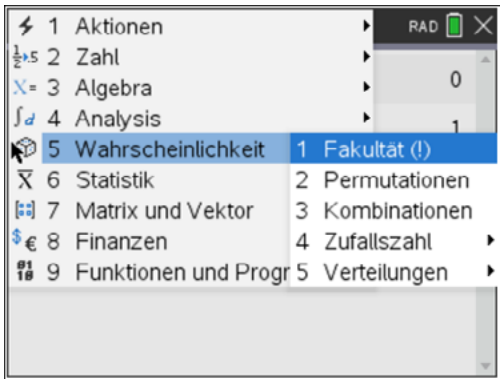
Lernbereich 2: Zufallsversuche	**24 Ustd.**
Kennen des Durchführens und Auswertens von Zufallsversuchen	→ Kl. 6, LB 2
- Zufallsversuch, Ergebnis, Ergebnismenge, Ereignis	Verwendung der Mengenschreibweise und des Elementbegriffs
- Vereinigung, Durchschnitt, Differenz von Ereignissen; Gegenereignis; unmögliches Ereignis; Symbolschreibweisen	Venn-Diagramme
- absolute und relative Häufigkeit, Stabilisierung der relativen Häufigkeit	Einsatz des Computers/mobiler Endgeräte/GTR symmetrische und asymmetrische Zufallsgeräte
- Begriff Wahrscheinlichkeit	
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Versuchen	Durchführen von Realexperimenten
Anwenden des Modellierens mehrstufiger Zufallsversuche	abhängige und unabhängige Zufallsversuche
- Urnenmodell	
- Baumdiagramm, Pfadregeln	
- Verwenden der logischen Begriffe „UND“, „ODER“ und „NICHT“	Abgrenzung der Fachsprache von der Umgangssprache
Einblick gewinnen in die Simulation von Zufallsversuchen	Simulation mithilfe von im GTR erzeugten Zufallszahlen
Kennen der Produktregel zur Anzahlbestimmung bei Abzählproblemen	inhaltliche Betrachtungen zum Ziehen mit und ohne Zurücklegen sowie mit und ohne Beachtung der Reihenfolge

Technische Hinweise für Lehrkräfte

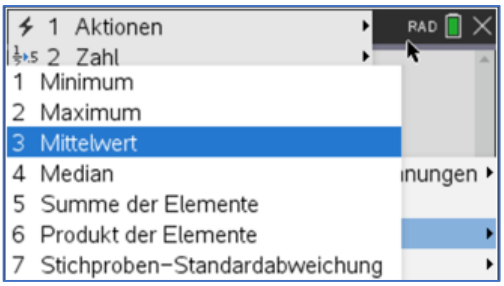
RandSeed - gefolgt von einer individuell von jedem Nutzer zu wählenden Ziffernfolge - sorgt dafür, dass jeder Teilnehmer andere Zufallszahlen auf seinem Rechner erhält. Mit **RandSeed 0** würde der Zufallsgenerator auf die Werkseinstellung zurückgesetzt und alle erhielten ein und dieselben Zufallszahlen.



Aus dem Untermenü *„Wahrscheinlichkeit“* lassen sich viele Anweisungen entnehmen, die für die Stochastik wichtig sind.



Aus dem Untermenü *„Statistik – Listen Mathematik“* lassen sich ebenfalls nützliche Anweisungen entnehmen:



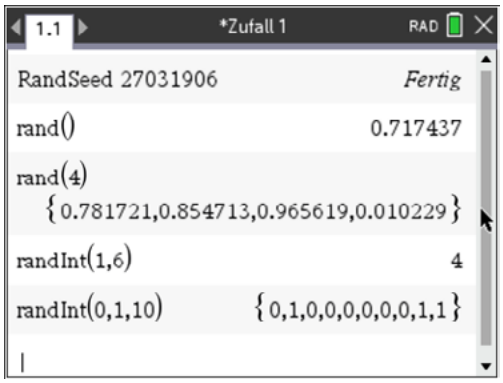
rand( ) gibt eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 zurück.

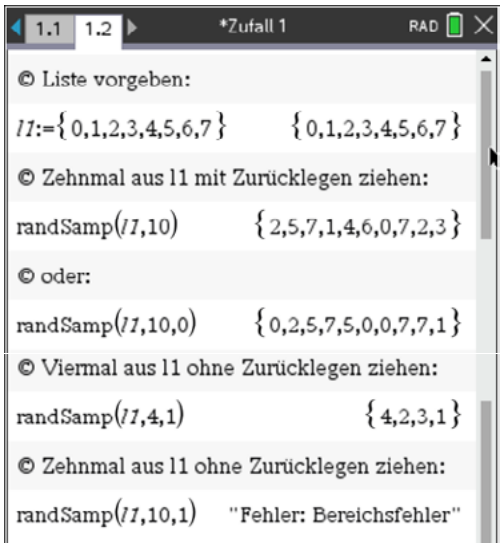
rand(n) gibt eine Liste mit n Zufallszahlen zwischen 0 und 1 zurück.

randInt(u,o) erzeugt eine ganzzahlige Zufallszahl z mit $u \leq z \leq o$.

randInt(u,o,m) erzeugt eine Liste von m ganzzahligen Zufallszahlen z mit $u \leq z \leq o$.

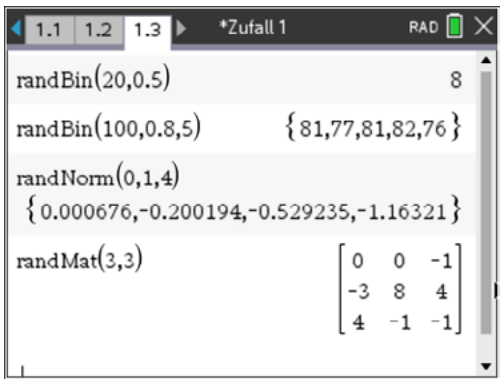
randSamp(Liste, m, 0 oder 1) erzeugt aus einer gegebenen Liste eine neue Liste mit m Elementen durch Ziehen mit Zurücklegen, wenn 0 eingegeben wurde (die 0 kann auch weggelassen werden).



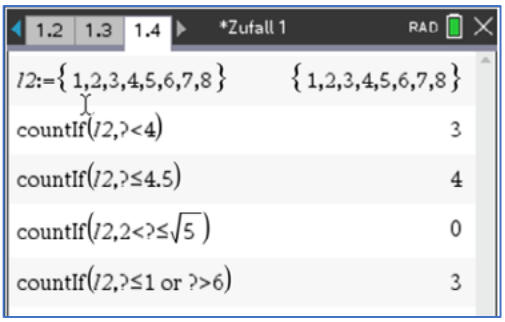


Für das Ziehen ohne Zurücklegen, muss 1 eingegeben wurde.
Die Fehlermeldung entsteht dadurch, dass man nicht mehr als achtmal aus einer Liste mit acht Elementen ohne Zurücklegen ziehen kann.

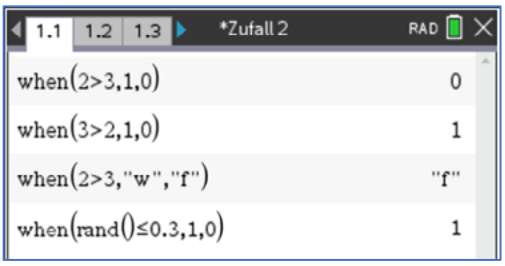
Weitere Befehle für die Erzeugung von Zufallszahlen kann man dem TI-NspireCAS_ReferenceGuide entnehmen, z. B. *randBin, randNorm, randMat.*
Sie sind für die Klassenstufe 8 aber noch nicht relevant.



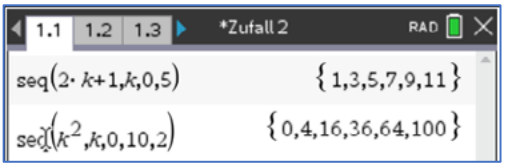
countIf(Liste, Kriterien) – gibt die kumulierte Anzahl aller Elemente der Liste zurück, welche die festgelegten Kriterien erfüllen.



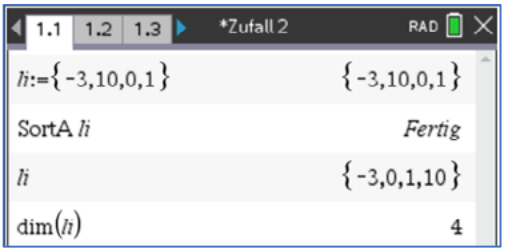
when(Bedingung, wahr, falsch)
Wenn die Bedingung erfüllt ist, wird ***wahr*** zurückgegeben, sonst ***falsch***.



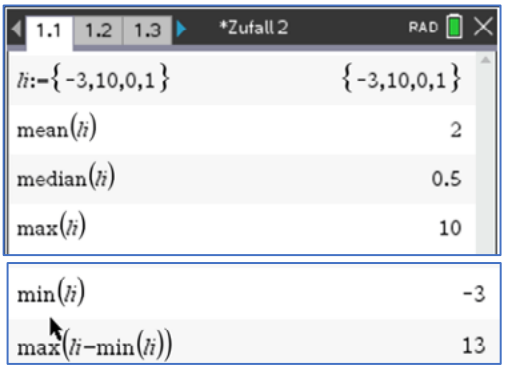
seq(Vorschrift, untere Grenze, obere Grenze)
erzeugt eine Liste (Folge) von Elementen nach einer Bildungsvorschrift.
Optional kann man noch die Schrittweite eingeben.



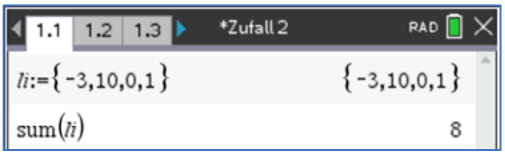
SortA liste sortiert die Liste aufwärts
SortD liste sortiert die Liste abwärts
dim(liste) ermittelt die Anzahl der Listenelemente
Die Sortierbefehle erzeugen je nach Befehl eine neue Anordnung der Listenelemente die ursprüngliche Liste ist dann nicht mehr vorhanden.



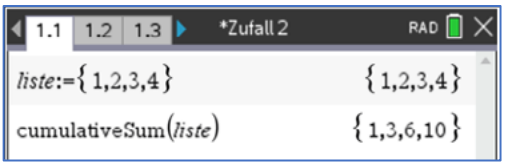
mean(liste) arithmetisches Mittel der Listenelemente
median(liste) Median der Listenelemente
max(liste) Listenelement mit dem größten Wert
min(liste) Listenelement mit dem kleinsten Wert
max(*liste*) – min(*liste*) Spannweite



sum(liste) berechnet die Summe der Listenelemente



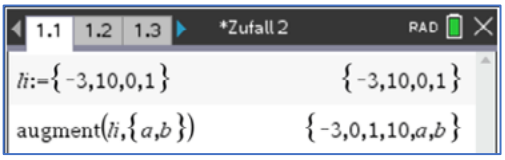
cumulativSum(liste) kurz: ***cumsum(liste)*** gibt eine Liste zurück, bei der die Elemente der ursprünglichen Liste schrittweise aufaddiert werden.



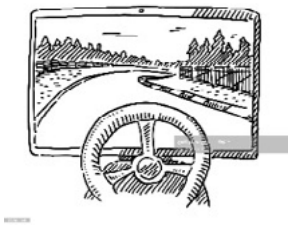
Δ *list(liste)* auch als ***deltalist(liste)***

gibt eine Liste mit den Differenzen der aufeinander folgenden Elemente in ***Liste*** zurück.

augment(Liste1, Liste2) gibt eine neue Liste zurück, die durch Anfügen von ***Liste 2*** an das Ende von ***Liste 1*** erzeugt wird.



Arbeitsblatt 1: Simulation von Zufallsexperimenten – eine Einführung



Simulationen sind modellhafte Nachbildungen eines realen Objektes oder Vorgangs. Sie werden z. B. genutzt, um Eigenschaften dieses Vorgangs oder Objektes unter vereinfachten Bedingungen zu untersuchen.
(Beispiel Fahrsimulator, siehe Abbildung) [4]
Beim Simulieren von Zufallsversuchen können geeignete Zufallsgeräte wie Würfel, Münzen, Glücksräder, Gefäße mit Kugeln oder Zufallszahlen verwendet werden. Auch mit einem CAS-Rechner lassen sich Zufallszahlen erzeugen und als Modell verwenden.

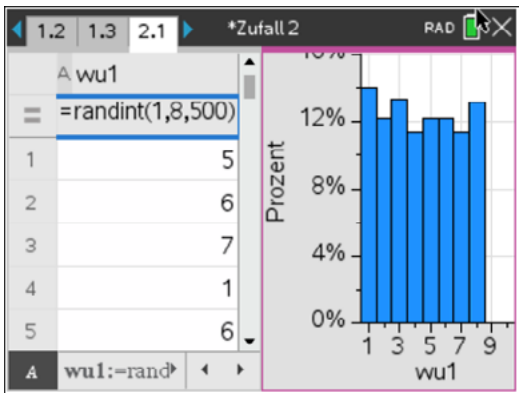
Beispiel:

Was ist wahrscheinlicher: Beim zweimaligen Werfen eines Tetraederwürfels[5], die Summe Sechs zu erhalten oder beim Werfen eines Oktaederwürfels die Zahl 6 zu erhalten?
Ein Tetraederwürfel ist ein regelmäßiger Körper mit vier kongruenten Dreiecken als Seitenflächen, denen je genau eine der Zahlen 1, 2, 3 oder 4 zugeordnet ist. Ein Oktaederwürfel ist ein regelmäßiger Körper mit acht kongruenten Dreiecken als Seitenflächen, denen je genau eine der Zahlen von 1 bis 8 zugeordnet ist.
Ermitteln von Schätzwerten dieser Wahrscheinlichkeiten durch Simulationen mithilfe von Zufallszahlen:

Simulation des Werfens eines Oktaederwürfels und Auswertung bzgl. des Werfens einer 6

Calculator:

Wähle nach ***RandSeed*** eine Ziffernfolge, z. B. die Geburtsdaten deiner Mutter, um den Zufallsgenerator individuell zu starten.



Lists&Spreadsheet, Spalte A definieren als wu1*:*
Der Befehl ***wu1:=randInt(1,8,500)*** erzeugt eine Liste von 500 ganzzahligen Zufallszahlen z mit $1 \leq z \leq 8$.
Wähle menu *Daten – Schnellgraph*, setze den Cursor unten auf **wu1**, wähle mit ctrl menu *Histogramm* und dann mit dem Cursor auf der Zeichenfläche ctrl menu *Maßstab - Prozent* sowie *Säuleneinstellungen -gleiche Säulenbreite – Ausrichtung -0.5* wählen.
Der Schätzwert für das Ergebnis 6 liegt hier bei etwas mehr als 12%.
Geht man in der Tabelle auf ctrl R, lassen sich beliebig oft Neuberechnungen starten.

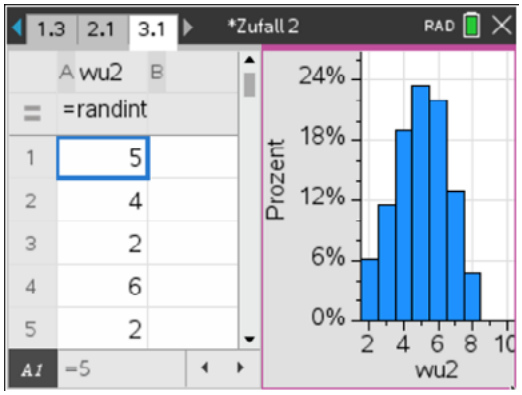
[4] https://media.gettyimages.com/vectors/auto-racing-simulator-steering-wheel-drawing-vector-id1175653549?s=2048x2048
[5] https://www.schachfiguren.de/media/image/e1/2a/a5/W_05312-1.jpg

Simulation des zweimaligen Werfens eines Tetraeders und Auswertung bzgl. des Anteils der Summen 6

Lists&Spreadsheet, *Spalte A mit wu2 bezeichnen*. Der Befehl ***wu2:=randInt(1,4,500)+randint(1,4,500)*** erzeugt eine Liste von 500 Summen von je zwei zufällig erzeugten Tetraederzahlen.

Grafische Darstellung und Auswertung erfolgen analog wie oben beschrieben.

Schätzwert für die Summe 6 hier ca. 22%.



Vergleicht man die ermittelten relativen Häufigkeiten, so ist hier im Beispiel 22% > 12%, also geben diese Schätzwerte einen Hinweis darauf, dass es wohl wahrscheinlicher ist, mit zwei Tetraederwürfeln die Augensumme Sechs zu erhalten, als mit einem Oktaederwürfel eine 6 zu werfen.

Aufgaben:

1. Realisiere die im Beispiel erläuterten Simulationen. Erzeuge jeweils zehn Schätzwerte und bilde deren arithmetische Mittelwerte. Vergleiche deine Resultate mit den Ergebnissen deiner Mitschüler.

2. Untersuche die folgende analoge Fragestellung durch Simulation.
   Was ist wahrscheinlicher:
   Beim Werfen zweier Tetraederwürfel die Summe Sieben zu erhalten oder mit einem Oktaederwürfel die Zahl 7 zu werfen?

3. Ermittle die im Beispiel und die in der Aufgabe 2 gesuchten Wahrscheinlichkeiten durch exakte Rechnung.

4. Wie wahrscheinlich ist es, dass genau eines von zwei Kindern einer Zwei-Kind-Familie ein Mädchen ist? (Die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt wird mit ½ angenommen.)
   Entscheide, ob der vorgeschlagene Zufallsversuch für eine Simulation des realen Problems geeignet ist. Falls das der Fall ist, dann beschreibe die Simulation und ihre Auswertung genauer.
   a) Zwei unterscheidbare Münzen werden gleichzeitig geworfen.
   b) Beim Werfen eines Spielwürfels wird genau eine der Zahlen 1,2 oder 3 geworfen.
   c) Aus einem Gefäß mit 10 Kugeln, von denen fünf rot sind, wird genau eine Kugel gezogen.
   d) Mit dem Befehl ***randint(0,1)*** wird eine Zufallszahl erzeugt.
   e) Mit dem Befehl ***randint(0,1,2)*** wird eine Liste von Zufallszahlen erzeugt.

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 1

Aufgabe 1 und 2 in der Datei zufall.tns

Aufgabe 3:

Die Summe Sechs beim Werfen zweier Tetraeder ist möglich durch die Ergebnisse (1; 5), (5; 1), (2; 4), (4; 2) und (3;3). Das sind fünf günstige bei insgesamt $4 \cdot 4 = 16$ Ergebnissen. Die Wahrscheinlichkeit für die Summe Sechs beim zweimaligen Werfen eines Tetraeders ist $p_{Tetraeder} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$.
Für einen Oktaeder beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Ziffer 6 (ein günstiges bei acht möglichen Ereignissen) $p_{Oktaeder} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.
Es gilt: $p_{Tetraeder} > p_{Oktaeder}$.

Die Summe Sieben beim Werfen zweier Tetraeder ist möglich durch (3;4) bzw. (4,3). Damit berechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu $P = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
Für einen Oktaeder beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Ziffer 7 ebenfalls $\frac{1}{8}$.

Aufgabe 4:

a) Zwei unterscheidbare Münzen werden gleichzeitig geworfen.
Dies ist eine mögliche Simulation, da Kopf(K) für Junge und Zahl(Z) für Mädchen stehen kann. Man wirft die Münzen z. B. 100mal und zählt, wie oft (K,Z) bzw. (Z,K) vorkommen.

b) Beim Werfen eines Spielwürfels wird genau eine der Zahlen 1,2 oder 3 geworfen.
Die Wahrscheinlichkeit beträgt zwar auch 50% für das Ereignis 1,2 oder 3, aber die Simulation eignet sich nicht. Man müsste z. B. diesen Versuch zweimal nacheinander durchführen, um zwei Geburten zu simulieren.

c) Aus einem Gefäß mit 10 Kugeln, von denen fünf rot sind, wird genau eine Kugel gezogen.
Die Wahrscheinlichkeit beträgt zwar auch 50% für das Ereignis „rot“, aber die Simulation eignet sich nicht (Begründung siehe b).

d) Mit dem Befehl ***randint(0,1)*** wird eine Zufallszahl erzeugt.
Dies ist eine mögliche Simulation, da z. B. 0 für Junge und 1 für Mädchen stehen kann. Man simuliert in einer Tabellenkalkulation und zählt die für das Ereignis günstigen Ergebnisse (vgl. Datei Blatt 1.6).

e) Mit dem Befehl ***randint(0,1,2)*** wird eine Liste von Zufallszahlen erzeugt.
Dies ist eine mögliche Simulation, da z. B. 0 für Junge und 1 für Mädchen stehen kann und man mit einem Versuch ein Ergebnispaar z. B. (0,1) erhält.
Die Ergebnisse kann man händisch erfassen bzw. durch mehrere TI-Nspire-Befehle ermitteln (vgl. Datei Blatt 1.7).

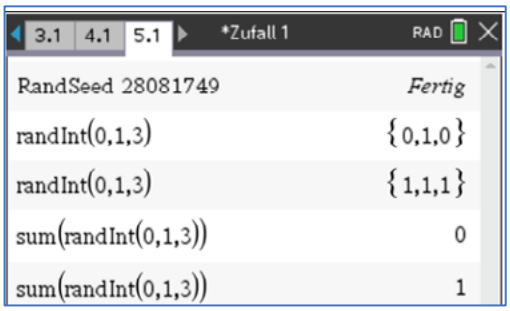
Arbeitsblatt 2: Simulation eines Zufallsexperiments mit *randint* und *sum*
Kinder, Kinder…

Für eine Jungengeburt wird $p = \frac{1}{2}$ vorausgesetzt.
Wir betrachten das Ereignis A: In Familien mit drei Kindern wurden genau zwei Jungen geboren.

a) Beschreibe, wie man diese Simulation mit dem mehrfachen Werfen dreier Münzen realisieren kann. Führe diese Simulation mit zwanzig Würfen von jeweils drei Münzen durch. Vergleiche dein Ergebnis mit den Resultaten deiner Mitschüler und berechne das arithmetische Mittel aller Werte.[6]

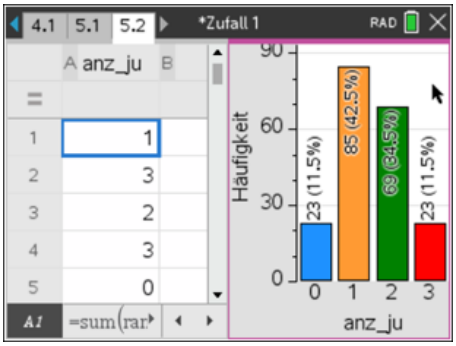
b) Das Werfen der Münzen lässt sich mit dem CAS-Rechner simulieren:

RandSeed *inividuelle Ziffernfolge* setzt den Zufallsgenerator auf individuellen Start
randInt(u,o,m) erzeugt eine Liste von m ganzzahligen Zufallszahlen z mit $u \leq z \leq o$.
sum(Liste) – gibt die Summe aller Elemente der Liste zurück.



Beschreibe, wie sich das reale Zufallsexperiment „Werfen dreier Münzen“ mit Blick auf das Ereignis A mithilfe der oben erläuterten Anweisungen „randInt“ und „sum“ modellieren lässt.

c) Realisiere und erläutere die im Folgenden dargestellte Simulation für die Ermittlung eines Schätzwertes für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A bei 200 Drei-Kind-Familien.



In ***Lists&Spreadsheet*** bekommt die Zelle A1 die Anweisung ***=sum(randInt(0,1,3))*** [enter].
Der Cursor wird wieder auf A1 gesetzt und mit [menu] wird die Anweisung *Daten – Füllen* aktiviert. Es erscheint ein gestrichelter Rahmen, der mit ▼ bis in die Zelle A200 gezogen wird. Dadurch wird der Befehl aus A1 in allen Zellen der Spalte bis A200 als relativer Zellbezug kopiert. Die Spalte A erhält ganz oben den Namen *anz_ju* für die Anzahl der Jungen.
Mit [menu] wird die Anweisung *Daten – Schnellgraph* aktiviert. Man erhält eine grafische Darstellung der Werte der Liste „anz_ju“. Setzt man den Cursor auf die Bezeichnung der waagerechten Achse, lässt sich mit [ctrl][menu] die Anweisung „Kategorisches X erzwingen“ aktivieren. Damit lassen sich die Ergebnisse als Balken- oder Tortendiagramm anzeigen. Ebenfalls mit [ctrl][menu] lassen sich alle Bezeichnungen einblenden. Im dargestellten Beispiel ist der Schätzwert für P(A) = 0,345. Geht man zurück in die Tabelle, kann man die Simulation beliebig oft wiederholen, wenn man [ctrl][R] drückt. Vergleiche die Ergebnisse dieser Simulationen mit den vorher ermittelten Schätzwerten.

[6] Foto: https://media.gettyimages.com/photos/brothers-and-sister-posing-together-in-the-garden-picture-id1173348433?s=2048x2048

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 2

Aufgabe a)
Man nimmt z. B. für Jungen Kopf und für Mädchen Zahl, wirft diese Münze dreimal, notiert die Ergebnisse und wiederholt dies zwanzigmal.

Aufgabe b)
Man codiert Jungen z. B. mit dem Wert 1 und Mädchen mit dem Wert 0, dann ergibt der Befehl randint(0,1,3) z. B. {0,1,1}, d. h. das zweite und das dritte Kind sind ein Junge. Nutzt man nun den sum()-Befehl, kann man diejenigen Fälle (Summe ist gleich 2) zählen, bei denen es zwei Jungen gibt (vgl. Datei zufall.tns, Blatt 2.1).

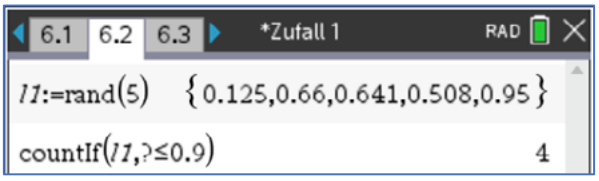
Aufgabe c)
Vergleiche Datei zufall.tns, Blatt 2.2.

Arbeitsblatt 3: Simulation eines Zufallsexperiments mit rand und countif Biathlon

Vereinfachend wird angenommen, dass ein Biathlet bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. trifft. Ermittle durch Simulation einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass er bei einer Serie von fünf Schüssen mehr als drei Treffer erzielt.

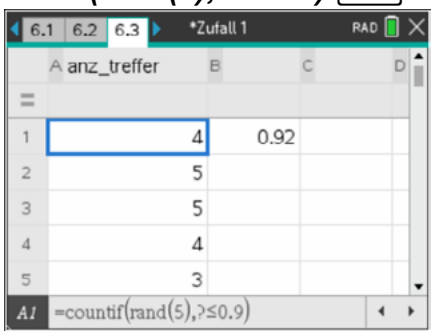
[7]

rand(m) erzeugt eine Liste von m Zufallszahlen zwischen 0 und 1.
countIf(Liste, Kriterien) – gibt die kumulierte Anzahl aller Elemente der Liste zurück, welche die festgelegten Kriterien erfüllen.



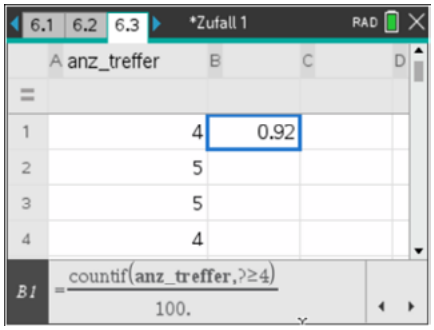
Die Abgabe eines Schusses wird durch den Befehl ***rand()***, eine Serie von fünf Schüssen durch ***rand(5)*** simuliert. Bei der Simulation zählt ein Schuss als Treffer, wenn die jeweilige Zufallszahl kleiner oder gleich 0,9 ist. Da die Zufallszahlen zwischen 0 und 1 annähernd gleich verteilt sind, trifft dies auf ca. 90% der erzeugten Zufallszahlen zu. Das entspricht der angenommenen Trefferwahrscheinlichkeit.
Um den gesuchten Schätzwert zu erhalten, wird eine große Anzahl von Serien zu je fünf Schüssen simuliert. Hier werden 100 Fünferserien erzeugt.

In ***Lists&Spreadsheet*** bekommt die Zelle A1 den Befehl ***=countif(rand(5),?<=0.9)*** [enter].
Der Cursor wird wieder auf A1 gesetzt und mit [menu] wird die Anweisung *Daten – Füllen* aktiviert. Es erscheint ein gestrichelter Rahmen, der mit ▼ bis in die Zelle A100 gezogen wird. Dadurch wird der Befehl aus A1 in allen Zellen der Spalte bis A100 als relativer Zellbezug kopiert. Die Spalte A erhält ganz oben den Namen „*anz_treffer*“ für die Anzahl der Treffer bei einer Fünferserie.
In der Zelle B1 wird die relative Häufigkeit der Serien mit mehr als drei Treffern berechnet mit ***=countif(anz_treffer,?>=4)/100.***



Aufgaben:

a) Berechne mit [ctrl] [R] zehn solcher Schätzwerte und bilde den Mittelwert.
b) Erzeuge den Schnellgraph zur Liste „*anz_treffer*“ und interpretiere die Anzeige im Zusammenhang mit dem gegebenen Sachverhalt. (siehe Arbeitsblatt 1)

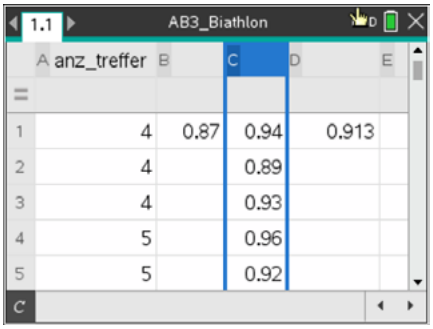


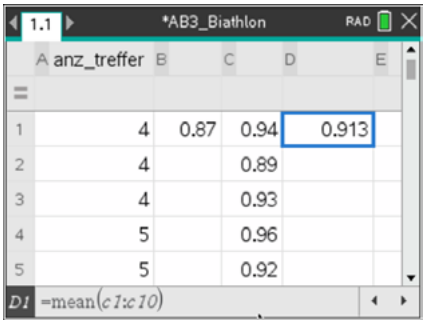
[7] https://media.gettyimages.com/illustrations/man-on-skis-aiming-rifle-illustration-id88797114?s=2048x2048

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 3

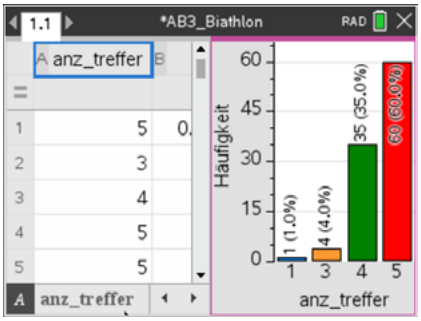
Aufgabe a) und b) in der Datei zufall.tns, Blatt 2.3

Aufgabe a:
In der Spalte C wurden die Ergebnisse von zehn Realisierungen für die Zufallsgröße „Anzahl der Treffer“ eingetragen, die mit [ctrl] [R] erzeugt wurden.
In der Zelle D1 wurde der Mittelwert dieser zehn Ergebnisse mit dem Befehl **= mean(c1:c10)** berechnet. Der Mittelwert betrug hier 0,931.
Der Biathlet erzielt mehr als drei Treffer bei fünf Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 91,3%.





Aufgabe b:



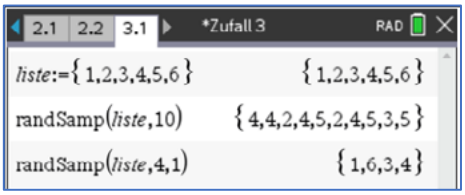
Der Schnellgraph für die Zufallsgröße „Anzahl der Treffer“ wird folgendermaßen erzeugt:

- Setze den Cursor auf die Spalte A.
- Wähle [menu] *Daten – Schnellgraph*.
- Setze den Cursor auf die waagerechte Achse des Punktdiagramms.
- Wählen [ctrl] [menu] *Kategorisches X erzwingen*.
- Setze den Cursor auf die Zeichenfläche.
- Wähle [ctrl] [menu] *Balkendiagramm.*
- Wähle [ctrl] [menu] *Alle Bezeichnungen anzeigen*.

Interpretation: Das Simulationsergebnis zeigt, dass der Schütze bei 100 Schüssen einmal 1 Treffer, viermal 3 Treffer, 35mal 4 Treffer, 60mal 5 Treffer erzielt hätte.

Arbeitsblatt 4: Simulation eines Zufallsexperiments mit randsamp

randSamp(Liste, m, 0 oder 1) erzeugt aus einer gegebenen Liste eine neue Liste mit m Elementen
- durch Ziehen mit Zurücklegen, wenn 0 eingegeben wurde (die 0 kann auch weggelassen werden), bzw.
- durch Ziehen ohne Zurücklegen, wenn 1 eingegeben wurde.

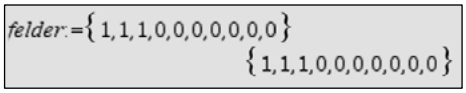


Beispiel: Eine große Handelskette startete anlässlich einer Fußballeuropameisterschaft ein Gewinnspiel.[8]

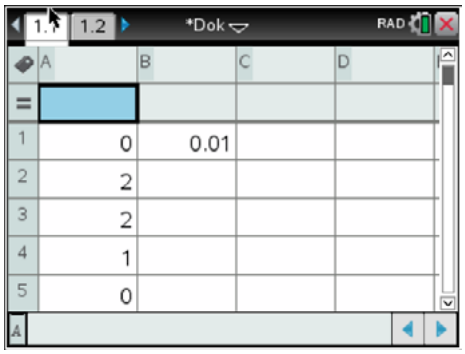
Und so hatte es funktioniert:
Ab einem Einkaufswert von 20 € erhielt man ein Rubbellos in allen teilnehmenden Filialen. Das Los enthielt zehn Rubbelfelder. Hinter drei Rubbelfeldern verbarg sich ein „TOR“ und hinter sieben ein „AUS“. Man durfte genau drei Felder freirubbeln und gewann einen Preis, wenn dreimal ein „TOR“ freigerubbelt wurde.

Ermittle einen Näherungswert für die Gewinnwahrscheinlichkeit durch Simulation.

In der Anwendung ***Calculator*** wird die Liste ***felder*** definiert. Sie besteht aus drei Einsen (für „Tor“) und sieben Nullen (für „Aus“).



Zelle A1: ***=countif(randsamp(felder,3,1),1)***
Der Liste ***felder*** werden ohne Zurücklegen drei Elemente entnommen und es wird gezählt, wie oft darunter eine „1“ ist.
Diese Anweisung wird über ***Menü – Daten – Füllen*** bis in die Zeile 500 kopiert.
Zelle B1: ***= countif(a1: a500,3)/500.***
Es wird gezählt, wie oft im Bereich A1 bis A500 eine „3“ vorkommt, und die relative Häufigkeit dieses Ereignisses wird bestimmt.
Durch ctrl R in Spalte A können beliebig viele Wiederholungen durchgeführt werden.



Ergebnis: $r_h = 0{,}01$

Aufgabe:
a) Realisiere diese Simulation insgesamt zehnmal. Bestimme den Mittelwert aller dabei ermittelten relativen Häufigkeiten als einen Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.
b) Beschreibe, wie man die Simulation mit drei roten und sieben schwarzen Skatkarten durchführen könnte.

[8] Quelle: http://www.lidl.de/de/Torjaeger-gesucht vom 12. Juni 2012

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 4

Aufgabe
a) in der Datei zufall.tns, Blatt 2.4
b) Die 10 Karten werden gut gemischt und man zieht aus den 10 Karten drei, ohne diese zurückzulegen. Hat man unter den drei gezogenen Karten nur rote, dann hat man gewonnen.

Anmerkung: Als Wahrscheinlichkeit ergibt sich: P(G) = $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$.

Arbeitsblatt 5: Übungen zu Simulationen

1. Eine Familie hat zwei Kinder. Es ist bekannt, dass eines der Kinder ein Mädchen ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das andere Kind ein Junge ist.

   Begründe, dass die folgende Simulation einen Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit liefert. Ermittle zehn solcher Schätzwerte und bilde ihr arithmetisches Mittel.

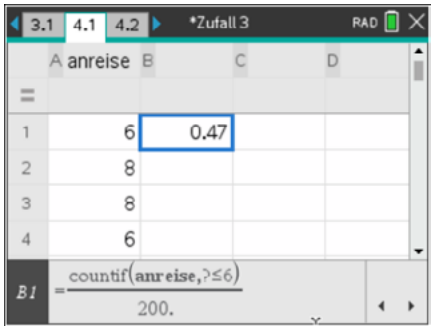
	A ki1	B ki2	C su	D	E
=	=randint(0,1,200)	=randint(0,1,200)	=ki1+ki2		
1	1	1	2	91	
2	0	1	1	51	
3	0	0	0	0.640845	
4	1	0	1		

   Zelle D1: =*countIf(su,1)* *Zelle D2: =countIf(su,2)* **Zelle D3: =** $\frac{D1 \cdot 1.}{D1+D2}$

2. Beim Würfeln mit zwei Tetraederwürfeln kann man die Augensumme 4 durch das Werfen von einer „1“ und einer „3“ oder von zweimal „2“ erreichen. Die Augensumme 5 ergibt sich durch das Werfen einer „2“ und einer „3“ oder einer „1“ und einer „4“. Jonas vermutet deshalb, dass die Wahrscheinlichkeiten für beide Augensumme gleich sind, weil er für jede Augensumme zwei Möglichkeiten sieht.
   Prüfe diese Vermutung durch eine geeignete Simulation mit Zufallszahlen.
   Erläutere deine Simulation.
   Warum hat Jonas nicht recht?

3. Ist es wahrscheinlicher, bei drei Würfen mit einer Münze zweimal „Wappen“ oder bei vier Würfen dreimal „Wappen“ zu werfen? Formuliere zunächst eine Vermutung. Entwirf und realisiere zu diesem Problem eine Simulation. Vergleiche deine Vermutung mit deinen Simulationsergebnissen. Versuche, die Wahrscheinlichkeiten theoretisch zu begründen.

4. Ein Hotel hat für sechs verfügbare Zimmer acht Buchungen angenommen, weil die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast tatsächlich anreist, nur 80% beträgt. Begründe, dass durch folgende Simulation ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden kann, dass alle ankommenden Gäste untergebracht werden können, wenn man davon ausgeht, dass die acht Buchungen unabhängig voneinander erfolgen.
   In Zelle A1 kommt die Anweisung
   $= \boldsymbol{countif}(\boldsymbol{rand}(\mathbf{8}), ? \leq \mathbf{0.8})$
   Diese Anweisung wird mit menu *Daten – Füllen* bis in die Zelle A200 kopiert.
   Die Spalte A erhält den Variablennamen ***anreise***.
   Der Eintrag in die Zelle B1 ist auf dem Screenshot erkennbar.



LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 5

Aufgabe 1

Mädchen werden mit dem Wert 1 codiert, damit zählt der Befehl D1: =***countIf(su,1)*** die Anzahl der Fälle, wo genau ein Mädchen auftritt, der Befehl D2: =***countIf(su,2)*** die Fälle mit zwei Mädchen.
Der Quotient D3: $=\frac{\boldsymbol{D1\cdot 1.}}{\boldsymbol{D1+D2}}$ liefert dann den Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.
Hinweis: Es handelt sich um eine Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit:
Es gilt $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ und in diesem Fall stellt A das Ereignis dar, dass (mindestens) eines der Kinder ein Mädchen ist und B das Ereignis, dass genau ein Junge vorkommt.
Damit gilt: $P_A(B) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$. (vgl. Datei zufall.tns, Blatt 3.1)

Aufgabe 2

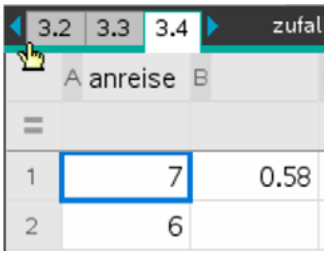
Die Simulation findet man in der Datei zufall.tns, Blatt 3.2. Mit dem Befehl ***countif()*** wird einmal die Anzahl der Summe 4 und einmal die Anzahl der Summe 5 bei 500 Versuchen gezählt.
Es ergibt sich i.d.R., dass Summe 4 um 100 schwankt und Summe 5 um 125.
Jonas hat nicht recht, da es von den 16 möglichen Ergebnissen der Ergebnismenge nur drei günstige für Summe 4 ((1,3); (3,1) ;(2;2)) aber vier günstige für Summe 5 ((1,4); (4,1); (2,3); (3,2)) gibt.

Aufgabe 3

Man vermutet, dass es wahrscheinlicher ist, bei 3 Würfen genau zweimal Wappen zu bekommen. Die Simulation (vgl. Datei zufall.tns, Blatt 3.3) bestätigt dies.
Theoretische Begründung:
P(WWZ)=$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}375$

P(WWWZ)= $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}25$

Aufgabe 4

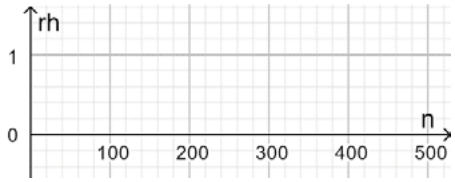


Die Lösung zur Aufgabe ist in der Datei zufall.tns, Blatt 3.4 zu finden. Der Befehl ***rand(8)*** liefert acht Zufallszahlen im Intervall [0; 1]. Mit dem Befehl ***countif(rand(8),?*** $\leq \mathbf{0{,}8}$***)*** zählt man, wie viele der acht Zufallszahlen kleiner oder gleich 0,8 sind. Dies entspricht der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit von 80% für eine Anreise. In der Zelle B1 ermittelt man dann die relative Häufigkeit bei 200 Versuchen.

Arbeitsblatt 6: Stabilisierung relativer Häufigkeiten

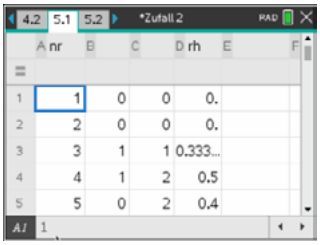
Eine ideale Münze wurde n-mal geworfen. Dabei erzielte man folgende Ergebnisse für die Anzahl „Wappen“:

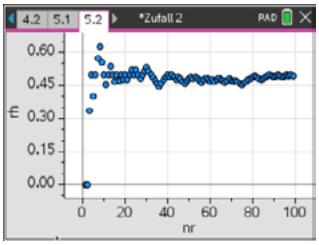
n	10	25	50	100	200	400
Anzahl Wappen	1	8	27	42	94	205
Rel. Häufigkeit						



a) Berechne die relativen Häufigkeiten rh (als Dezimalzahl) und zeichne ein Diagramm.
b) Erkläre, woran es liegt, dass die relative Häufigkeit für die Anzahl „Wappen“ nicht jedesmal 0,5 beträgt, obwohl es sich um eine ideale Münze handelt.
c) Ergänze den Lückentext:
„Mit _____Versuchsanzahl scheint sich die relative Häufigkeit rh um eine feste Zahl zu stabilisieren.“

Simulation der Stabilisierung relativer Häufigkeiten





when*(Bedingung,wahr, falsch)*
Wenn die Bedingung erfüllt ist, wird ***wahr*** zurückgegeben, sonst ***falsch***.

Öffne die Anwendung ***Lists&Spreadsheet*** und fülle die angegebenen Zellen so aus, wie im Folgenden beschrieben.
Zelle A1: ***1*** Zelle A2: ***= A1 + 1***Zelle B1 und B2: = ***when(rand()<0.5,1,0)***
Zelle C1: ***= B1*** Zelle C2: ***= C1 + B2*** Zelle D1: ***= C1/(A1·1.)*** *Zelle D2**: = C2/(A2·1.)***
Benenne die Spalte A mit ***nr*** und die Spalte D mit ***rh*** als Variablennamen.
Markiere die Zellen A2, B2, C2 und D2 mit ▶[⇧shift].
Kopiere mit [menu] - *Daten - Füllen* die Anweisungen aus diesen Zellen als relative Zellbezüge in weitere Zellen nach unten bis in die Zeile 100.
Öffne die Anwendung ***Data&Statistics*** und weise der waagerechten Achse den Namen ***nr*** und der senkrechten Achse den Namen ***rh*** zu. Drücke dazu [tab] und wähle aus der Anzeige die entsprechende Variable aus.
Durch [ctrl][R] in ***Lists&Spreadsheet*** können beliebig viele Wiederholungen durchgeführt werden.

Relativer Zellbezug: Beim Kopieren oder Autoausfüllen der Zellen verändert sich der Zellbezug in Beziehung zur Ergebniszelle. Die Spalten und Zeilen werden im Bezug automatisch geändert.

Aufgaben:
1. Realisiere diese Simulation und erläutere, warum sie die Stabilisierung relativer Häufigkeiten für das Werfen einer Münze veranschaulicht.
2. Erkläre, was an der oben beschriebenen Simulation verändert werden könnte, damit die Stabilisierung der relativen Häufigkeit für das Werfen einer Sechs mit einem Spielwürfel simuliert wird.

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 6

Aufgabe 1

Vergleiche Blatt 4.1 und 4.2 in der Datei zufall.tns.
Mit Hilfe der Simulation wird jeweils für die aktuelle Nummer (nr) die aktuelle relative Häufigkeit für Treffer berechnet und im Diagramm dargestellt.

Aufgabe 2

Um das Werfen einer Sechs mit einem Spielwürfel zu simulieren, muss im Befehl B2: =***when(rand()<0.5,1,0)*** die Wahrscheinlichkeit 0,5 auf die Wahrscheinlichkeit für 6 geändert werden, also auf $\frac{1}{6}$.

Arbeitsblatt 7: Simulation zu den logischen Operatoren „and“, „or“ und „not“

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Werfen zweier Würfel mindestens eine 1 zu haben?

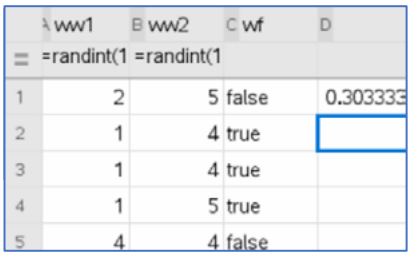
Nihad sagt, dass es die Fälle (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5) und (1,6) gibt, also 6 von 36 Fällen, demzufolge sei die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(A) = $\frac{6}{36}$ = $\frac{1}{6}$.

Maria meint, jeder von diesen Fällen kommt zweimal vor, also verdoppelt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Paul hat eine Simulation begonnen.

1. Versuche, diese Simulation ebenfalls umzusetzen, nutze in Spalte c den Operator „***or***“. Vergleiche das Ergebnis der Simulation mit den oben vorgeschlagenen Werten. Beschreibe die Wirkungsweise des Operators „***or***“ mit eigenen Worten.

   Hinweis: Die Anzahl der „Treffer“ - wenn in der Spalte C „*true*“ ausgegeben wird - kann mit dem ***countif***-Befehl ermittelt werden. Führe die Simulation mit mindestens 300 Versuchen durch (*randint(1,6,300)*).



	A ww1	B ww2	C wf	D
=	=randint(1	=randint(1		
1	2	5	false	0.303333
2	1	4	true	
3	1	4	true	
4	1	5	true	
5	4	4	false	

2. Im Screenshot siehst du ein Ergebnis einer solchen Simulation, diese relative Häufigkeit liegt sehr nah an der gesuchten Wahrscheinlichkeit von $\frac{11}{36}$.
   Finde für diesen Wert eine Begründung.

3. Einfacher lässt sich das Ergebnis auch mit Hilfe der Betrachtung der Gegenwahrscheinlichkeit finden, gib hierzu eine Lösung an.

LB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 7

Aufgabe 1

Vergleiche Blatt 5.1 in der Datei zufall.tns.

Der Operator „***or***“ gibt “wahr” zurück, wenn ein Ausdruck oder beide Ausdrücke zu ”wahr” ausgewertet werden. Der Operator gibt nur dann “falsch” zurück, wenn beide Ausdrücke “falsch” ergeben.

Aufgabe 2

Um die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Mindestens eine 1 bei zwei Würfen“ zu berechnen, kann man auch die Gegenwahrscheinlichkeit „Keine 1 bei zwei Würfen“ nutzen, es ergibt sich:

Aufgabe 3

P(E) = 1-$P(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} \approx 0{,}306.$

Checkliste Zufallsversuche

Ich möchte …	Was tust Du?	Das kann ich sicher.	Ich muss das noch üben.
den Zufallsgenerator des CAS-rechners individuell starten.	menu *Wahrscheinlichkeit – Zufallszahl Ausgangsbasis* RandSeed 201052		
eine oder mehrere ganzzahlige Zufallszahl(en) erzeugen.	menu *Wahrscheinlichkeit – Zufallszahl Ganzzahl* randInt(1,6) 2 randInt(1,12,5) {9,5,3,8,9}		
eine oder mehrere Zufallszahl(en) zwischen 0 und 1 erzeugen.	menu *Wahrscheinlichkeit – Zufallszahl Zahl* rand() 0.144026 rand(3) {0.581664,0.295915,0.530404}		
eine Bedingung realisieren.	**when*(Bedingung, wahr, falsch)*** Wenn die Bedingung erfüllt ist, wird ***wahr*** zurückgegeben, sonst ***falsch***. when(2<5,1,0) 1 when($\frac{1}{3}>\frac{1}{2}$,1,0) 0		
alle Elemente einer Liste zählen, die vorgegebene Bedingungen erfüllen.	**countIf(Liste, Kriterien)** – gibt die kumulierte Anzahl aller Elemente der Liste zurück, welche die festgelegten Kriterien erfüllen. countIf({1,2,4,1,3,2},1) 2 countIf({1,2,4,1,3,2},?≤2) 4 countIf({1,2,4,1,3,2},1<?≤3) 3		
die Summe der Elemente einer Liste ermitteln.	menu Statistik – *Listen Mathematik Summe der Elemente* sum({1,2,3,4,5}) 15		
eine Stichprobe durch Ziehen mit und ohne Zurücklegen aus einer Liste ermitteln.	menu *Wahrscheinlichkeit – Zufallszahl Stichprobe* randSamp({0,0,1,1,1,1,3,4},4) {1,4,1,4} randSamp({0,0,1,1,1,1,3,4},4,1) {3,1,0,4}		

3. Lernbereich 3: Funktionen und lineare Gleichungssysteme

Lernbereich 3: Funktionen und lineare Gleichungssysteme	**32 Ustd.**
Kennen von Funktionen - Begriff und Darstellungsformen	Printmedien und digitale Medien Klimadiagramm Weg-Zeit-Gesetz ➔ PH, Kl. 6, LB 2 Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses Rechnerbefehle, z. B. $\text{abs}(x)$, $\text{round}(x)$, aber auch $\text{rand}(x)$
- Definitionsbereich, Wertebereich - Monotonie, Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen	einfache ganz- und gebrochen rationale Funktionen
- Extrema, Symmetrie	Inhaltliches Verständnis und Erkennen von Eigenschaften anhand der Graphen
Anwenden von Eigenschaften linearer Funktionen - Gleichung, Graph - Anstieg, Differenzenquotient - grafisches und rechnerisches Ermitteln von Nullstellen	Untersuchen des Einflusses von Parametern in der Funktionsgleichung auf den Verlauf des Graphen mit DGS, TK, PC-Software, GTR oder CAS
- Finden von Gleichungen linearer Funktionen	Aufstellen eines GTR-Algorithmus
- Finden von Gleichungen für Messreihen mithilfe linearer Regression mit GTR, CAS oder TK	Werten der Ergebnisse der Regression Kritischer Umgang mit Formulierungen der Form „je – desto“ ➔ PH, Kl. 8, LB 3
Anwenden des grafischen und rechnerischen Lösens von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten beim Modellieren inner- und außermathematischer Sachverhalte	beim rechnerischen Lösen genügt die Beschränkung auf ein Verfahren
- ohne Hilfsmittel: überschaubare Koeffizienten	$\left\vert \begin{array}{rcl} -3x+4y & = & 22 \\ \frac{x}{2}+\frac{3}{4}y & = & 2 \end{array} \right\vert$
- mit GTR oder CAS: kompliziertere Koeffizienten	Ausblick auf Systeme mit mehr Gleichungen und Unbekannten
- Prinzip der vollständigen Fallunterscheidung am Beispiel der Lösbarkeitsfälle von linearen Gleichungssystemen	geometrische Interpretation
Beurteilen von Vor- und Nachteilen grafischer und rechnerischer Lösungsverfahren	

Technische Hinweise für Lehrkräfte

Die Eingabe von Funktionsgleichungen kann im TI-Nspire auf verschiedenen Wegen in verschiedenen Applikationen je nach Erfordernis (z. B. stetige oder diskrete Funktion) erfolgen. Die Funktionsgleichungen werden jeweils als Variable abgespeichert. Somit ist ein Zugriff auf die Gleichung über die entsprechende Variable möglich.
Standardmäßig wird in der Applikation **Graphs** kein Gitter erzeugt. Man kann aber in der Applikation ***Graphs*** über Menü – *Einstellungen* die Art des Gitters für das aktuelle Dokument festlegen.

Hinweise
Eine Funktionsdefinition ist in der Applikation ***Graphs*** in der Eingabezeile möglich.
Da in vielen Fällen aber mit der Funktionsgleichung weitergearbeitet werden soll, ist es sinnvoll die Gleichung in einer der Applikationen ***Calculator*** bzw. ***Notes*** zu definieren.
In der Applikation ***Graphs*** wird der schon vorhandenen Funktionsvariablen dann die selbst definierte Variable übergeben.
Um eine Funktion zu definieren, stehen im TI-Nspire mehrere Möglichkeiten zur Verfügung:

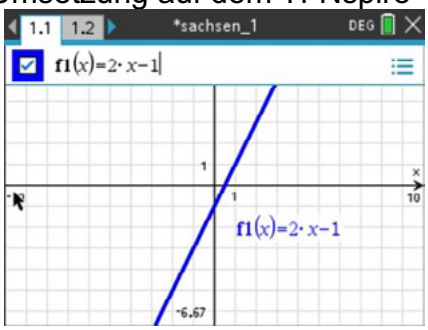
- Befehl Define: menu – 1 *Aktionen – 1 Define*.
- Zuweisungsoperator: sto→ Tasten ctrl var.
- Ergibtanweisung: :=, Tasten ctrl ⊨{:.

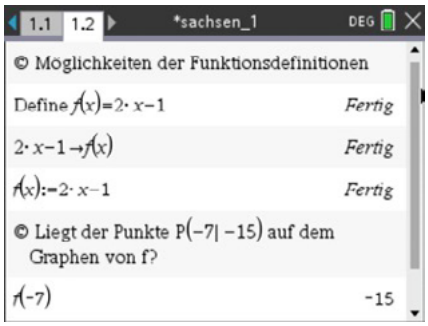
(Im Screenshot wird mit der Anweisung f(-7) überprüft, ob der Punkt (-7| 15) auf dem Graphen von f liegt) (siehe Lernbereich 1, Seite 6)

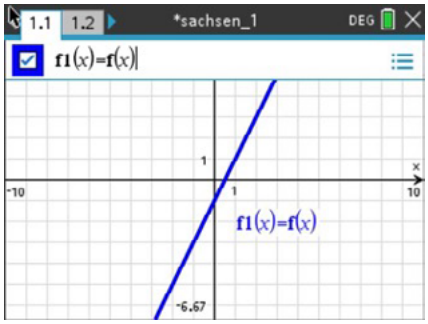
Man sollte sich im Unterricht auf eine Möglichkeit beschränken. Dabei entsprechen die 2. und 3. Möglichkeit einer Darstellung, die dem Schüler aus dem Informatikunterricht schon bekannt sein kann. Anschließend wird der vom TI-Nspire vorgegebenen Funktionsvariablen (hier ***f1(x)***) die selbst definierte Funktionsvariable (hier ***f(x)***) zugewiesen.
(Achtung: Hier nur mit Gleichheitszeichen!)
Durch Setzen oder Nichtsetzen des Hakens kann der Graph ein- bzw. ausgeblendet werden.

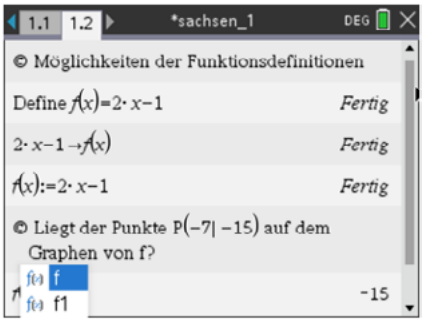
Nach Betätigen der Taste var werden die belegten zwei Variablen ***f*** und ***f1*** angezeigt.

Umsetzung auf dem TI-Nspire









In der Applikation ***Graphs*** kann man über menu –***Fenster/Zoom*** eine Reihe von Fenstereinstellungen vornehmen.

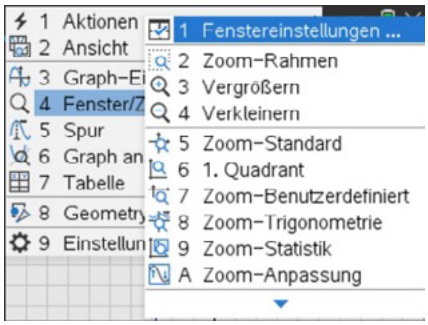
Hinweise

Umsetzung auf dem TI-Nspire

Um den Ausschnitt des Koordinatensystems in der Applikation ***Graphs*** anzupassen,
nutzt man

menu – *Fenster/Zoom*

und wählt den entsprechenden Menüeintrag.



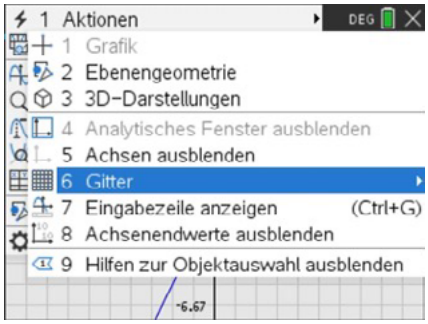
In den *Fenstereinstellungen* verändert man den Ausschnitt der Koordinatenachsen und ihre Skalierung.

Da das Display des TI-Nspire 480 x 320 Pixel anzeigt, beträgt das Verhältnis von x-Achse zu y-Achse 3 zu 2. Will man ein quadratisches Gitter im Display anzeigen, muss das Seitenverhältnis (xMax – Xmin) zu (yMax – yMin) ebenfalls 3 zu 2 betragen.

Weitere Einstellungen sind unter

menu – *1 Ansicht*

möglich.



Bemerkungen:
Bei der Verwendung vom Menüpunkt *Fenstereinstellungen* soll der Schüler angeregt werden, über Definitionsbereich und Wertebereich nachzudenken (ähnlich bei graphischer Darstellung auf Papier). Für schnelles Arbeiten sind die Menüpunkte *Zoom-Rahmen* bzw. *Vergrößern* hilfreich.

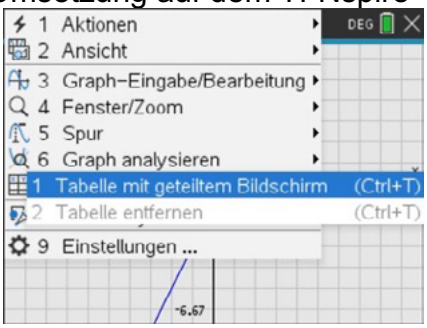
Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Hinweise zur Arbeit in der Applikation ***Graphs*** gegeben.

Hinweise zur Arbeit mit Wertetabellen
Eine Wertetabelle lässt sich schnell mittels

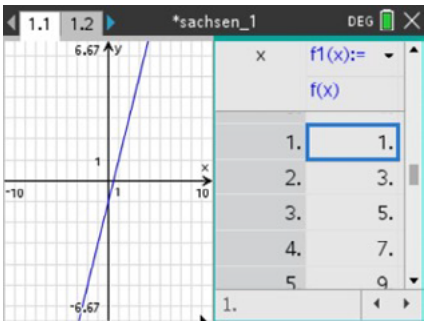
menu – *Tabelle – Tabelle mit geteiltem Bildschirm*
(ctrl T)

anzeigen. Dabei wird ein zweiter Bildschirm angezeigt. Dieser kann mit *Tabelle entfernen* wieder geschlossen werden.

Umsetzung auf dem TI-Nspire



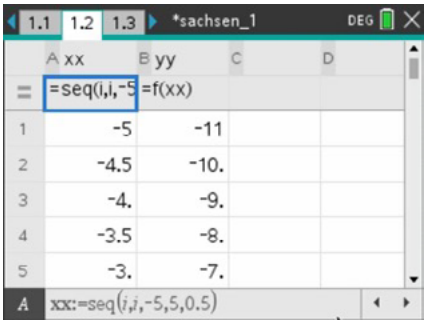
Alternativ kann auch die Applikation ***Lists&Spreadsheet*** genutzt werden:
Die Spalte **A** erhält den Namen ***xx***, die Spalte **B** den Namen ***yy***. Auf die so deklarierten Listen kann im ***Calculator*** zugegriffen werden.



Für die gewünschten Argumente kann der Befehl

seq(i,i,-5,5,0.5) … für Sequenz (Folge)

verwendet werden.
Dabei geben die Parameter in Reihenfolge die Bildungsvorschrift, den Namen der Laufvariablen, die untere Grenze, die obere Grenze und optional die Schrittweite an.



Der Liste ***yy*** (Spalte ***yy***) werden hier die Funktionswerte ***f(xx)*** zugewiesen.

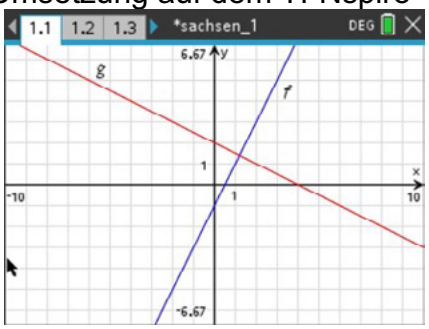
yy := f(xx)

Durch eine Änderung in der Spalte ***xx*** werden die Funktionswerte in Spalte **yy** sofort neu berechnet.

Bemerkungen:
In der Applikation ***Lists&Spreadsheet*** werden die einzelnen Spalten als Listen betrachtet. Diese sollten einen eigenen Namen (Bezeichnung) erhalten.
Um Probleme zu vermeiden, sind keine Befehlsnamen oder werkseitig vorgegebene Variablennamen zu benutzen.
Nicht geeignet sind z. B. ***x*** oder ***count*** oder ***euler.***

Hinweise zum Umgang mit Graphen
In vielen Fällen ist es sinnvoll, die Graphen zu bezeichnen.

Umsetzung auf dem TI-Nspire

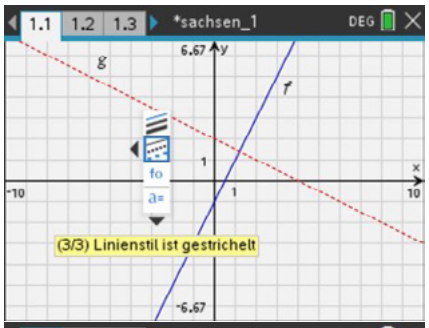


menu – *Aktionen – Text*

Sollen weitere Eigenschaften (Attribute) der Graphen angepasst werden, wählt man das zu verändernde Objekt aus:

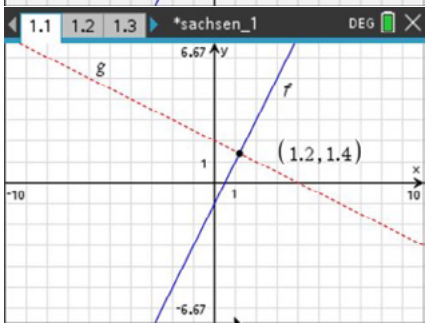
Mauszeiger auf das Objekt, ctrl menu – *Attribute* (am PC rechte Maustaste)

Attribute mit Richtungstasten auswählen und mit enter bestätigen.



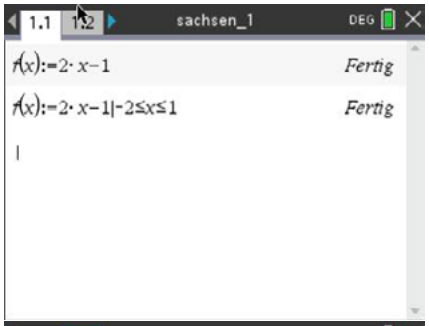
menu – *Graph analysieren*

erlaubt eine Reihe von Untersuchungen, die z. B. zur Kontrolle von Ergebnissen eingesetzt werden können. Die Ergebnisse werden i. A. nur als Näherung angegeben; hier Schnittpunkt der Graphen.



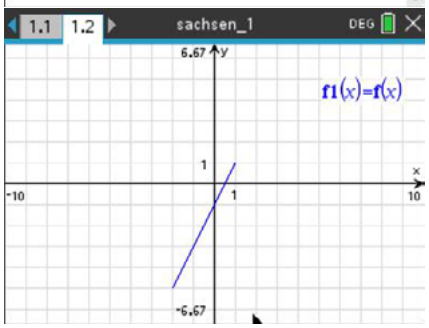
Graph analysieren ist auch erreichbar über:
Mauszeiger auf Objekt, ctrl menu—*Graph analysieren*

Funktionen mit eingeschränktem Definitionsbereich oder abschnittsweise definierte Graphen von Funktionen lassen sich bereits im ***Calculator*** definieren.



Möglich ist aber auch in der Applikation ***Graphs*** die Eingabe mit Bedingungsstrich (with - Operator): $f(x) \mid -2 \leq x \leq 1$.

Bei einer erneuten Anzeige der Eingabezeile verändert der TI-Nspire die Anzeige in: $\{f(x), -2 \leq x \leq 1.$

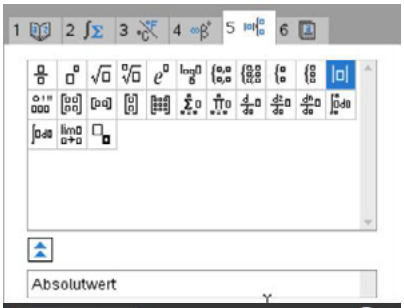


Ebenfalls möglich ist diese Definition über die Taste oder die Verwendung des Menüpunktes 5 aus dem Katalog.

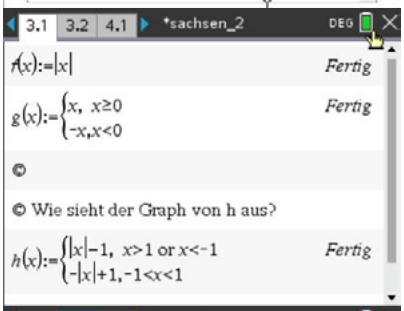
Der Betrag einer reellen Zahl und die Betragsfunktion sind im Analysisunterricht von wesentlicher Bedeutung. Sie kann mittels Katalog bzw. mittels der Funktion ***abs()*** definiert werden.
Schüler benutzen manchmal den Bedingungsstrich, um den Betrag einer Zahl zu erzeugen. Das zieht aber einen Syntaxfehler nach sich.

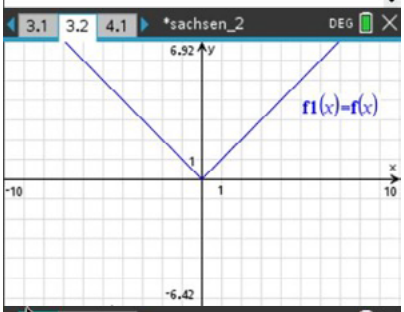
Umsetzung auf dem TI-Nspire

Die Betragsfunktion wird über das Symbol aus dem Katalog oder über $f(x) := abs(x)$ definiert.
In der Ausgabe erscheint dann $f(x) := |x|$.



Sie lässt sich auch abschnittsweise mit linearen Funktionen definieren.
Im ***Katalog*** wählt man das entsprechende Symbol ***stückweise Funktion*** aus.





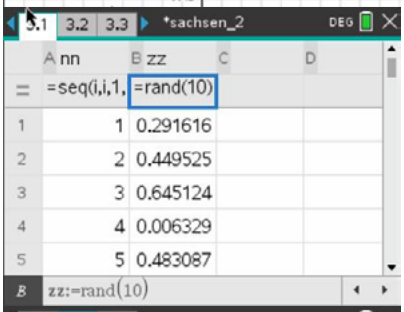
Eine diskrete Funktion weist den natürlichen Zahlen → Zufallszahlen zu.
Die Funktion wird im Koordinatensystem dargestellt.

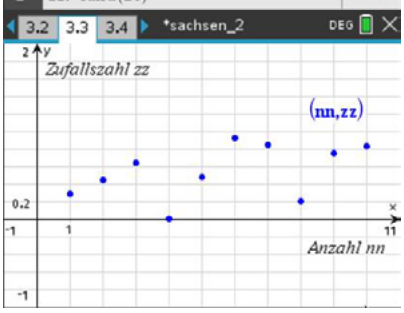
Der Befehl ***rand()*** erzeugt Zufallszahlen zwischen 0 und 1.

Die Folge ***nn*** lässt sich händisch aber auch als Sequenz ***seq(i,i,1,10)*** darstellen. Siehe auch LB2 Seite 42.

Die Funktion kann dann als Streudiagramm im Koordinatensystem dargestellt werden.

menu – ***Graphs****-Eingabe/Bearbeitung - Streudiagramm*





Der Einsatz von Schiebereglern eignet sich besonders zur Visualisierung des Einflusses von Parametern auf einen Graphen. Schüler können dadurch die Einflüsse der Parameter selbstständig entdecken.

Hinweise

Bei der Definition der Funktion sollte der Parameter zusätzlich zur Veränderlichen ***x*** mit übergeben werden.

Bemerkung:
Sind zu viele Parameter vorhanden, z. B. bei Rekonstruktionen von Gleichungen höheren Grades, können die Parameter in den Klammern auch weggelassen werden, also die Funktion nur als f(x) definiert werden.

Bei der Eingabe einer Funktion mit einem Parameter in der Applikation ***Graphs***, schlägt der TI-Nspire die Einführung eines Schiebereglers automatisch vor.

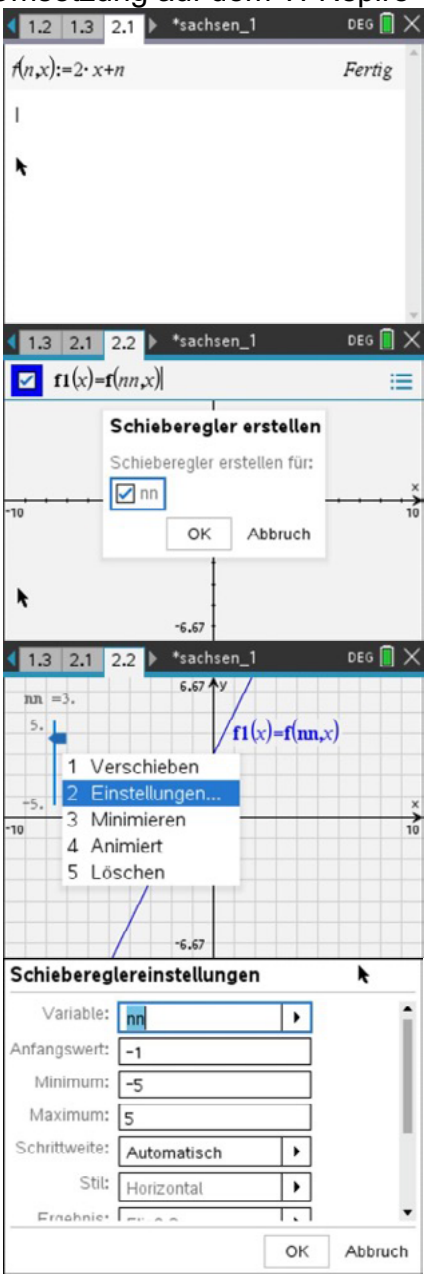
Es ist günstig, bei der Übergabe der Funktion zur Darstellung mit einem Schieberegler einen neuen Parameter (z. B. statt ***n*** hier ***nn***) zu verwenden.
Da durch den Schieberegler die Variable mit einer Zahl belegt wird, setzt der TI-Nspire auch bei erneutem Aufruf der Funktion den Zahlenwert des Schiebereglers ein. Der Parameter ist dann durch den Zahlenwert überschrieben.

Einstellungen des Schiebereglers:
Steht der Mauszeiger über dem Schieberegler, erreicht man durch Betätigen der Tasten [ctrl] [menu] die Einstellungen.

Hier lassen sich nun diverse Einstellungen vornehmen.

(Schieberegler verschieben, minimieren (Pfeil-Darstellung), animieren bzw. löschen)

Umsetzung auf dem TI-Nspire



In vielen Problemstellungen werden Messwerte aufgenommen bzw. sind Wertetabellen gegeben. Für die Auswertung solcher Tabellen sind z. B. die Applikationen ***Lists&Spreadsheet, Graphs*** und ***Calculator*** gut einsetzbar.
Ein mögliches Vorgehen wird hier an einem konkreten Beispiel beschrieben.

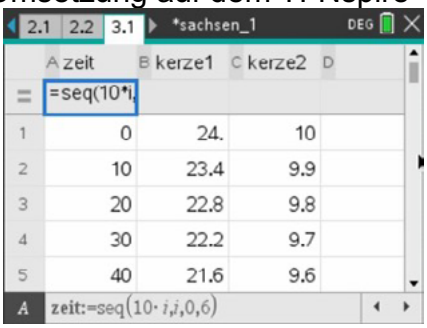
Hinführendes Beispiel:
Zwei Kerzen unterscheiden sich in Höhe und Durchmesser voneinander. Beide werden gleichzeitig angezündet. Während des Abbrennvorgangs wurden mehrere Messungen der Höhe durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Messungen wurden tabellarisch aufgelistet.

Zeit (min)	0	10	20	30	40	50	60
Höhe Kerze 1 (cm)	24,0	23,4	22,8	22,2	21,6	21,0	20,4
Höhe Kerze 2 (cm)	10,0	9,9	9,8	9,7	9,6	9,5	9,4

Stelle die Werte in einem geeigneten Diagramm dar und bestimme für jede Kerze eine Funktionsgleichung, die den Sachverhalt beschreibt.

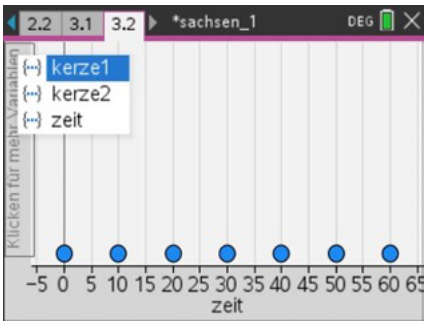
Hinweise
Zuerst werden die Daten in die Applikation ***Lists&Spreadsheet*** übernommen.
Da hier bei der Zeitmessung konstante Abstände zwischen zwei Messwerten vorliegen, wurde mittels Befehl ***seq()*** eine Folge automatisch erzeugt.
Diese Werte können natürlich auch einzeln eingetragen werden.

Umsetzung auf dem TI-Nspire

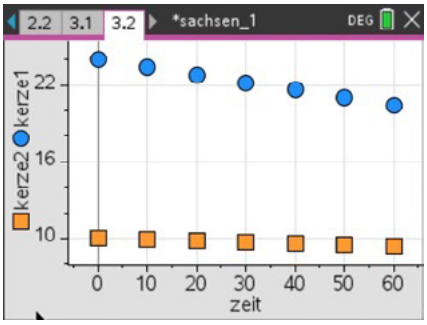


Variante 1

In der Applikation ***Data&Statistics*** werden auf der x-Achse die Zeit und auf der y-Achse die Höhen angezeigt.
Dazu bewegt man den Cursor auf die entsprechenden Felder unterhalb der x-Achse und rechts neben der y-Achse und wählt jeweils die Größe aus, bzw. man nutzt die Tabulator-Taste [tab].



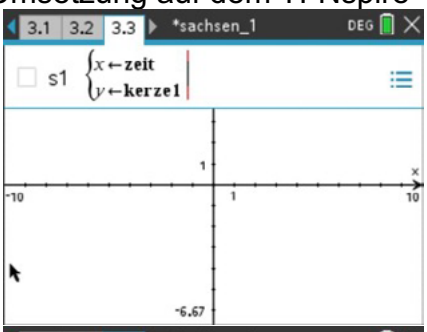
Der Nachteil ist eine "verzerrte" Darstellung, da die y-Achse nicht im Ursprung beginnt, dies lässt sich aber nachträglich durch Änderung der Fenstereinstellung korrigieren.
(Anmerkung: Um mehrere Datensätze darzustellen, muss man nochmals auf den 1. Wert auf der y-Achse klicken und einen weiteren Datensatz wählen.)



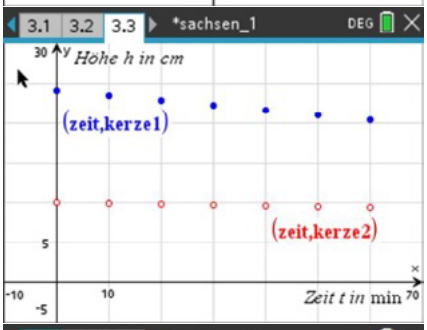
Variante 2

Umsetzung auf dem TI-Nspire

In der Applikation ***Graphs*** wählt man unter
menu – ***Graphs***-*Eingabe/Bearbeitung*
das Streudiagramm aus.

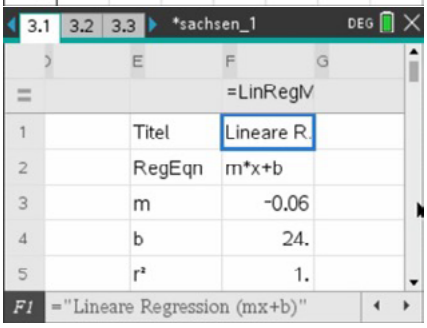


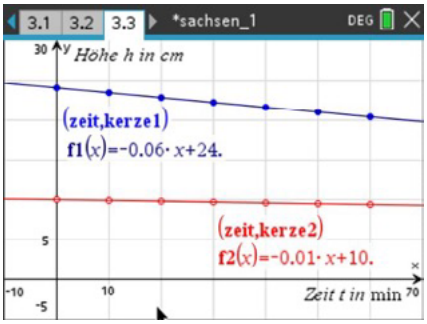
Im Streudiagramm werden den Variablen x und y die entsprechenden Größen zugewiesen.
Anschließend sind noch die Achsen anzupassen und eventuell eigene Achsenbezeichnungen einzufügen.



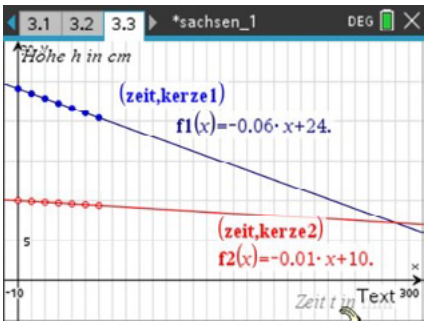
Eine Möglichkeit, eine zugehörige Funktionsgleichung zu finden, ist den TI-Nspire eine Regression durchführen zu lassen.

In diesem Fall wählt man in der Applikation
Lists&Spreadsheet
menu – *Statistik – Statistische Berechnungen*
die entsprechende Regression aus.
Dabei sind in diesem Beispiel die Bezeichner für die x-Liste (zeit) und für die y-Liste (kerze1) einzutragen. Nun kann man noch die Variable festlegen, unter der die Funktionsgleichung gespeichert werden soll.
Da nach dem Wechsel in die Applikation ***Graphs*** der Graph nicht automatisch angezeigt wird, muss die Eingabezeile geöffnet und mit der Taste enter betätigt werden.





Nun könnten weitere Untersuchungen erfolgen.

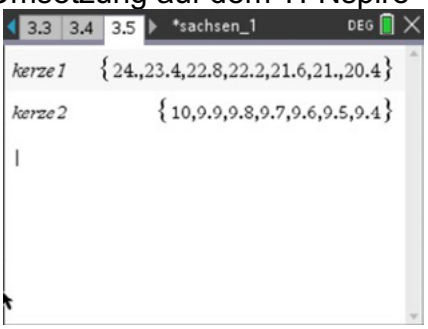


Die in der Applikation ***Lists&Spreadsheet*** genutzten Spaltenbezeichner sind gleichzeitig die Bezeichner für die in den Spalten abgelegten Listen.
Das ermöglicht die Verwendung dieser Listen z. B. in der Applikation ***Calculator***.
So lassen sich z. B. die vom TI-Nspire definierten Listenoperationen anwenden.

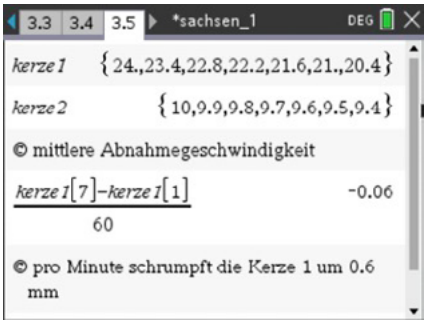
Hinweise

Umsetzung auf dem TI-Nspire

Hier werden die Listen für die Höhen der Kerzen ausgegeben.



Auf die einzelnen Elemente kann man durch Angabe des Index zugreifen. Dabei ist der erste Indexwert 1, z. B. liefert ***kerze1[7]*** das siebte Element aus der Liste kerze1.



Der Lehrplan fordert das Kennen einfacher ganzrationaler und gebrochen-rationaler Funktionen und ihrer Eigenschaften. An formalen Beispielen und am Beispiel einer Anwendungsaufgabe sollen Eigenschaften einer Funktion bzw. ihres Graphen untersucht werden:

Hinweise

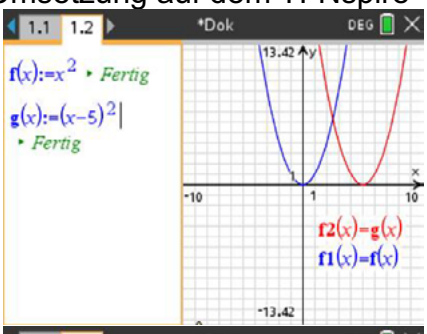
Durch Visualisierung von Funktionsgraphen lassen sich bestimmte Eigenschaften zum Verlauf, zum Definitionsbereich und Wertebereich erkennen.

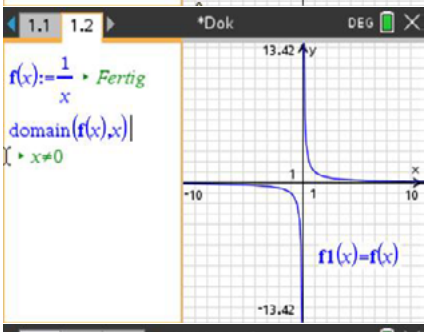
Geeignet ist hierbei die Eingabe des Funktionsterms in der Applikation ***Notes*** und die Zweiteilung des Bildschirms.

doc – *Seitenlayout – Layout auswählen*

Der Befehl ***domain(Funktion, Variable)*** gibt den Definitionsbereich der Funktion aus.

Umsetzung auf dem TI-Nspire



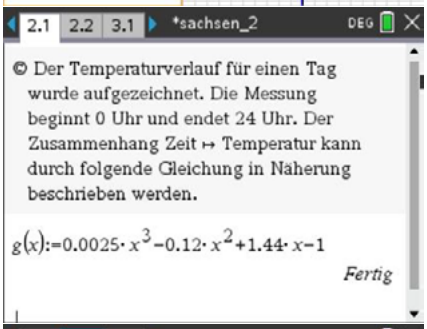


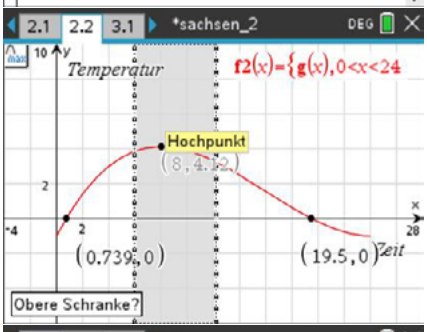
Eigenschaften von Funktionen an einer Anwendung: Der Temperaturverlauf wird für 24 Stunden dargestellt.

Mittels Tool *Graph analysieren* lassen sich einzelne Eigenschaften anzeigen:

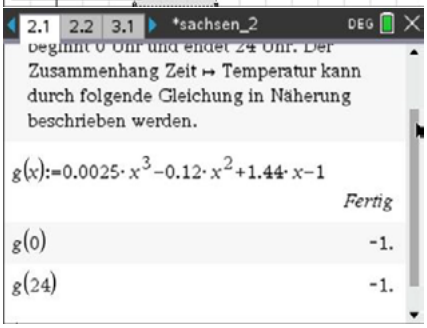
menu – *Graph analysieren*
und dort dann die gewünschte Eigenschaft auswählen.

Für das Maximum wählt man eine Stelle links neben dem Maximum, markiert einen Bereich in der Umgebung vom Hochpunkt und drückt enter.
Analog können die Nullstellen bestimmt werden.





Die Funktionswerte der Randpunkte können im ***Calculator*** ausgeben werden.

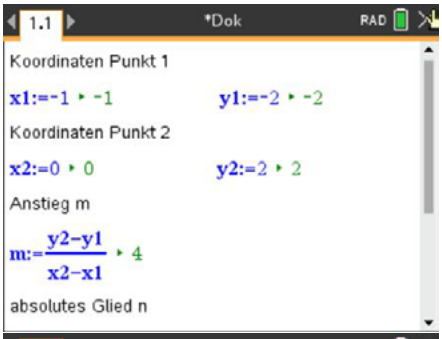


Der Lehrplan fordert das Erstellen eines Algorithmus, der aus den Koordinaten von zwei Punkten die Gleichung des zugehörigen Funktionsgraphen ermittelt.
Hierzu eignet sich hervorragend die Applikation ***Notes***, da die hier in Mathe-Feldern eingegebenen Werte sofort die weiterführenden Berechnungen beeinflussen.

Hinweise
Die Gleichung einer linearen Funktion soll aus den Koordinaten zweier gegebener Punkte ermittelt werden:

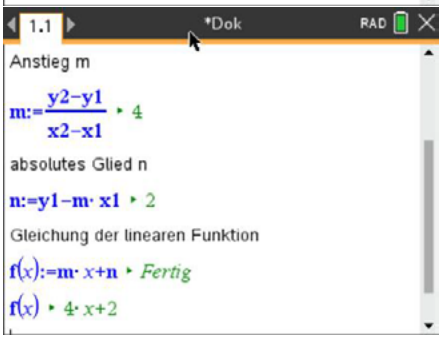
Man verwendet die Applikation ***Notes*** und definiert in Mathe-Feldern (ctrl M) die Koordinaten eines Punktes 1 und eines Punktes 2.

Umsetzung auf dem TI-Nspire



Der Anstieg m ergibt sich aus $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

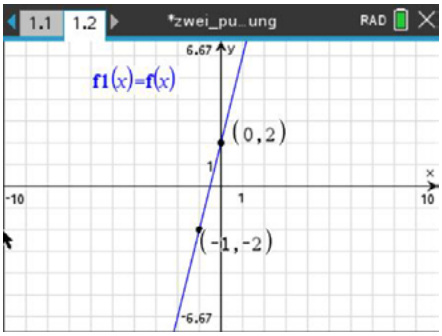
Einsetzen liefert dann für n : $n = y_1 - m \cdot x_1$



Der zugehörige Graph und die gegebenen Punkte können dann in der Applikation ***Graphs*** visualisiert werden.

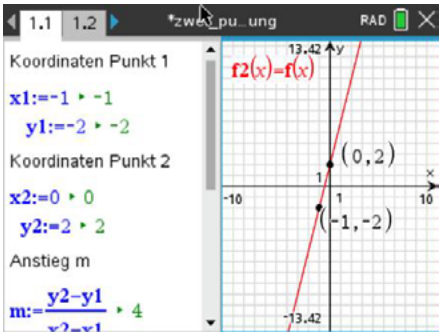
Für die Anzeige der Punkte wählt man im Geometriemenü

menu –*Geometry – Punkte und Geraden – Punkte nach Koordinaten*



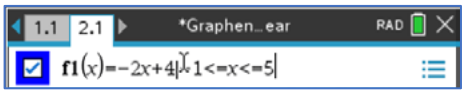
und ersetzt die vorgegebenen Werte durch x1 und y1 bzw. x2 und y2.

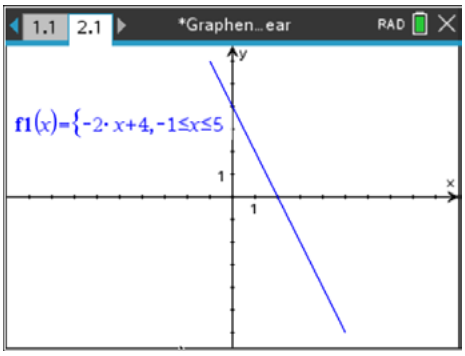
Alternativ kann für die Darstellung auch der Bildschirm geteilt werden.



Arbeitsblatt1: Graphen linearer Funktionen darstellen.

Beispiel:
Zeichne den Graphen der linearen Funktion f mit y = f(x) = - 2x + 4 mit $-1 \leq x \leq 5$.
Lösung:
Öffne die Anwendung *Graphs*. Gib in die sich automatisch öffnende Eingabezeile hinter f1(x)= den Funktionsterm -2x + 4 ein.
Füge den Bedingungsstrich (*with*-Operator |) ein und danach die einschränkenden Bedingungen -1 ≤ x ≤ 5. Drücke [enter] und der Graph wird automatisch eingezeichnet. Auch seine Funktionsgleichung wird angezeigt.
(Beachte, dass die Funktionsgleichung in etwas anderer Form angegeben wird.)

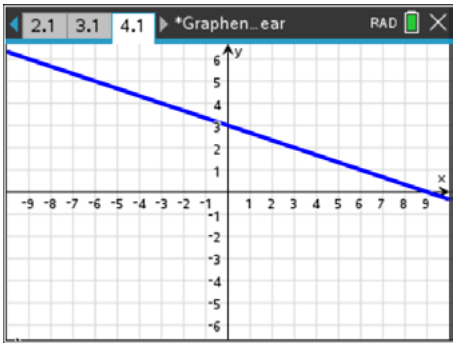




Aufgaben:
1. Zeichne mit dem CAS-Rechner die Graphen der angegebenen Funktionen in ein und denselben Bildschirm.

   y = f(x) = 0,5x – 3 y = g(x) = 4 mit $1 \leq x \leq 5$ y = h(x) = 3x – 8
   Hinweis: Drücke [tab], um in die Eingabezeile zu kommen.
2. Zeichne den Graphen der Funktion y = f(x) = 0,2x – 20. Mache den Graphen auf dem Bildschirm sichtbar, indem du unter [menu] *Fenster* geeignete Einstellungen wählst. Erläutere dein Vorgehen.

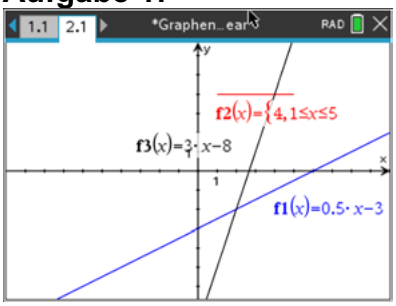
3. Auf dem Screenshot ist der Graph einer linearen Funktion eingezeichnet. Allerdings wurden die Funktionsgleichung ausgeblendet, ein Gitter angezeigt, die Beschriftungen auf den Achsen vervollständigt und der Graph in anderer Strichstärke gezeichnet. Finde heraus, wie du diese Darstellung auch hinbekommst und bereite dazu einen kleinen Vortrag vor.



4. Erläutere die Zweipunkteform $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ der Geradengleichung. Erzeuge mit dieser Zweipunktegleichung eine Gleichung der Form y = f(x) = mx + n der linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte A(-2; 3) und B(4; -2) verläuft.
   Trage die Punkte A und B auf dem Bildschirm ein, lege eine Gerade durch diese Punkte und lasse dir deren Gleichung mit [ctrl] [menu] *Koordinaten/Gleichung* anzeigen. Vergleiche diese Gleichung mir der, die du über die Zweipunkteform gefunden hast.

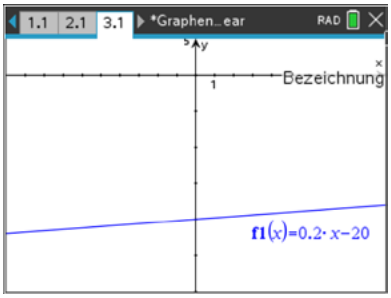
LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 1

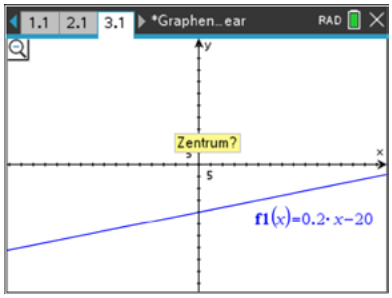
Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

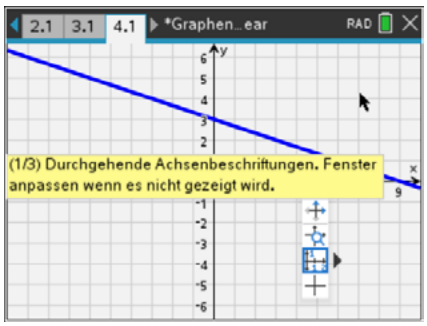
Weil der y-Achsendurchgang bei – 20 liegt und der Anstieg m = 0,2 sehr klein ist, wird der Graph im Standardfenster nicht zu sehen sein. Man kann z. B. unter menu *Fenster/Zoom - Fenstereinstellungen* wählen und die Einstellungen so verändern, dass der Graph auf dem Bildschirm sichtbar wird. Auch die Verwendung der Anweisung *Verkleinern* ist denkbar.





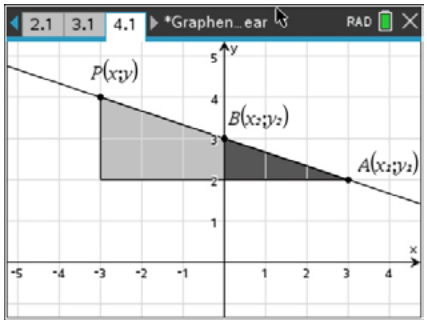
Aufgabe 3:

Die Gleichung des Graphen kann man ablesen: $y = -\frac{1}{3}x + 3$.



Die Achsenbeschriftungen lassen sich verändern, indem man den Cursor auf eine Achse setzt, mit ctrl menu *Attribute* wählt und dort diese Eigenschaft ändert. Achtung: Das funktioniert nur, wenn der Koordinatenursprung ziemlich mittig liegt.
Um die Funktionsgleichung auszublenden, setzt man den Cursor auf die Gleichung und wählt ctrl menu *Auswahl*.
Um die Strichstärke des Graphen zu ändern, setzt man den Cursor auf den Graphen und wählt ctrl menu *Attribute*.
Um ein Gitter einzufügen, wird menu *Ansicht-Gitter-liniertes Gitter* gewählt.

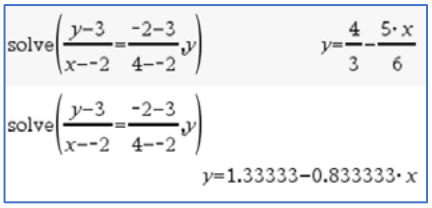
Aufgabe 4:



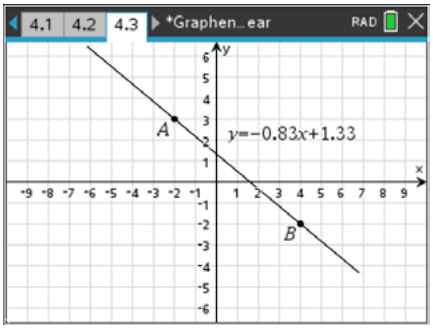
Der Anstieg der Geraden ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Zwischen den beiden voneinander verschiedenen Punkten $A(x_1;\ y_1)$ und $B(x_2;\ y_2)$ kann man den Anstieg angeben durch $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Der Anstieg zwischen einem beliebigen Punkt P(x; y) und dem Punkt A ist $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ $(P \neq A)$.

Da eine Gerade überall ein und denselben Anstieg hat, kann man beide Formeln gleichsetzen und erhält damit die Zweipunkteform $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
Für die Punkte A und B erhält man die Gleichung
$y = f(x) = -\frac{5}{6}x + \frac{4}{3} \approx -0{,}83x + 1{,}33$.



Man zeichnet ein Koordinatensystem mit liniertem Gitter, um die Punkte besser platzieren zu können. Mit menu *Geometry-Punkte&Geraden-Punkt auf* werden die Punkte gesetzt und mit menu *Geometry-Punkte&Geraden-Gerade* wird die Gerade gezeichnet. Mit ctrl menu *Koordinaten/Gleichungen* wird die Geradengleichung angezeigt, wenn man den Cursor vorher auf die Gerade setzt.



Arbeitsblatt 2: Funktionsgraphen darstellen

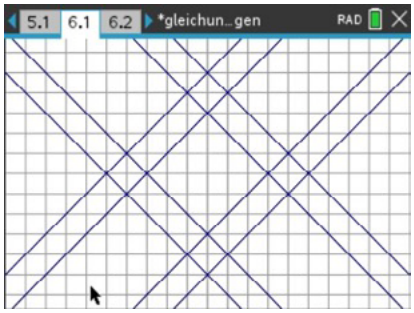
Erzeuge mit deinem TI-Nspire folgende Bilder.
Notiere mögliche Funktionsgleichungen und kennzeichne die zugehörigen Graphen.

$f_1(x) =$ $f_2(x) =$

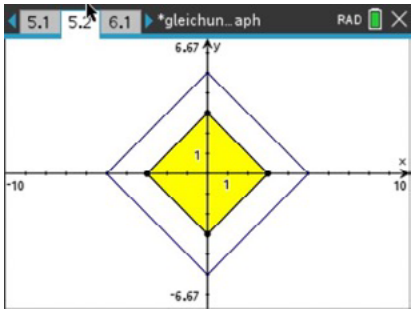
$f_3(x) =$ $f_4(x) =$

$f_5(x) =$ $f_6(x) =$

$f_7(x) =$ $f_8(x) =$



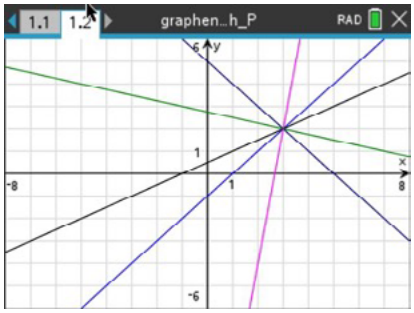
Tipp:
Das gelbe Quadrat erhält man, indem man aus dem Geometriemenü eine passende Form auswählt und diese über ihre Eigenschaften färbt.



$g_1(x) =$ $g_2(x) =$

$g_3(x) =$ $g_4(x) =$

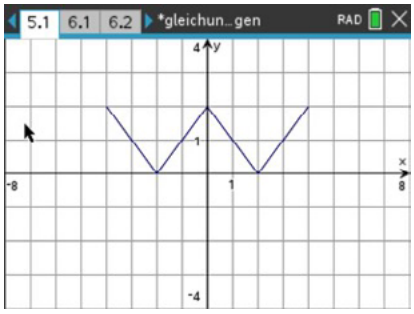
$g_5(x) =$



$w_1(x) =$ $w_2(x) =$

$w_3(x) =$ $w_4(x) =$

Kann man dieses Bild durch weniger als vier Gleichungen beschreiben?
(Menüpunkt 5 aus dem Katalog nutzen.)



$f_1(x) =$ $f_2(x) =$

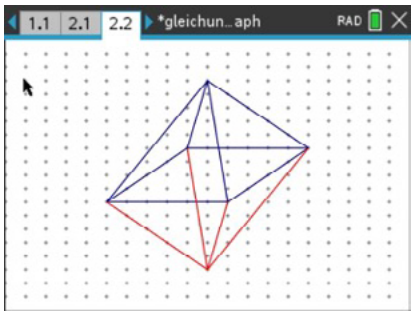
$f_3(x) =$ $f_4(x) =$

$f_5(x) =$ $f_6(x) =$

$f_7(x) =$ $f_8(x) =$

$f_9(x) =$ $f_{10}(x) =$

$f_{11}(x) =$ $f_{12}(x) =$



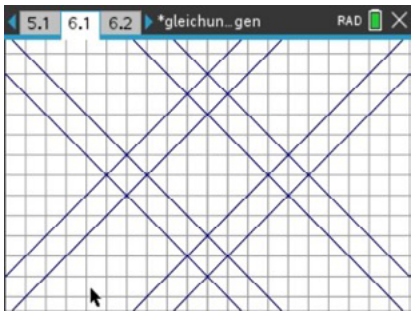
LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 2

$f_1(x) = x + 3$ $\qquad$ $f_2(x) = x + 5$

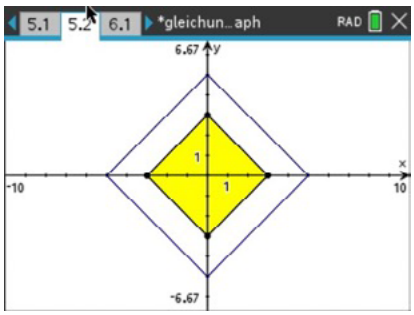
$f_3(x) = x - 3$ $\qquad$ $f_4(x) = x - 5$

$f_5(x) = -x + 3$ $\qquad$ $f_6(x) = -x + 5$

$f_7(x) = -x - 3$ $\qquad$ $f_8(x) = -x - 5$



siehe f_1 bis f_8 , abschnittsweise definiert
$f_1(x) = x + 3 | -3 \le x \le 0, \ldots, f_4(x) = x - 5 | 0 \le x \le 5$
$f_5(x) = -x + 3 | 0 \le x \le 3, \ldots, f_8(x) = -x - 5 | -5 \le x \le 0$

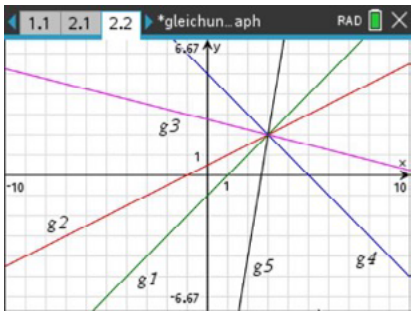


menu - *Geometry – Formen*
Form auswählen und über Menüpunkte Farbe färben

$g_1(x) = x - 1$ $\qquad$ $g_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$g_3(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$ $\qquad$ $g_4(x) = -x + 5$

$g_5(x) = 6x - 16$

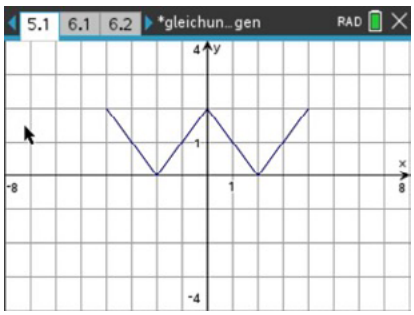


$w_1(x) = -x - 2 | -4 \le x \le -2$ $\qquad$ $w_2(x) = x + 2 | -2 \le x \le 0$

$w_3(x) = -x + 2 | 0 \le x \le 2$ $\qquad$ $w_4(x) = x - 2 | 2 \le x \le 4$

Kann man dieses Bild durch weniger als vier Gleichungen beschreiben?

$$f(x) = \begin{cases} -|x| + 2 & -2 \le x \le 2 \\ |x| - 2 & -2 < x < -1 \ \vee \ 1 < x < 2 \end{cases}$$



$f_1(x) = 2 | -1 \le x \le 5$ $\qquad$ $f_2(x) = -2 | -5 \le x \le 1$

$f_3(x) = x + 3 | -5 \le x \le -1$ $\qquad$ $f_4(x) = x - 3 | 1 \le x \le 5$

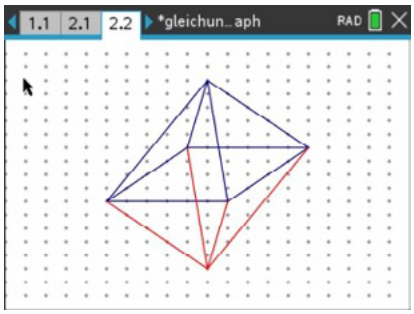
$f_5(x) = 5x + 7 | -1 \le x \le 0$ $\qquad$ $f_6(x) = \frac{9}{5}x + 7 | -5 \le x \le 0$

$f_7(x) = -9x + 7 | 0 \le x \le 1$ $\qquad$ $f_8(x) = -x + 7 | 0 \le x \le 5$

$f_9(x) = -9x - 7 | -1 \le x \le 0$ $\qquad$ $f_{10}(x) = -x - 7 | -5 \le x \le 0$

$f_{11}(x) = 5x - 7 | 0 \le x \le 1$ $\qquad$ $f_{12}(x) = \frac{9}{5}x - 7 | 0 \le x \le 5$

(andere Lösungen sind möglich)



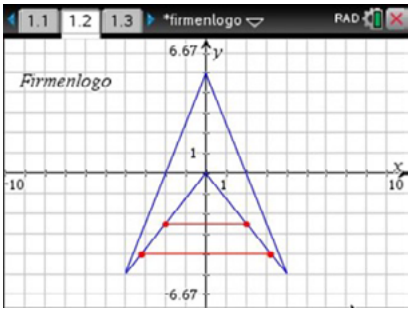
Arbeitsblatt 3: Bilder aus Funktionsgraphen

Aufgabe 1:
Schüler wollen für ihre Firma ein Logo entwerfen. Paul macht den abgebildeten Vorschlag. Erzeuge diese Abbildung. Die Strecke vom tiefsten Punkt bis zum Koordinatenursprung auf der y-Achse wird durch die eine waagerechten Strecke halbiert und durch die zweite Strecke im Verhältnis 4 : 1 geteilt.

konkaves Viereck:
$f_1(x) =$ $f_2(x) =$

$f_3(x) =$ $f_4(x) =$

waagerechte Strecken:
$k_1(x) =$ $k_2(x) =$



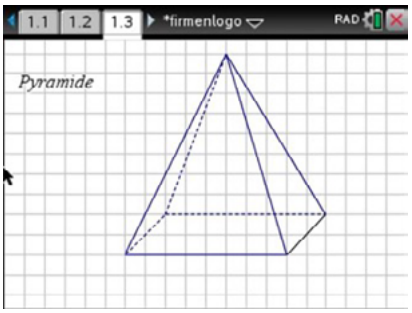
Aufgabe 2:
Erzeuge die abgebildete Pyramide (verschiedene Lösungen sind möglich).

Grundfläche:
$g_1(x) =$ $g_2(x) =$

$g_3(x) =$ $g_4(x) =$

Seitenkanten:
$f_1(x) =$ $f_2(x) =$

$f_3(x) =$ $f_4(x) =$



Aufgabe 3:
Erzeuge nebenstehenden Weihnachtsstern (verschiedene Lösungen sind möglich).

vierzackiger Stern:
$f_1(x) =$ $f_2(x) =$

$f_3(x) =$ $f_4(x) =$

$f_5(x) =$ $f_6(x) =$

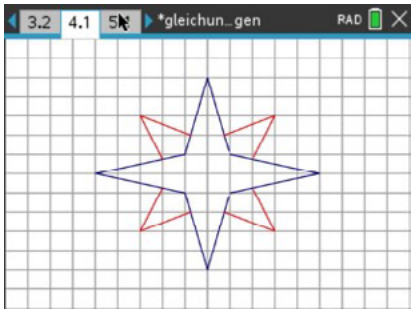
$f_7(x) =$ $f_8(x) =$

die kleinen Zacken:
$k_1(x) =$ $k_2(x) =$

$k_3(x) =$ $k_4(x) =$

$k_5(x) =$ $k_6(x) =$

$k_7(x) =$ $k_8(x) =$



LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 3

Aufgabe 1:

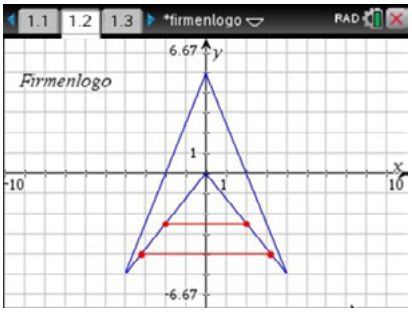
konkaves Viereck:

$f_1(x) = \frac{5}{2}x + 5 | -4 \leq x \leq 0$ $\quad f_2(x) = -\frac{5}{2}x + 5 | 0 \leq x \leq 4$

$f_3(x) = \frac{5}{4}x | -4 \leq x \leq 0$ $\quad f_4(x) = -\frac{5}{4}x | 0 \leq x \leq 4$

waagerechte Strecken:

$k_1(x) = -\frac{5}{2} | -2 \leq x \leq 2$ $\quad k_2(x) = -4 | -\frac{16}{5} \leq x \leq \frac{16}{5}$



Aufgabe 2:

Erzeuge die abgebildete Pyramide.

Grundfläche:

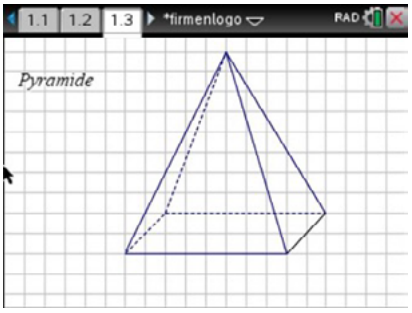
$g_1(x) = -2 | -2 \leq x \leq 6$ $\quad g_2(x) = -4 | -4 \leq x \leq 4$

$g_3(x) = x | -4 \leq x \leq -2$ $\quad g_4(x) = x - 8 | 4 \leq x \leq 6$

Seitenkanten:

$f_1(x) = 2x + 4 | -4 \leq x \leq 1$ $\quad f_2(x) = \frac{8}{3}x + \frac{10}{3} | -2 \leq x \leq 1$

$f_3(x) = -\frac{8}{5}x + \frac{38}{5} | 1 \leq x \leq 6$ $\quad f_4(x) = -\frac{10}{3}x + \frac{28}{3} | 1 \leq x \leq 4$



Aufgabe 3:

Erzeuge nebenstehenden Weihnachtsstern.

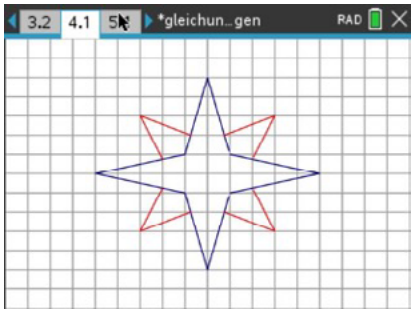
vierzackiger Stern:

$f_1(x) = 4x + 5 | -1 \leq x \leq 0$ $\quad f_2(x) = -4x + 5 | 0 \leq x \leq 1$

$f_3(x) = -4x - 5 | -1 \leq x \leq 0$ $\quad f_4(x) = 4x - 5 | 0 \leq x \leq 1$

$f_5(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} | -5 \leq x \leq -1$ $\quad f_6(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} | -5 \leq x \leq -1$

$f_7(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} | 1 \leq x \leq 5$ $\quad f_8(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} | 1 \leq x \leq 5$



die kleinen Zacken:

$k_1(x) = -\frac{9}{4}x - \frac{15}{4} | -3 \leq x \leq -2$ $\quad k_2(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{15}{9} | -3 \leq x \leq -\frac{3}{4}$

$k_3(x) = \frac{4}{9}x + \frac{15}{9} | \frac{3}{4} \leq x \leq 3$ $\quad k_4(x) = \frac{9}{4}x - \frac{15}{4} | 2 \leq x \leq 3$

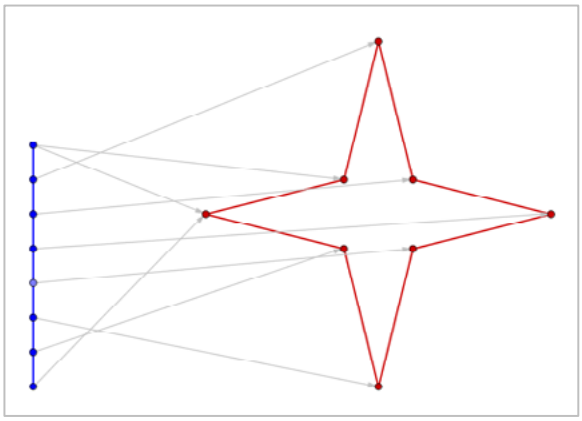
$k_5(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{15}{4} | 2 \leq x \leq 3$ $\quad k_6(x) = -\frac{4}{9}x - \frac{15}{9} | \frac{3}{4} \leq x \leq 3$

$k_7(x) = \frac{4}{9}x - \frac{15}{9} | -3 \leq x \leq -\frac{3}{4}$ $\quad k_8(x) = \frac{9}{4}x + \frac{15}{4} | -3 \leq x \leq -2$

Arbeitsblatt 4: Eine Strecke wird zum Weihnachtsstern (Vertiefung)[9]

Auf einer Strecke sind 8 Punkte festgelegt. Diese Punkte werden in die Eckpunkte eines vierzackigen Sterns "überführt".
Erzeuge anhand der Hinweise und Abbildungen eine Datei, die dieses realisiert.

Hinweise:



Die Punkte, die auf der Strecke festgelegt sind, sollen auf Geraden in die Eckpunkte des Sterns "wandern".

Dazu werden für die Punkte auf der Strecke und die Eckpunkte des Sterns Koordinaten festgelegt und diese in der Applikation ***Lists&Spreadsheet*** in jeweils zwei Listen übertragen: z.B.: $(xx1|\ yy1)$ für die Strecke und $(xx2|\ yy2)$ für den Stern.
Diese Punkte werden als Streudiagramme angezeigt.
Ein Schieberegler mit der Variablen t, einem Definitionsbereich $0 \leq t \leq 1$ und einer Schrittweite von 0.01 ermöglicht nun das "Wandern" der Punkte.

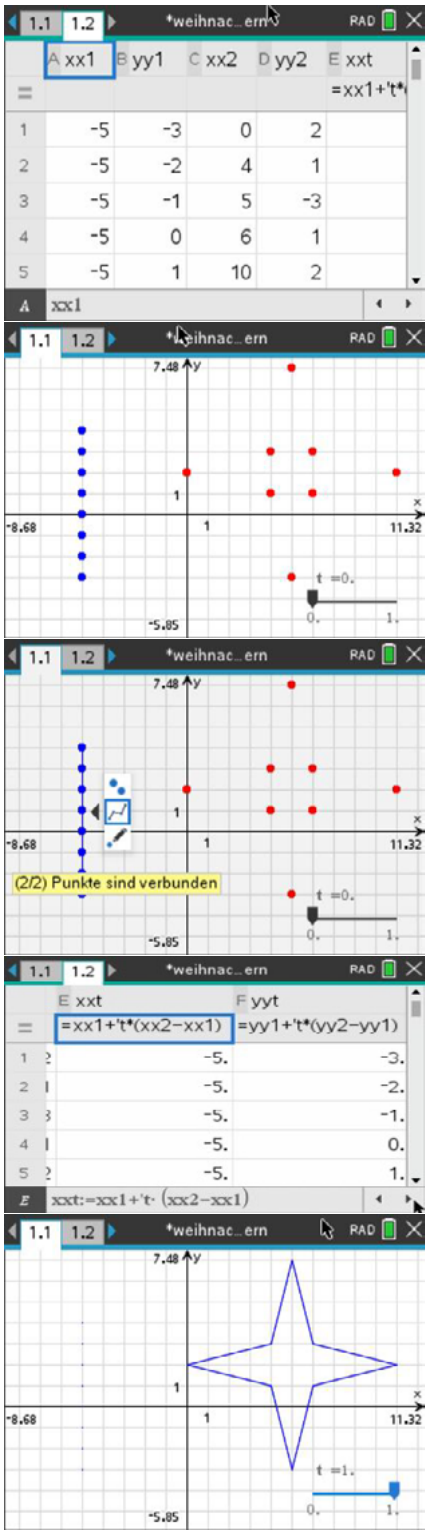
Über die Attribute der Streuplots können die Punkte verbunden und später minimiert werden.

Für die "wandernden" Punkte werden zwei weitere Listen xxt und yyt erzeugt.
Für diese Punkte gelten dann folgende Zusammenhänge:

$$xxt = xx1 + t \cdot (xx2 - xx1)$$

bzw. $$yyt = yy1 + t \cdot (yy2 - yy1)$$

Abschließend wird für diese Zuordnung einen weiteres Streudiagramm erstellt. Das Streudiagramm für den Stern wird deaktiviert.



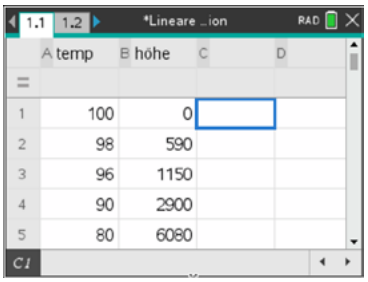
[9] Lösungen in Datei: streckezustern.tns

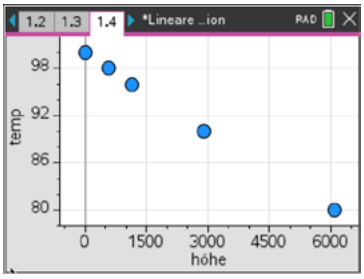
Arbeitsblatt 5: Lineare Regression

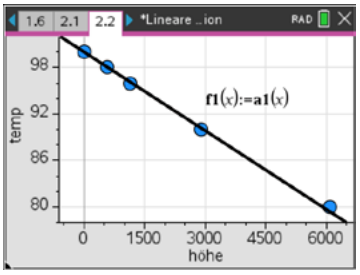
Beispiel:
Die Tabelle zeigt den Zusammenhang der Siedetemperatur des Wassers[10] mit der Meereshöhe.

Siedetemperatur in °C	100	98	96	90	80
Höhe über dem Meer in m	0	590	1150	2900	6080

Wir übertragen die Tabelle in die Anwendung *Lists&Spreadsheet* und zeichnen das zugehörige Diagramm in der Anwendung *Data&Statistics*.

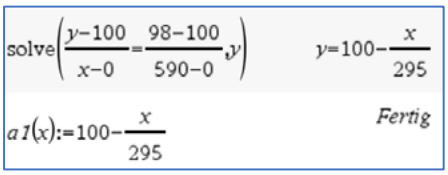




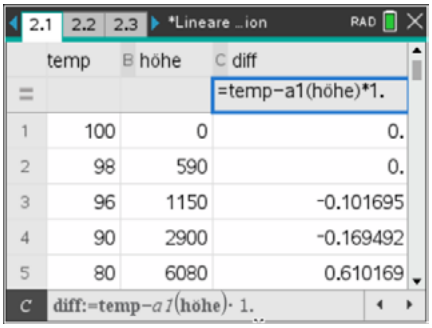


Die graphische Darstellung legt einen linearen Zusammenhang nahe.

Wir verwenden zunächst die **ersten beiden Messwertpaare**, um die Gleichung einer passenden Geraden zu finden. Wir erhalten als mathematisches Modell $a1(x) = -\frac{1}{295}x + 100$. Diese Gerade wird noch in das Diagramm eingetragen.
(menu *Analysieren-Funktion zeichnen*)



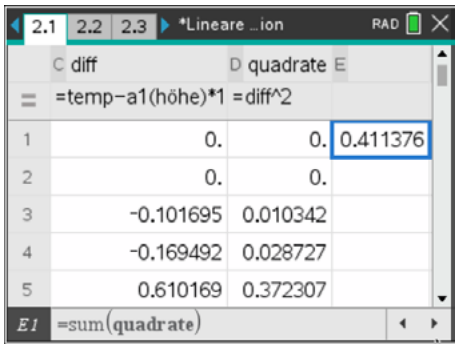
Wir berechnen, welche Abweichungen zwischen den Funktionswerten von a1 und den Messwerten der Siedetemperatur vorliegen. Dazu wird die Differenz der Funktionswerte von a1(x) und der zugehörigen Siedetemperatur gebildet. Für die ersten beiden Werte ist die Differenz null, weil aus diesen Werten die Gleichung für a1 gebildet wurde. Bei den anderen Werten gibt es geringfügige Abweichungen nach oben oder unten. Dies ist auch in der Abbildung oben rechts zu erkennen.



Um ein Maß für die Güte der Annäherung zu erhalten, wird Folgendes vereinbart:
Die Differenzen werden quadriert und die Ergebnisse werden summiert. Je kleiner diese Summe ist, desto bessere Qualität wird der Näherung zugeschrieben.

[10] https://media.gettyimages.com/photos/hot-water-tesbag-picture-id632002879?s=2048x2048

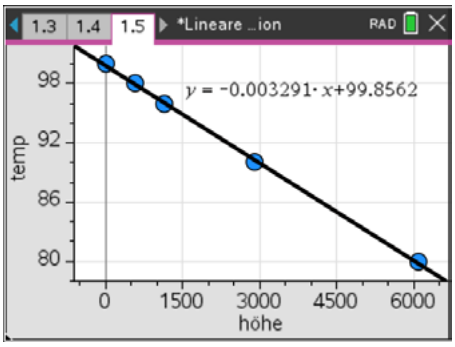
Diese **Methode der kleinsten Quadrate** geht auf Carl-Friedrich Gauß zurück.
Durch das Quadrieren der Differenzen wird das Vorzeichen der Differenz vernachlässigbar. Größere Abweichungen werden durch das Quadrieren stärker gewichtet. Je kleiner die Summe der Quadrate ist, desto weniger fallen die Abweichungen ins Gewicht.



Aufgabe 1:

Bestimmt Gleichungen von Ausgleichsgeraden z. B. mithilfe zweier anderer Messwertpaare und bestimmt jedesmal die Summe der kleinsten Quadrate. Geht arbeitsteilig vor. Man kann aus den fünf Messwertpaaren insgesamt zehnmal zwei auswählen und so zehn verschiedene Geradengleichungen ermitteln oder eine Ausgleichsgerade „nach Augenmaß“ einfügen, die keinen oder nur einen der Punkte enthält. Bei welcher Ausgleichsgeraden ist die Summe der kleinsten Quadrate am kleinsten?

Lineare Regression:



Für den CAS-Rechner ist ein Verfahren implementiert, mit dem diejenige optimale Ausgleichsgerade ermittelt wird, für die die Summe der kleinsten Quadrate ein Minimum ist. Wähle unter menu *Analysieren-Regression-Lineare Regression (y = mx + b) anzeigen*. Das Verfahren der „Lineare Regression“ beruht auf der Methode der kleinsten Quadrate. Eine ausführliche Herleitung ist an dieser Stelle nicht möglich.
Gleichung der Regressionsgeraden: y = -0,003291x + 99,8562.

Aufgabe 2:

Bestimme mit der Gleichung der Regressionsgeraden die Summe der kleinsten Quadrate. Vergleiche das Ergebnis mit den Resultaten der Aufgabe 1.

Aufgabe 3:

Ermittle mithilfe der Gleichung der Regressionsgeraden die Siedetemperatur in 4000 m Höhe über dem Meeresspiegel.
In welcher Höhe über NN könnte sich eine Expedition befinden, wenn sie eine Siedetemperatur von 85°C feststellt?

LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 5

Aufgabe 1:

$\text{solve}\left(\frac{y-100}{x-0}=\frac{96-100}{1150-0},y\right)$ $\quad y=100-\frac{2\cdot x}{575}$

$f2(x):=100-\frac{2\cdot x}{575}$ $\quad$ *Fertig*

$\text{sum}\left((f2(höhe)-temp)^2\right)$ $\quad$ 1.32779

$\text{solve}\left(\frac{y-100}{x-0}=\frac{90-100}{2900-0},y\right)$ $\quad y=100-\frac{x}{290}$

$f3(x):=100-\frac{x}{290}$ $\quad$ *Fertig*

$\text{sum}\left((f3(höhe)-temp)^2\right)$ $\quad$ 0.934602

$\text{solve}\left(\frac{y-100}{x-0}=\frac{80-100}{6080-0},y\right)$ $\quad y=100-\frac{x}{304}$

$f4(x):=100-\frac{x}{304}$ $\quad$ *Fertig*

$\text{sum}\left((f4(höhe)-temp)^2\right)$ $\quad$ 0.262725

$\text{solve}\left(\frac{y-98}{x-590}=\frac{96-98}{1150-590},y\right)$ $\quad y=\frac{2803}{28}-\frac{x}{280}$

$f5(x):=\frac{2803}{28}-\frac{x}{280}$ $\quad$ *Fertig*

$\text{sum}\left((f5(höhe)-temp)^2\right)$ $\quad$ 2.65689

$\text{solve}\left(\frac{y-98}{x-590}=\frac{90-98}{2900-590},y\right)$ $\quad y=\frac{23110}{231}-\frac{4\cdot x}{1155}$

$f6(x):=\frac{23110}{231}-\frac{4\cdot x}{1155}$ $\quad$ *Fertig*

$\text{sum}\left((f6(höhe)-temp)^2\right)$ $\quad$ 1.03169

$\text{solve}\left(\frac{y-98}{x-590}=\frac{80-98}{6080-590},y\right)$ $\quad y=\frac{6096}{61}-\frac{x}{305}$

$f7(x):=\frac{6096}{61}-\frac{x}{305}$ $\quad$ *Fertig*

$\text{sum}\left((f7(höhe)-temp)^2\right)$ $\quad$ 0.212846

$\text{solve}\left(\frac{y-96}{x-1150}=\frac{90-96}{2900-1150},y\right)$ $\quad y=\frac{3498}{35}-\frac{3\cdot x}{875}$

$f8(x):=\frac{3498}{35}-\frac{3\cdot x}{875}$ $\quad$ *Fertig*

$\text{sum}\left((f8(höhe)-temp)^2\right)$ $\quad$ 0.824816

$\text{solve}\left(\frac{y-96}{x-1150}=\frac{80-96}{6080-1150},y\right)$ $\quad y=\frac{49168}{493}-\frac{8\cdot x}{2465}$

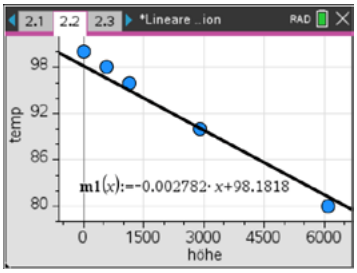
$f9(x):=\frac{49168}{493}-\frac{8\cdot x}{2465}$ $\quad$ *Fertig*

$\text{sum}\left((f9(höhe)-temp)^2\right)$ $\quad$ 0.207728

$\text{solve}\left(\frac{y-90}{x-2900}=\frac{80-90}{6080-2900},y\right)$ $\quad y=\frac{15760}{159}-\frac{x}{318}$

$f10(x):=\frac{15760}{159}-\frac{x}{318}$ $\quad$ *Fertig*

$\text{sum}\left((f10(höhe)-temp)^2\right)$ $\quad$ 1.56362



Bei den Ausgleichsgeraden durch zwei Messwertpaare ergibt sich die kleinste Summe für (6080 m; 80 °C) und (1150 m; 96 °C).
Mit menu *Analysieren-Verschiebbare Gerade hinzufügen* lassen sich Ausgleichsgeraden nach Augenmaß in die Punktemenge legen und auf analogem Wege die Summen der quadratischen Abweichungen berechnen.

Aufgabe 2:

$fr(x):=-0.003291\cdot x+99.8562$	*Fertig*
$\text{sum}\left(\left(fr(höhe)-temp\right)^2\right)$	0.154071

Diese Summe ist noch kleiner als die kleinste Summe bei Aufgabe 1.

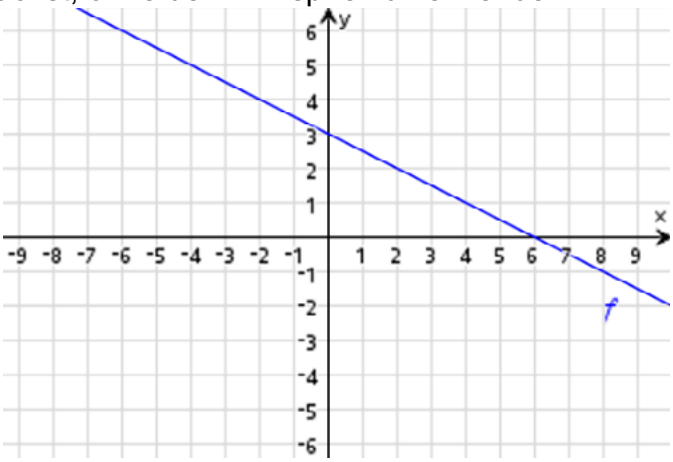
Aufgabe 3:

$fr(x):=-0.003291\cdot x+99.8562$	*Fertig*
$fr(4000)$	86.6922
$\text{solve}(fr(x)=85,x)$	$x=4514.19$

In 4000 m Höhe über NN beträgt die Siedetemperatur etwa 86,7° C.
Für eine Siedetemperatur von 85°C kommt eine Höhe über NN von etwa 4514 m in Frage.

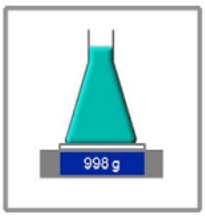
Arbeitsblatt 6: Anwendungen zu linearen Funktionen

1. In der Abbildung ist der Graph einer linearen Funktion f abgebildet.
   Löse die Teilaufgaben a, b und c zunächst, ohne den TI-Nspire zu verwenden.



a) Beurteile, ob die Punkte A(1,5; 2,2) und B(-12; 9) auf dem Graphen von f liegen.
b) Der Graph einer linearen Funktion g verläuft senkrecht zum Graphen von f und hat die Nullstelle $x_0 = -0{,}5$. Zeichne den Graphen von g ein, und gib eine Gleichung für g an.
c) Die Geraden f und g schließen mit der y-Achse eine Fläche ein. Ermittle deren Flächeninhalt.
d) Beschreibe und realisiere nun, wie du die Lösungen der Teilaufgaben 1a, 1b und 1c mit dem TI – Nspire ermitteln kannst.

2. Dichte einer Flüssigkeit ermitteln[11]
   In einem Schülerexperiment soll die Dichte einer unbekannten Flüssigkeit bestimmt werden. Dazu werden verschiedene Volumina der Flüssigkeit in dieses Glas gefüllt und die zugehörigen Massen des gefüllten Glases bestimmt.



Die Tabelle zeigt die Messergebnisse:

V in ml	20	40	60	80	100
m in g	44	60	77	92	109

Bearbeite nachfolgende Aufgaben mit deinem TI-Nspire. Dokumentiere den jeweiligen Lösungsweg.

a) Stelle die Messwerte in einem Diagramm dar. Ordne die Volumina der waagerechten Achse und die Massen der senkrechten Achse zu.
b) Zeige, dass alle aufgenommenen Messwerte näherungsweise auf ein und derselben Geraden liegen. Ermittle durch lineare Regression eine Funktionsgleichung m(V), die den Zusammenhang von Masse m und Volumen V näherungsweise beschreibt.
c) Erläutere die Bedeutung des Anstieges und des Schnittpunkts des Graphen von m(V) mit der senkrechten Achse.
d) Beurteile, ob 2,3 kg der Flüssigkeit in einen Drei-Liter-Kanister passen.

[11] https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcR9FyPK3JAthhDUx3AGAwPKYVOBe1TNPjX0YA&usqp=CAU

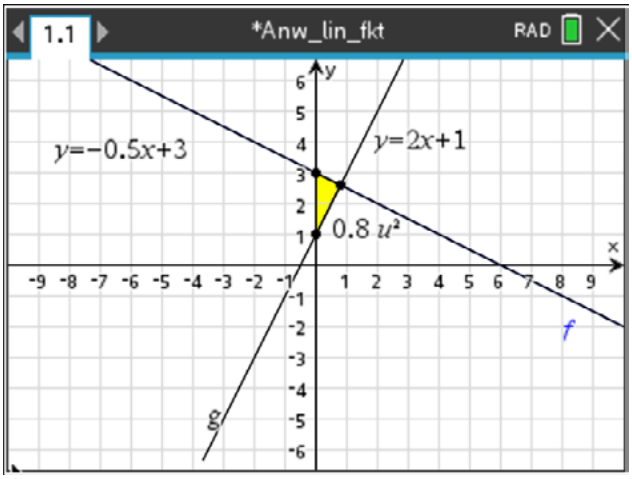
LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 6

Aufgabe 1

a) Gleichung von f: $y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
$f(1{,}5) = -0{,}75 + 3 = 2{,}25 \neq 2{,}2$,
A liegt nicht auf f
$f(-12) = 6 + 3 = 9$, B liegt auf f

b) Anstieg von g: m = 2;
Einsetzen von m = 2 und
x = 0,5 sowie y = 0 in y = mx +n
ergibt $0 = 2 \cdot 0{,}5 + n$, also n = 1.
g: y = 2x + 1

c) Schnittstelle von f und g durch
Gleichsetzen 0,5x + 3 = 2x + 1 ergibt
x = 0,8.
Flächeninhalt:
A = $\frac{1}{2} \cdot (3 - 1) \cdot 0{,}8$ = 0,8 FE



Mit dem TI-Nspire kann man z. B. so vorgehen:

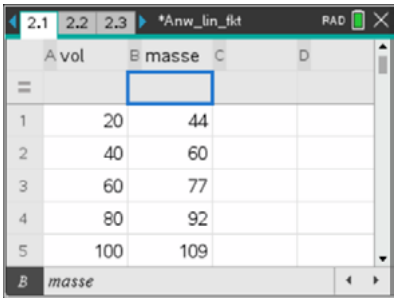
a) Man liest in der gegebenen Zeichnung die Koordinaten zweier Punkte des Graphen von f ab, z. B. P(0; 3) und Q(6; 0), trägt diese Punkte in *Graphs* ein und legt mit *Geometry-Punkte&Geraden* eine Gerade hindurch. Die Gleichung der Geraden kann man mit [ctrl] [menu] ablesen zu y=-0,5x + 3.
Die Gleichung wird als Funktion f(x) im *Calculator* gespeichert und dann überprüft man, ob die Koordinaten von A und B diese Gleichung erfüllen.

b) Mit dem Werkzeug *Geometry-Konstruktion-Senkrechte* wird die Senkrechte g zur Geraden f vom Punkt (-0,5; 0) aus eingezeichnet. Mit [ctrl] [menu] lässt man sich die Gleichung von g anzeigen.

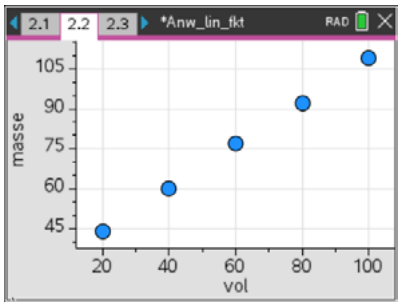
c) Mit dem Werkzeug *Geometry-Formen-Dreieck* wird das zu messende Dreieck gezeichnet. Mit dem Werkzeug *Geometry-Messung-Fläche* wird der Flächeninhalt ermittelt.

Aufgabe 2

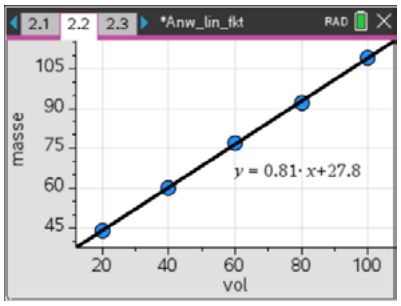
a) Die Messwerte werden in die Tabellenkalkulation *Lists&Spreadsheet* des TI – Nspire übertragen. Die Volumina werden der Variablen **vol** und die Massen der Variablen **masse** zugeordnet.



b) Die Anwendung *Data&Statistics* wird geöffnet. Der waagerechten Achse wird die Variable **vol** und der senkrechten Achse die Variable **masse** zugeordnet. Die zu den Messwerten gehörenden Punkte liegen augenscheinlich auf einer Geraden.



Mit menu *Analysieren-Regression-lineare Regression* lässt sich eine Gerade mit der Gleichung y = 0,81x + 27,8 durch die Punkte legen. Im Sachzusammenhang bedeutet das $m(V) = 0{,}81 \cdot V + 27{,}8$.



Zum Vergleich werden in der Tabellenkalkulation die zum gegebenen Volumen gehörenden Massen mit dieser Gleichung ermittelt. Es ist zu erkennen, dass sich die Messwerte von denen des mathematischen Modells (also den Funktionswerten der Gleichung m(V)) nur wenig unterscheiden.

	A vol	B masse	C
=			=0.81*vol
1	20	44	44.
2	40	60	60.2
3	60	77	76.4
4	80	92	92.6
5	100	109	108.8
C	=0.81· vol+27.8		

c) Der Anstieg der Geraden gibt die Dichte $\rho = 0{,}81\ \frac{g}{ml} = 0{,}81\ \frac{g}{cm^3}$ der unbekannten Flüssigkeit an. Der Durchgang durch die senkrechte Achse muss die Eigenmasse des Glases sein, denn das eingefüllte Volumen hat dort den Wert V = 0 ml.
Das Glas hat demzufolge eine Eigenmasse von 27,8 g.

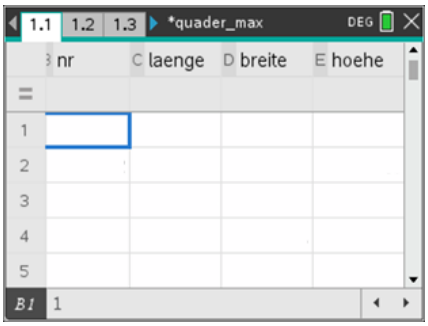
d) 2,3 kg der Flüssigkeit haben ein Volumen V von $V = \frac{m}{\rho} = \frac{2300\ g}{0{,}81\ \frac{g}{ml}} \approx 2840\ ml$.

Das sind weniger als drei Liter, der Kanister kann verwendet werden.

Arbeitsblatt 7: Eine oben offene Kiste (Extremwertaufgabe)

Bastle eine nach oben offene Kiste aus einem A4-Blatt mit möglichst großem Volumen.

1. Falte aus einem A4-Blatt eine oben offene Kiste wie im Bild.
   Entfalte das Blatt Papier wieder und zeichne alle Höhen der Kiste mit einem Rotstift nach.
   Leite die Gleichung für das Volumen einer aus einem A4-Blatt gefalteten Kiste in Abhängigkeit von der Kistenhöhe x (in cm) her.
2. Stelle diese Zuordnung graphisch dar und bestimme die Maße der maximalen Kiste.



3. Erfasse möglichst von vielen gebastelten Kisten aus der Klasse die Maße. (Oder bastle selbst mehrere verschieden hohe Kisten.)
   Gib alle Werte in eine Tabelle ein, berechne das Volumen jeder Kiste und stelle das Volumen in Abhängigkeit von der Höhe in einem Diagramm dar.

4. Bestimme mit Hilfe einer Regression eine Funktion des Kistenvolumens in Abhängigkeit von der Kistenhöhe.

5. Ergänze die Liste der Kisten um zwei Extremfälle:
   i. Eine Kiste ohne Höhe (das Blatt bleibt ungefaltet)
      breite = 21, laenge = 29,7, hoehe = 0
   ii. Eine Kiste mit größter Höhe
      breite = 0, laenge = 8,7, hoehe = 10,5

   Bestimme erneut durch eine geeignete Regression eine Funktion für das Volumen in Abhängigkeit von der Höhe.

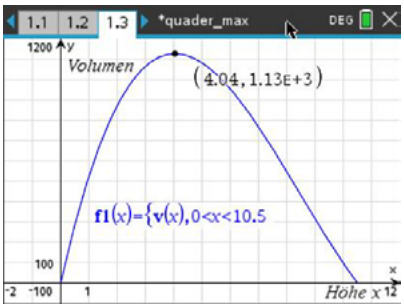
6. Vergleiche die Funktionen aus den Regressionen und der Herleitung von Aufgabe 1 miteinander und bestimme die Kistengrößen.
   Vergleiche das Volumen dieser Kisten.

LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 7:

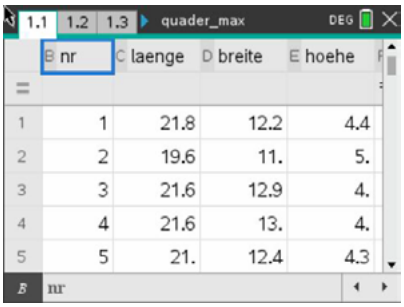
1. $V(x) = \mathrm{x} \cdot (21 - 2\mathrm{x}) \cdot (29{,}7 - 2\mathrm{x})$

2. Aus der graphischen Darstellung erhält man x ≈ 4 und damit ergibt sich:

   Höhe: 4,0 cm Breite: 13,0 cm Länge: 21,7 cm
   (Diese Näherungswerte sind für eine praktische Fragestellung ausreichend.)

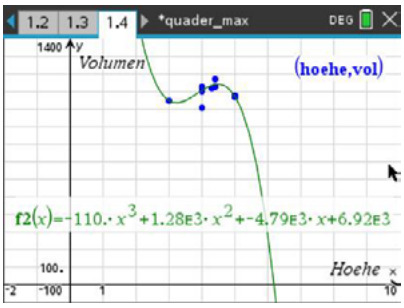


3. Die Messwerte der Schüler werden in der Tabelle zusammengetragen. Die in der Tabelle berechneten Volumina werden im Diagramm in Abhängigkeit von der Höhe dargestellt.

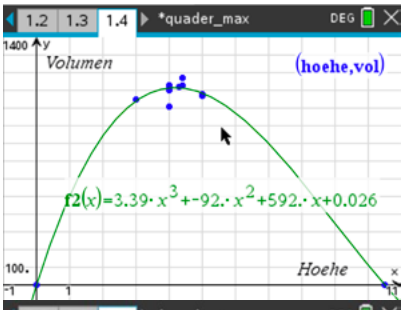


	B nr	C laenge	D breite	E hoehe
1	1	21.8	12.2	4.4
2	2	19.6	11.	5.
3	3	21.6	12.9	4.
4	4	21.6	13.	4.
5	5	21.	12.4	4.3

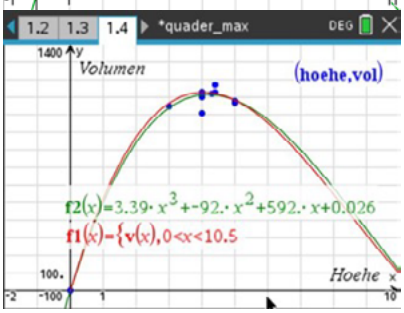
4. Da es sich um ein Volumen handelt, ist es sinnvoll, eine Funktion 3. Grades anzusetzen (kubische Regression). Das Resultat f2(x) zeigt das Ergebnis für unsere Messwerte. Es ist jedoch kein besonders gutes mathematisches Modell für die Problemstellung, da die gebauten Kisten alle ähnliche Abmaße haben.



5. Die erneute Berechnung mit den beiden zusätzlichen Werten (h = 0 und h = 10,5) bringt die veränderte Funktion f2(x), die den Sachverhalt sehr gut beschreibt.



6. Den maximalen Quader erhält man durch Ablesen der Hochpunkte von f1 und f2 im Grafikfenster.
   Für die Herleitung (f1(x)) ergibt sich:
   h = 4,04 cm, b = 12,92 cm, l = 21,62 cm
   V = 1128,49 cm^3
   und für die Regression (f2(x)):
   h = 4,19 cm, b = 12,62 cm, l = 21,32 cm
   V = 1115,4 cm^3
   Die Unterschiede sind gering. Näherungsweise führt jede Methode zum Ziel. Bei Aufgabe 4 ergeben sich die größten Abweichungen vom eigentlichen Maximalvolumen. Da die Graphen in der Umgebung von 4.04 sehr flach sind, sind die Unterschiede der berechneten Volumina trotzdem sehr gering.



Technische Hinweise für Lehrkräfte (Lineare Gleichungssysteme)

Für Problemstellungen, die auf das Lösen von Gleichungssystemen führen, lassen sich die im Katalog vordefinierten Symbole verwenden.

Hinweise
Man nutzt den solve-Befehl und das entsprechende Symbol aus dem Katalog.

Gegeben sind Gleichungssysteme, die genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen besitzen.
Die Menge der gesuchten Variablen wird in geschweiften Klammern eingegeben.
(Es funktioniert aber auch ohne geschweifte Klammern.)

Wird keine Lösung gefunden, gibt der TI-Nspire "false" aus.
Die Wahrheitswerte für Aussagen sind "true" bzw. "false".

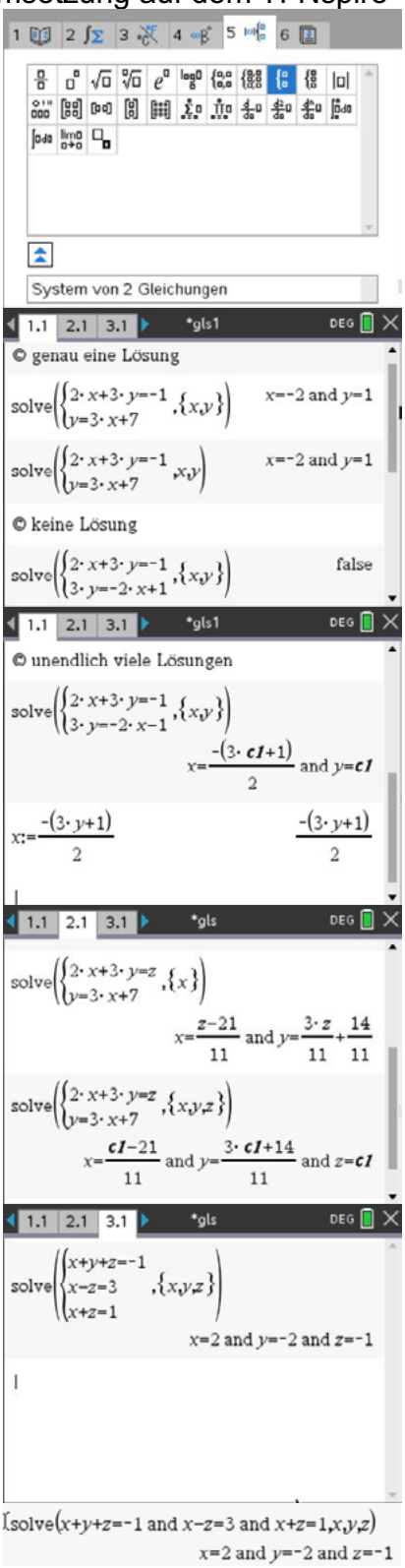
Hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, wird eine Lösung durch einen Parameter, hier ***c1***, beschrieben. Dabei gilt $c1 \in \mathbb{Q}$.
Nach dem Einsetzen erhält man die Lösung für x in Abhängigkeit von y.

Bemerkung:
Der TI-Nspire nummeriert den Parameter beginnend bei ***c1*** fortlaufend bis ***c99.***

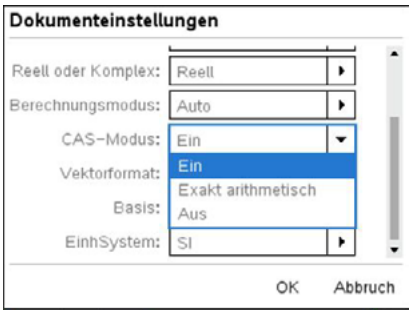
Bemerkung:
Die Ausgabe entsprechender Lösungen ist auch von der Eingabe der zu bestimmenden Variablen abhängig (siehe nebenstehende Ausgabe).

Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen lassen sich über das entsprechende Symbol aus dem Katalog ebenfalls bearbeiten.
Hinweis: Man kann ein Gleichungssystem auch lösen, indem man die Gleichungen durch den logischen Operator „and“ voneinander trennt und die Lösungsvariablen, durch ein Komma getrennt, anfügt.

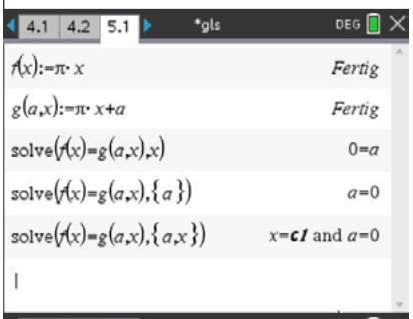
Umsetzung auf dem TI-Nspire



Der Vorteil gegenüber einem GTR ist, dass CAS symbolisch rechnen.
Deshalb sollte in den Systemeinstellungen auch der CAS-Modus "Ein" ausgewählt werden.

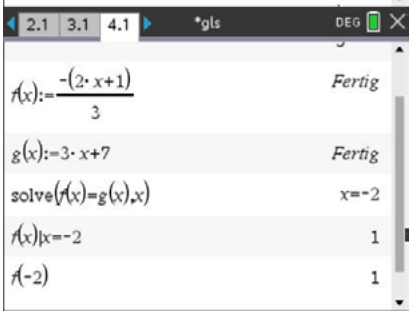


Bemerkung:
Zu beachten ist, dass je nach Angabe der ausgewählten Lösungsvariablen unterschiedliche Ergebnisse angezeigt werden.

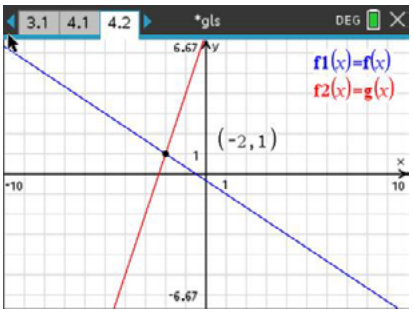


Eine größere Rolle im Unterricht spielt das Visualisieren der Lösungen von Systemen linearer Gleichungen.

Im Beispiel ist das System zweier Gleichungen
I $2 \cdot x + 3 \cdot y = -1$
II $y = 3 \cdot x + 7$
gegeben.



Formal wird die Gleichung I nach y aufgelöst und als Funktion f gespeichert.
Die Gleichung II wird als Funktion g gespeichert.
Ein Gleichsetzen von f und g liefert die Schnittstelle x.
Das Einsetzen (hier sind zwei Möglichkeiten angegeben) liefert den zugehörigen Funktionswert.



In der Applikation ***Graphs*** ist eine Visualisierung und über
menu – *Graph analysieren – Schnittpunkt*
die Angabe der Koordinaten des Schnittpunktes möglich.

Bemerkungen:
Das vorgestellte Beispiel dient nur dem exemplarischen Beschreiben eines möglichen Vorgehens. Im Unterricht wird man solche Gleichungen händisch umformen lassen. Das Gleichungssystem gehört zu denen, die auch ohne Hilfsmittel gelöst werden sollten.

Arbeitsblatt 8: Lineare Gleichungssysteme mit CAS lösen

Beispiel:

In einer Gaststätte gibt es Vierer- und Zweiertische. Eine Reisegruppe von 42 Personen nimmt an insgesamt 12 Tischen Platz. Ermittle, wie viele Vierer- und Zweiertische darunter sind.

[12]

Lösung:

Es sei x die Anzahl der Vierertische und y die Anzahl der Zweiertische. Dem Aufgabentext kann man folgende Bedingungen entnehmen:

(1) x + y = 12 (Anzahl der Tische) (2) 4x + 2y = 42 (Anzahl der Personen)

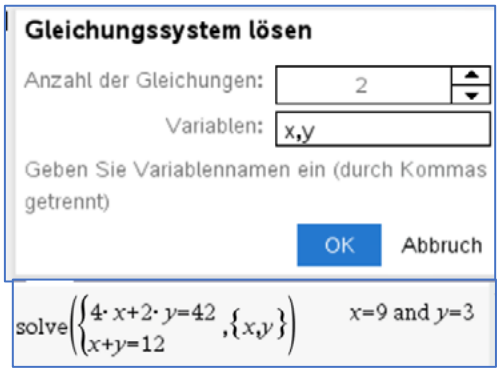
Für die Lösung des Gleichungssystems wird der CAS-Rechner genutzt.

1. Schritt: menu *Algebra Gleichungssystem lösen – Gleichungssystem lösen* wählen.

   Anzahl der Gleichungen und Variablen angeben. OK drücken.
2. Schritt: In die Vorlage die Gleichungen eingeben. enter drücken.
3. Schritt: Lösungen ablesen und interpretieren.

   $\mathcal{L} \approx \{(9; 3)\}$

   Die 42 Personen belegen neun Vierer- und drei Zweiertische.



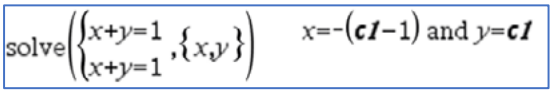
Aufgaben:

1. Löse die Gleichungssysteme mit deinem CAS-Rechner. Runde die Ergebnisse bei Bedarf auf zwei Nachkommastellen.

   a) $\begin{matrix} 2{,}1x + 3{,}2y = 6{,}7 \\ x - 1{,}7y = -1{,}3 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} 2 \cdot (x - 7) = -3y \\ \frac{4}{5} \cdot (y + 3x) = \frac{5}{8} \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} 3 \cdot (2r + 5s) = 6 \cdot (s - 2r) + 3 \\ -5 \cdot (s - 7r) = 11 \cdot (r + s - 2) \end{matrix}$

2. Begründe, zunächst ohne den CAS-Rechner zu verwenden, weshalb das Gleichungssystem $\begin{matrix} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{matrix}$ keine Lösung besitzt. Ermittle dann die Lösungsmenge mit deinem CAS-Rechner. Beschreibe, woran du an der Rechneranzeige erkennen kannst, dass es sich um ein nicht lösbares System handelt.

Bekanntlich besitzt das Gleichungssystem $\begin{matrix} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix}$ unendlich viele Lösungen. Ermittelt man die Lösungsmenge mit dem CAS-Rechner, so erhält man die nebenstehende Anzeige.



[12] https://media.gettyimages.com/photos/greek-tavern-in-greek-islandgreece-picture-id1187291494?k=6&m=1187291494&s=612x612&w=0&h=I9PwsM__TD-7O_e_T0tLHXUbO34fwraeetfOr3Ohm8I=

Interpretation: „Für y kann man eine beliebige rationale Zahl einsetzen. Die zu diesem y-Wert zugehörige Zahl x ergibt sich aus dem für x angegebenen Term durch Einsetzen des y-Wertes.“ Man nennt ***c1*** eine „Zählvariable“.

3. Verwende die obige Rechneranzeige, um fünf Zahlenpaare (x; y) anzugeben, die das obige Gleichungssytem erfüllen.

4. Ermittle die Lösungsmengen der Gleichungssysteme.

   a) $\begin{array}{c} 2y - 40 = x \\ -6y + 120 = -3x \end{array}$ b) $\begin{array}{c} 2u = t - 2 \\ -14u + 7t - 28 = 0 \end{array}$ c) $\begin{array}{c} z - x + 2y = 4 \\ 3y + 2z - 7 = 4x \\ 4y + 3z - 7x = 10 \end{array}$

5. Begründe: Die Suche nach der Lösungsmenge des Gleichungssystems $\begin{array}{c} x + y = 3 \\ -2x + y = 5 \end{array}$ lässt sich auch interpretieren als die Suche nach dem Schnittpunkt der Graphen der linearen Funktionen $f(x) = -x + 3$ und $g(x) = 2x + 5$.
   Ermittle auf beiden Wegen das Zahlenpaar, das als Lösung des Gleichungssystems bzw. als Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen von f und g in Frage kommt.

6. Gegeben ist die Gleichung 2x – y = 1. Gib eine zweite Gleichung an, sodass das System aus beiden Gleichungen
   a) keine Lösung hat,
   b) unendlich viele Lösungen besitzt.

   Erläutere, was dies für die gegenseitige Lage der linearen Funktionen f und g bedeutet, deren Gleichungen man aus den Gleichungen des Systems gewinnen kann.

7. Ermittle die Lösungsmengen der Gleichungssysteme
   $\begin{array}{c} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array}$ und $\begin{array}{c} 2x - y = 3 \\ 2x - 0{,}999y = 1 \end{array}$.
   Erkläre, woran es liegt, dass die beiden Gleichungssysteme, die sich nur um ein Tausendstel in einem Koeffizienten unterscheiden, derart unterschiedliche Lösungsmengen besitzen.

8. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\begin{array}{c} x + 2ay = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{array}$ mit dem Parameter a, der für eine beliebige rationale Zahl $(a \neq 0)$ steht.
   a) Untersuche, welchen Einfluss der Parameter a auf die Lösungsmenge des Gleichungssystems hat.
   b) Interpretiere das Ergebnis grafisch.

LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 8:

Aufgabe 1:

a)

$$\text{solve}\left(\begin{cases}2.1\cdot x+3.2\cdot y=6.7\\ x-1.7\cdot y=-1.3\end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$x=1.06795 \text{ and } y=1.39291$$

$$\mathcal{L} \approx \{(1{,}07;\,1{,}39)\}$$

b)

$$\text{solve}\left(\begin{cases}2\cdot(x-7)=-3\cdot y\\ \frac{4}{5}\cdot(y+3\cdot x)=\frac{5}{8}\end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$x=\frac{-373}{224} \text{ and } y=\frac{647}{112}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}2\cdot(x-7)=-3\cdot y\\ \frac{4}{5}\cdot(y+3\cdot x)=\frac{5}{8}\end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$x=-1.66518 \text{ and } y=5.77679$$

$$\mathcal{L}=\left\{\left(-\frac{373}{224};\frac{647}{112}\right)\right\} \approx \{(-1{,}67;\,5{,}78)\}$$

c)

$$\text{solve}\left(\begin{cases}3\cdot(2\cdot r+5\cdot s)=6\cdot(s-2\cdot r)+3\\ -5\cdot(s-7\cdot r)=11\cdot(r+s-2)\end{cases},\{r,s\}\right)$$

$$r=\frac{-25}{84} \text{ and } s=\frac{13}{14}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}3\cdot(2\cdot r+5\cdot s)=6\cdot(s-2\cdot r)+3\\ -5\cdot(s-7\cdot r)=11\cdot(r+s-2)\end{cases},\{r,s\}\right)$$

$$r=-0.297619 \text{ and } s=0.928571$$

$$\mathcal{L}=\left\{\left(-\frac{25}{84};\frac{13}{14}\right)\right\} \approx \{(-0{,}30;\,0{,}93)\}$$

Aufgabe 2:

Das Gleichungssystem $\begin{matrix} x+y=1 \\ x+y=2 \end{matrix}$ ist nicht lösbar, weil die Summe ein und derselben zwei Zahlen nicht gleichzeitig 1 und 2 sein kann.

CAS-Anzeige:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}, \{x,y\}\right) \qquad \text{false}$$

Wenn der CAS-Rechner nach dem Lösen eines Gleichungssystems die Anzeige „false“ („falsch“) zurückgibt, dann ist das Gleichungssystem nicht lösbar.
(Die Lösungsmenge ist die leere Menge.)

Aufgabe 3:

Fünf Lösungspaare zu $\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}, \{x,y\}\right) \qquad x=-(\boldsymbol{c1}-1) \text{ and } y=\boldsymbol{c1}$

x	1	0	-1	2	-99
y	0	1	2	-1	100

Aufgabe 4:

a) $$\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot y-40=x \\ -6\cdot y+120=-3\cdot x \end{cases}, \{x,y\}\right) \qquad x=2\cdot(\boldsymbol{c1}-20) \text{ and } y=\boldsymbol{c1}$$

b) $$\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot u=t-2 \\ -14\cdot u+7\cdot t-28=0 \end{cases}, \{t,u\}\right) \qquad \text{false}$$

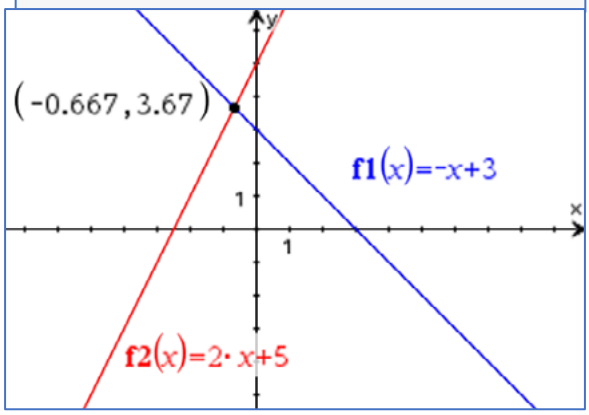
c) $$\text{solve}\left(\begin{cases} z-x+2\cdot y=4 \\ 3\cdot y+2\cdot z-7=4\cdot x \\ 4\cdot y+3\cdot z-7\cdot x=10 \end{cases}, \{x,y,z\}\right) \qquad x=\frac{\boldsymbol{c2}-2}{5} \text{ and } y=\frac{-(2\cdot \boldsymbol{c2}-9)}{5} \text{ and } z=\boldsymbol{c2}$$

Aufgabe 5:

Rechnerische Lösung:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} x+y=3 \\ -2\cdot x+y=5 \end{cases}, \{x,y\}\right) \qquad x=\frac{-2}{3} \text{ and } y=\frac{11}{3}$$

Grafische Lösung:

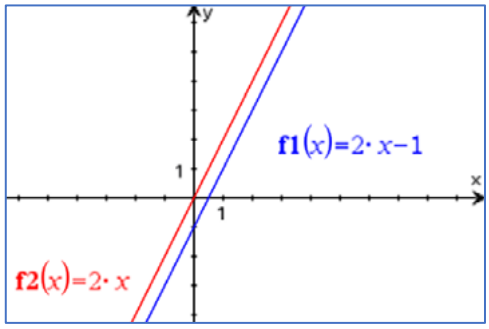


Aufgabe 6:

a) Keine Lösung hat z. B. das Gleichungssystem $\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{matrix}$.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot x-y=1 \\ 2\cdot x-y=0 \end{cases}, \{x,y\}\right) \qquad \text{false}$$

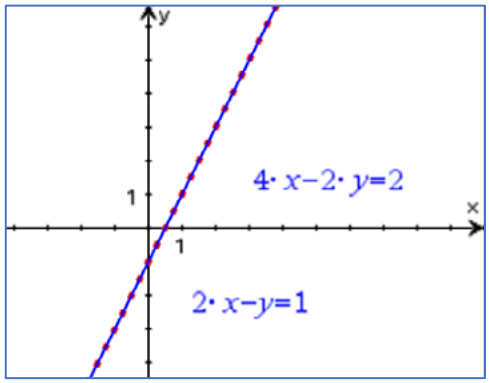
Die zugehörigen Geraden sind parallel zueinander.



b) Unendliche viele Lösungen hat z. B. das Gleichungssystem $\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{matrix}$.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot x-y=1 \\ 4\cdot x-2\cdot y=2 \end{cases}, \{x,y\}\right) \qquad x=\frac{c3+1}{2} \text{ and } y=c3$$

Die zugehörigen Geraden sind identisch.



Aufgabe 7:

$\begin{matrix} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} 2x - y = 3 \\ 2x - 0{,}999y = 1 \end{matrix}$.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot x - y = 3 \\ 2\cdot x - y = 1 \end{cases}, \{x, y\}\right) \qquad \text{false}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 2\cdot x - y = 3 \\ 2\cdot x - 0.999\cdot y = 1 \end{cases}, \{x, y\}\right)$$

$$x = -998.5 \text{ and } y = -2000.$$

Das erste Gleichungssystem repräsentiert zwei lineare Funktionen, deren Graphen zueinander parallel sind und demzufolge keinen Schnittpunkt haben.

Das zweite Gleichungssystem repräsentiert zwei lineare Funktionen, deren Graphen nicht parallel zueinander sind. Die lineare Funktion y = 2x – 3 hat den Anstieg m = 2. Die zweite Gleichung ergibt, nach y umgestellt, die lineare Funktion $y = \frac{2000}{999}x - \frac{1000}{999} \approx 2{,}002x - 1{,}001$. Der Anstieg dieser Funktion unterscheidet sich also minimal von dem der ersten Funktion. Deshalb sind die zugehörigen Geraden nicht parallel zueinander. Weil aber der Anstieg nur wenig differiert, schneiden sich die Geraden „weit draußen“ im Punkt S(-998,5; -2000).

Aufgabe 8:

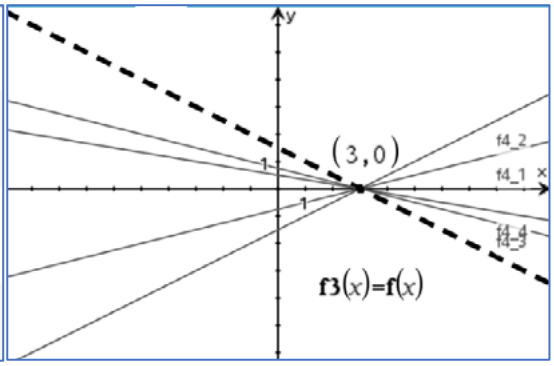
a) Einfluss des Parameters a auf die Lösungsmenge von $\begin{matrix} x + 2ay = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{matrix}$:

$\text{solve}\left(\begin{cases} x+2\cdot a\cdot y=3 \\ 3\cdot x+6\cdot y=9 \end{cases}, \{x,y\}\right)$	$x=3$ and $y=0$

Der Parameter a beeinflusst die Lösungsmenge nicht.

b) Grafische Interpretation: Beide Gleichungen werden nach y umgestellt, um die Graphen von zugehörigen linearen Funktionen darzustellen.

$\text{solve}(3\cdot x+6\cdot y=9,y)$	$y=\frac{-(x-3)}{2}$
$f(x):=\frac{-(x-3)}{2}$	*Fertig*
$\text{solve}(x+2\cdot a\cdot y=3,y)$	$y=\frac{-(x-3)}{2\cdot a}$
$g(a,x):=\frac{-(x-3)}{2\cdot a}$	*Fertig*

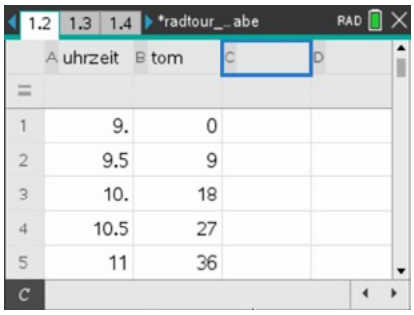


Die Graphen der vom Parameter a abhängigen Funktionen bilden ein Geradenbüschel mit dem gemeinsamen Punkt P(3; 0). Wenn x = 3 ist, dann wird der zugehörige Funktionsterm $\frac{3-x}{2a}$ für alle Werte von a (außer von a = 0) den Wert null annehmen, und zwar unabhängig von a.
Durch den Punkt P verläuft auch die zur ersten Gleichung gehörende Gerade.

Arbeitsblatt 9: Lineare Gleichungssysteme (Radtour)

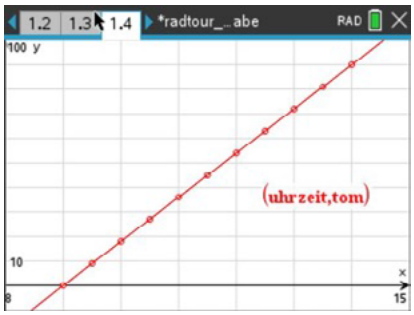
Tom startet um 9.00 Uhr zu einer Radtour von ADorf ins entfernte BDorf. Er fährt mit konstanter Geschwindigkeit und schafft in einer halben Stunde 9 km.
Eine halbe Stunde nachdem Tom losgefahren ist, fährt Anne mit ihrem Rennrad los, um Tom einzuholen und ihm seine Geldbörse zu übergeben. Sie beeilt sich und schafft im Schnitt 24 km pro Stunde.
Wo könnten sich die beiden treffen und nach welcher Zeit?
Nutze bei der Bearbeitung die angegeben Hilfen.

Erstelle für den Sachverhalt eine zugehörige Wertetabelle und ergänze die Spalte für Anne.
Lies den Zeitpunkt des Treffens ab.



Stelle den Zusammenhang
Uhrzeit ⟼ zurückgelegter Weg
für Tom und Anne graphisch dar.

Ermittle aus der graphischen Darstellung den Zeitpunkt des Einholens und den bis dahin zurückgelegten Weg.



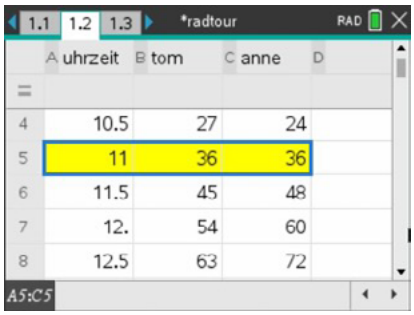
Berechne den Zeitpunkt des Einholens und den bis dahin zurückgelegten Weg.

Einen Tag später: Tom und Anne fahren wie gehabt los.
Aber diesmal plant Tom nach 27 km eine Pause von einer halben Stunde in einem Gartenrestaurant am See ein. Nach der Pause fährt Tom mit 18 km pro Stunde weiter.
Anne kann diesmal ihr Tempo nur eine halbe Stunde durchhalten und reduziert dann ihre Geschwindigkeit auf 12 km pro Stunde.

- Erzeuge eine neue Datei mit den geänderten Daten.
- Erstelle eine neue Funktionsvorschrift für Tom und Anne.
- Wo treffen sich die beiden nun?

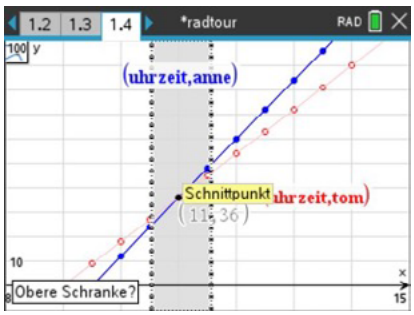
LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 9[13]:

Wertetabelle

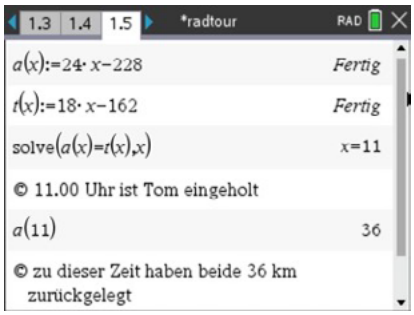


Zusammenhang
Uhrzeit ⟼ zurückgelegter Weg
für Tom und Anne.

Der Schnittpunkt wird graphisch bestimmt.
Zeitpunkt: 11 Uhr
Zurückgelegter Weg: 36 Km

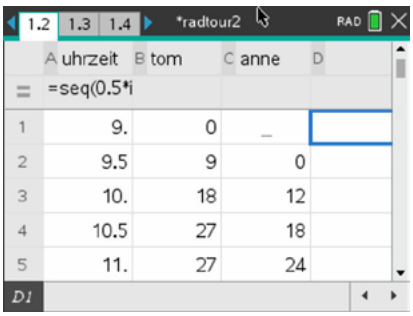


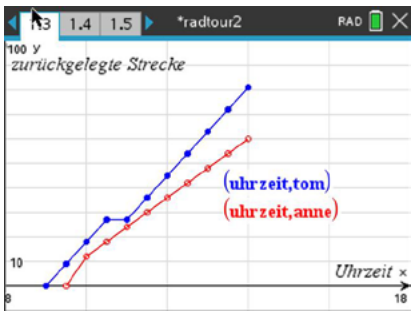
Berechnung des Zeitpunktes des Einholens und des bis dahin zurückgelegten Weges.



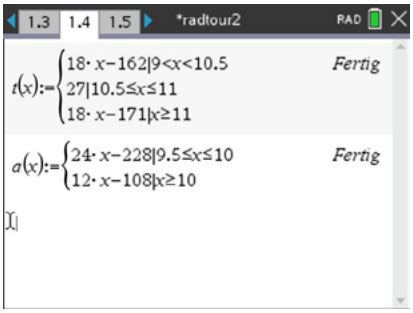
Einen Tag später:

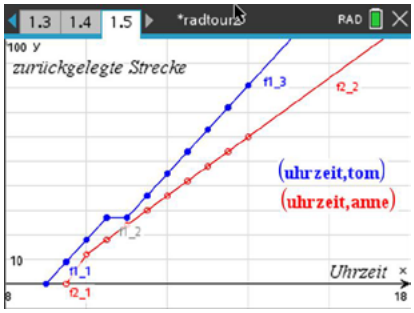
Darstellung mittels Streudiagramm





Verwendung abschnittsweise definierter linearer und konstanter Funktionen Tom und Anne treffen sich erst in BDorf.





[13] Lösungen in Datei: radtour1.tns

Arbeitsblatt 10: Eine Piratengeschichte[14]

Aus dem sicheren Hafen sticht an einem nebligen Novembertag ein Patrouillenboot in See, um Piraten aufzustöbern.
Die Voraussetzungen sind denkbar schlecht, denn die Sichtweite beträgt nur 0,5 km.
Dennoch befiehlt der Kommandant die Ausfahrt und das Boot legt in der ersten Stunde eine Strecke von 20 km in Richtung Nordost zurück.
Zur gleichen Zeit fährt ein Piratenschiff in Richtung Südost.
Als das Patrouillenboot den Hafen verlässt, befindet sich das Piratenschiff 8 km in nördlicher und 2 km in östlicher Richtung vom Hafen entfernt und legt in einer Stunde 15 km zurück.
Können die Piraten entkommen?

Aufgabe

Veranschauliche unter Nutzung der Tipps und graphischen Darstellungen den Sachverhalt in der Applikation ***Graphs***.

Tipps:
Ermittle jeweils für die x und y - Koordinate der Boote eine Gleichung in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit und stelle die Punkte in einem Streudiagramm dar.

Verknüpfe die Variable für die vergangene Zeit mit einem Schieberegler.

Die Sichtweite des Patrouillenbootes kann durch einen Kreis (hier gelb gefärbt) veranschaulicht werden.
Dazu erstellt man über menu – *Aktionen – Text*

den Text $r = 0.5$.

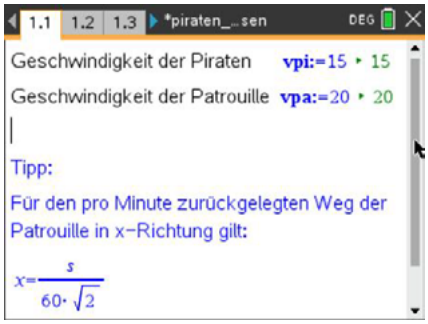
Über menu – *Geometry – Konstruktion – Zirkel*
zeichnet man einen Kreis um den Punkt (Patrouillenboot) und klickt auf den Text $r = 0.5$.

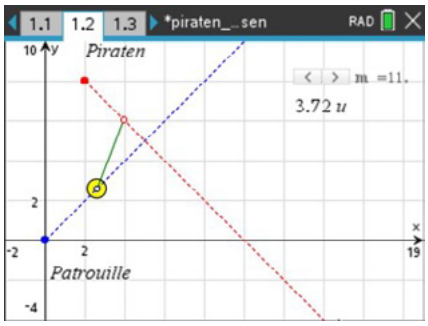
Veranschauliche den jeweils aktuellen Abstand in einer Zuordnung: ***vergangene Zeit*** $\longmapsto$ ***aktueller Abstand***

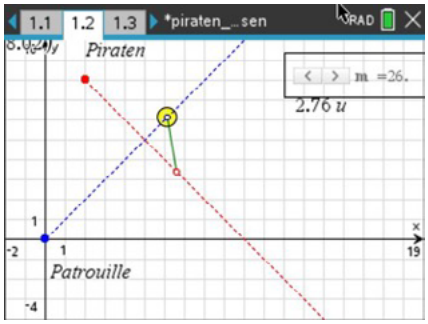
Experimentiere mit verschiedenen Geschwindigkeiten für das Patrouillenboot.

Welche Sichtweite müsste an diesem Tag möglich sein, damit die Piraten entdeckt werden?

Umsetzung







[14] aus: Computer, Internet & Co. Im Mathematikunterricht. Cornelsen: Berlin, S. 85 ff

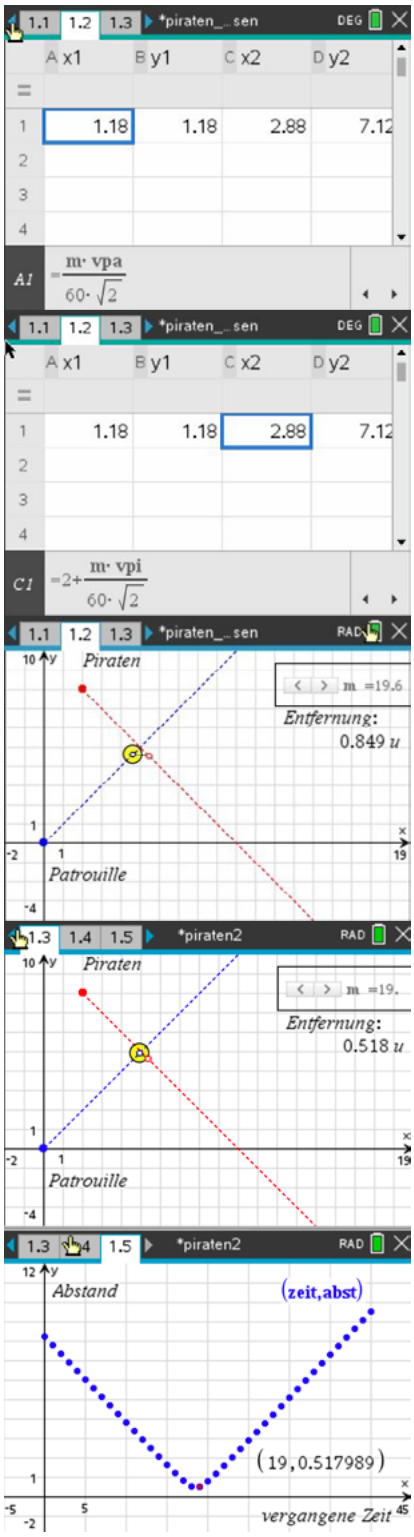
LB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 10[15]

Punktkoordinaten in der Tabellenkalkulation in Abhängigkeit vom Schieberegler m definieren

Patrouille: $x_1 = \frac{m}{60 \cdot \sqrt{2}} \cdot v_{Patrouille}$ $\quad y_1 = \frac{m}{60 \cdot \sqrt{2}} \cdot v_{Patrouille}$

Piraten: $x_2 = 2 + \frac{m}{60 \cdot \sqrt{2}} \cdot v_{Piraten}$ $\quad y_2 = 8 - \frac{m}{60 \cdot \sqrt{2}} \cdot v_{Piraten}$

m … Variable des Schiebereglers
v in $\frac{km}{h}$



Darstellungen als Streudiagramm: $s1 \begin{cases} x \leftarrow x1 \\ y \leftarrow y1 \end{cases}$

$s2 \begin{cases} x \leftarrow x2 \\ y \leftarrow y2 \end{cases}$

Abstand-Zeit im Streudiagramm $s3 \begin{cases} x \leftarrow zeit \\ y \leftarrow abst \end{cases}$

(Vgl. Definition der Variablen Zeit und abst in der Datei piraten.tns)

Experimente mit verschiedenen Geschwindigkeiten für das Patrouillenboot ergeben, dass z. B. bei einer Geschwindigkeit des Patrouillenbootes von $22\ \frac{km}{h}$ das Piratenboot entdeckt wird (es existieren noch andere mögliche Geschwindigkeiten).

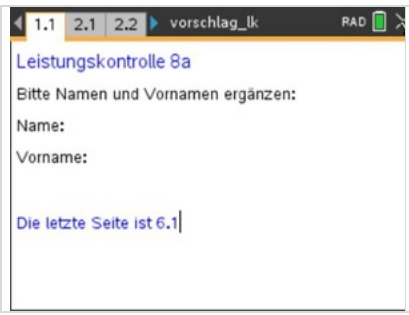
Der Funktionswert des tiefsten Punktes liefert dann ca. 518 m als kleinsten Abstand.
Also wird das Piratenboot bei einer Sichtweite von etwa 500 m entdeckt.
(Eine Berechnung wird hier nicht gefordert.)

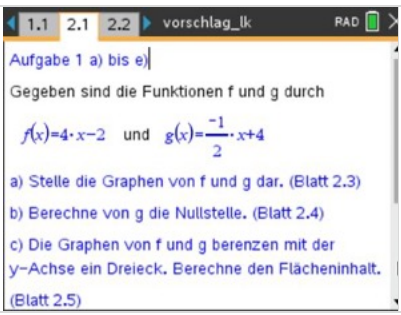
[15] Lösungen in Datei: piraten.tns

Leistungskontrolle "papierlos"

Mittels CAS kann zu den bisherigen Leistungskontrollen auch eine "papierlose" Leistungskontrolle geschrieben werden. Die Datei wird vom Lehrer vorbereitet und am Anfang der Stunde auf die Schülerrechner verteilt. Am Ende kann die vom Schüler bearbeitete Datei vom Lehrer eingesammelt und bewertet werden.
Allerdings sollte so ein Vorgehen vor der ersten "scharfen" LK geübt werden.

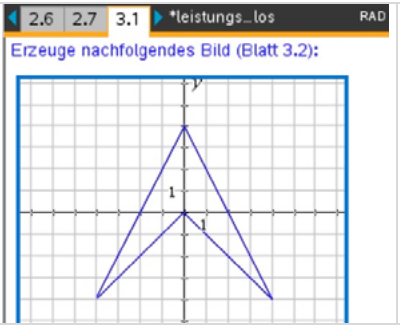
Hier ein Vorschlag für solch eine Leistungskontrolle.
In der Datei werden die Applikationen ***Notes, Graphs und Calculator*** und für einzelne Fragen das Untermenü ***Einfügen – Questions*** verwendet.
In unserem Vorschlag wird auf der ersten Seite der Name eingegeben.
Anschließend folgt die erste Aufgabe, die in nachfolgenden Applikationen bearbeitet wird.

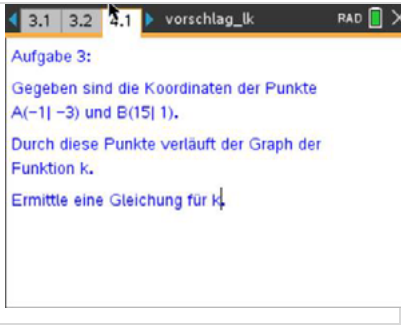




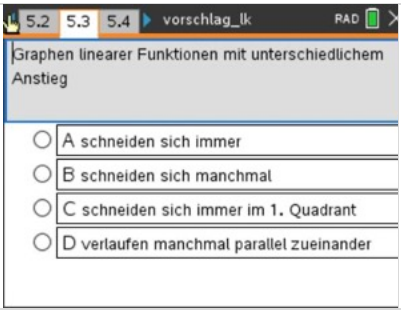
Ein vorgegebenes Bild soll vom Schüler erzeugt werden.

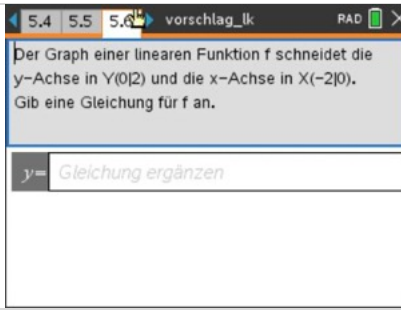
Eine weitere Aufgabe soll bearbeitet werden.





Die ***CAS-Software*** bietet die Möglichkeit Fragen oder Aussagen zu formulieren und verschiedene Arten der Antwort (Multiple-Choice, freie Antwort, u. a.) auszuwählen.
Ob richtig geantwortet wurde, kann sich der Schüler im Prüfungsmodus nicht anzeigen lassen.

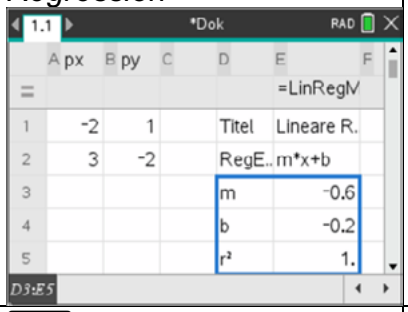
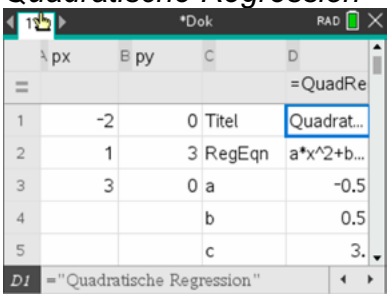
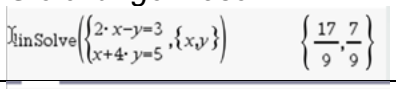
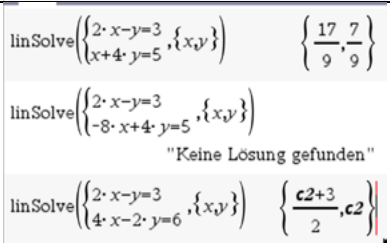




Die abzugebende Datei ist natürlich zum Schluss unter einem aussagekräftigen und nicht verwechselbaren Namen abzuspeichern.

Checkliste Funktionen und lineare Gleichungssysteme

Ich möchte …	Was tust Du?	Das kann ich sicher.	Ich muss das noch üben.
eine Funktion oder Variable definieren.	1. menu – *Aktionen– Define* 2. sto→ Tasten ctrl var 3. :=, Tasten ctrl		
eine Wertetabelle zu einer Funktion anzeigen.	menu – Tabelle–*Tabelle…*		
die Spalte einer Tabelle mit fortlaufenden Zahlen füllen.			
eine Funktion stückweise zeichnen.	with- Operator - ctrl = |		
Eigenschaften von Funktionsgraphen aus dem Graphen ablesen.	1. menu – *Graph analysieren*		

einen Schieberegler erstellen.	1. Treten in einer Funktion f unabhängig von der veränderlichen Variable x weitere Parameter auf, so werden für diese automatisch Schieberegler erstellt. 2. menu – *Aktion- Schieberegler einfügen*		
eine lineare Funktion aus zwei Punkten erstellen lassen.	menu – *Statistik- Statistische Berechnungen- Lineare Regression*  		
eine quadratische Funktion aus drei Punkten erstellen lassen.	menu – *Statistik- Statistische Berechnungen- Quadratische Regression*  		
ein lineares Gleichungssystem lösen.	menu – *Algebra- Gleichungssysteme lösen- 2 System linearer Gleichungen lösen*  		
Die Lösung eines LGS interpretieren **- eine Lösung** **- keine Lösung** **- unendlich viele Lösungen**	 		

4. Lernbereich 4: Ähnlichkeit

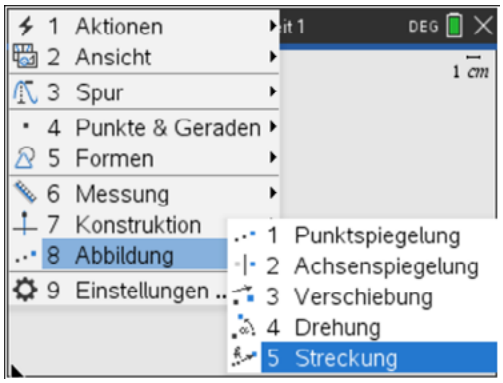
Lernbereich 4: Ähnlichkeit	**20 Ustd.**
Einblick gewinnen in die zentrische Streckung	DGS
- Konstruktion	
- Eigenschaften	Winkeltreue, Übereinstimmung des Verhältnisses einander entsprechender Strecken
Anwenden der Ähnlichkeit innerhalb und außerhalb der Mathematik	
- Abgrenzen der Fachsprache zur alltäglichen Sprache	
- Hauptähnlichkeitssatz	
- Benutzen von Hilfsfiguren zur Lösung von Konstruktions- und Beweisaufgaben	Strategien Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten
- Berechnen von Streckenlängen, Flächeninhalten und Volumina ähnlicher Objekte	Gullivers Reisen Abstände, Höhen, Maßstäbe

Technische und methodische Hinweise für Lehrkräfte

Für den Unterricht von besonderer Bedeutung ist die rasche Konstruktion von Bildern geometrischer Objekte bei einer zentrischen Streckung. So lassen sich z. B. Invarianten und weitere Eigenschaften dieser Abbildung durch die Nutzung des Zugmodus gut erkunden. Da man das Geometriewerkzeug *Zentrische Streckung* nicht nur im ***Geometry***-Modus, sondern auch im ***Graphs***-Modus nutzen kann, lassen sich Zusammenhänge in diesem Kontext auch mit analytischen Mitteln beschreiben und untersuchen. Als Lehrkraft darf man jedoch nicht unterschätzen, dass die Handhabung der dynamischen Geometriesoftware auf dem Handheld nicht so flüssig möglich ist wie mit der PC-Software („Mäusekino-Effekt“). Wenn Sie die Durchführung von geometrischen Konstruktionen durch die Schüler auf dem Handheld während der Unterrichtszeit vorhaben, so planen Sie deshalb genügend Zeit ein, und sorgen Sie für eine hinreichend detaillierte Anleitung. Häufig genügt es aber, geometrische Konstruktionen und Untersuchungen mit der dynamischen Geometriesoftware des PC oder einer interaktiven Tafel selbst zu präsentieren oder durch Schüler vorführen und erläutern zu lassen.

Die Untermenüs in der Applikation ***Geometry*** sind zum großen Teil selbsterklärend.

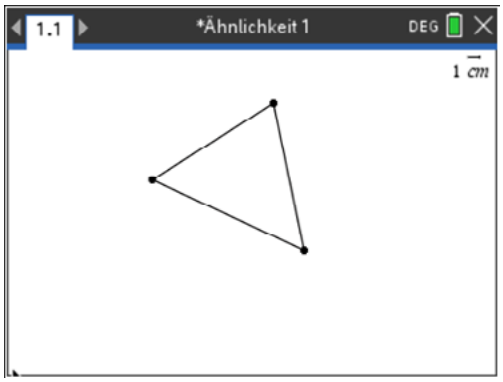
Alle Untermenüs in ***Geometry*** haben den Vorteil, dass sie nach der Auswahl einer Anweisung kleine Hilfen anbieten. Klicken Sie dazu auf das Icon in der oberen linken Ecke des Bildschirms.



Beispielhaft wird im Folgenden die Streckung eines Dreiecks beschrieben:

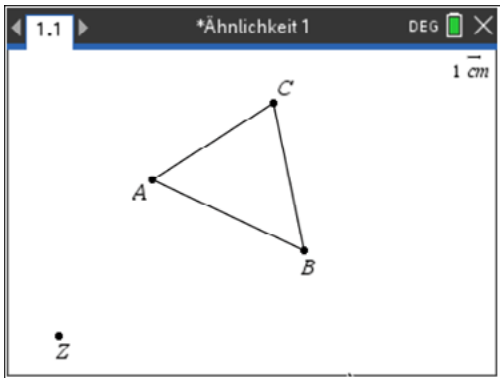
Öffne in ***Geometry*** das Untermenü *Formen – Dreieck*. Folge dem ersten Teil der Hilfe und klicke auf die drei Eckpunkte des künftigen Dreiecks.

Beende diesen Teil mit dem Drücken von esc.



Klicke jeden Eckpunkt an und wähle mit ctrl menu die Anweisung *Beschriftung*. Benenne die Eckpunkte des Dreiecks.

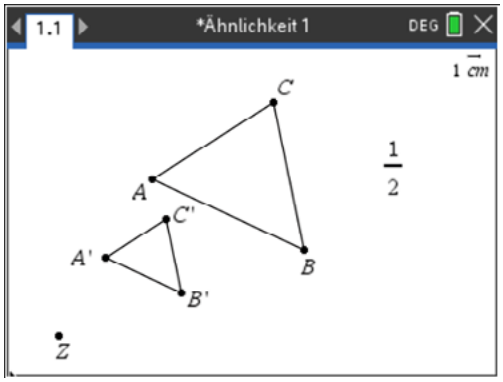
Wähle das Untermenü *Punkte&Geraden* und dort *Punkt*. Zeichne einen Punkt als künftiges Streckzentrum und benenne ihn mit Z.



Öffne das Untermenü *Abbildung – Streckung.* Klicke das Icon oben links am Bildschirmrand an und folge den Hinweisen. Hier wurde ½ als Streckfaktor eingegeben.

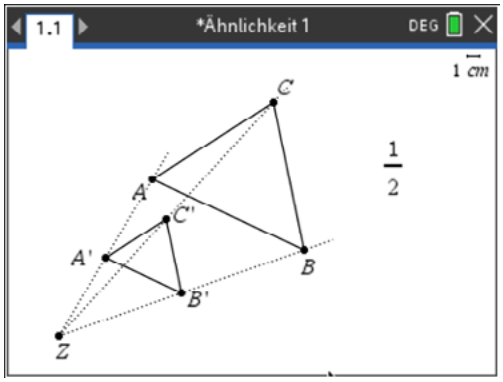
Streckung: Klicken Sie auf das Objekt, dann auf das Streckungszentrum (oder geben Sie '(' gefolgt von Koordinaten ein) und anschließend auf den Streckungswert (oder geben Sie ihn ein)

Das Bilddreieck wird mit den Bezeichnungen der Eckpunkte von der Geometriesoftware erzeugt.

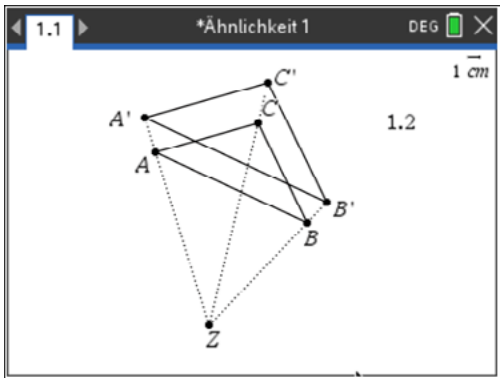


Man kann nun daran gehen, Zusammenhänge zwischen Original- und Bilddreieck sowie dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor zu untersuchen.

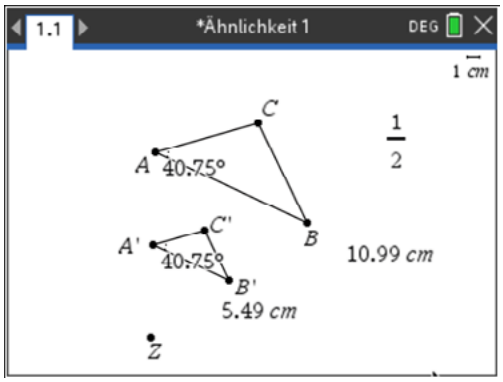
Zeichne mit *Punkte&Geraden – Halbgerade* von Z durch die Originalpunkte je eine Halbgerade. Die Bildpunkte liegen auf den zugehörigen Halbgeraden. Dies bleibt auch so, wenn sich im Zugmodus das Originaldreieck oder die Lage von Z verändern.



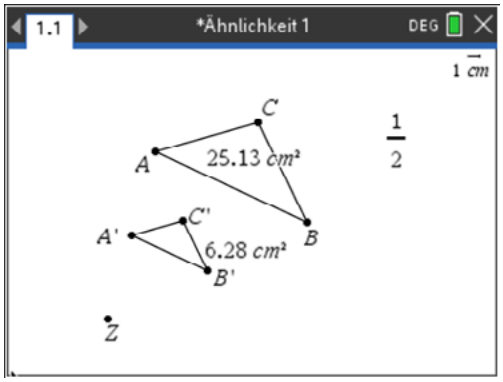
Man kann auch den Streckfaktor anklicken und seinen Wert verändern. Die Eigenschaft, dass Streckzentrum, Original- und Bildpunkt immer auf ein und derselben Geraden liegen, bleibt erhalten.



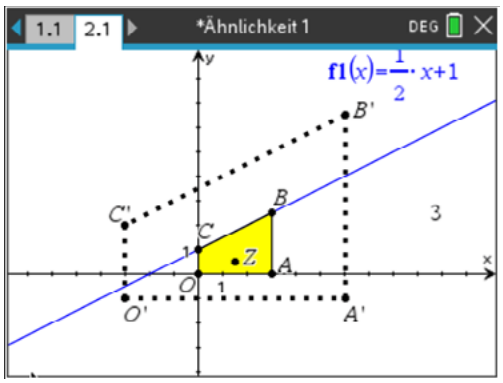
Mit dem Untermenü *Messen* kann man Abstände der Eckpunkte voneinander (gleichliegender Seitenlängen) oder die Größe von gleichliegenden Innenwinkeln messen und vergleichen. Auch wenn die Form des Originaldreiecks, die Lage des Streckzentrums oder die Größe des Streckfaktors verändert werden, bleiben Zusammenhänge zwischen den Größen erhalten.



Auf analoge Weise lässt sich der Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten von Original- und Bildfigur untersuchen.

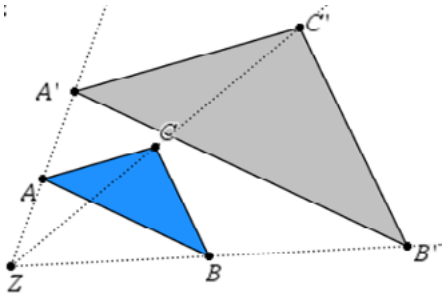


Auch in der Applikation ***Graphs*** gibt es ein Untermenü *Geometry* mit einer analogen Funktionalität. Hier lassen sich u. a. geometrische und analytische Kompetenzen weiterentwickeln.
Wie wäre es z. B. die Koordinaten der Bildpunkte des Trapezes OABC nach Streckung am Mittelpunkt Z der Strecke $\overline{AC}$ mit dem Streckfaktor k = 3 erst zu berechnen und anschließend anhand der Konstruktion zum Vergleich zu messen?

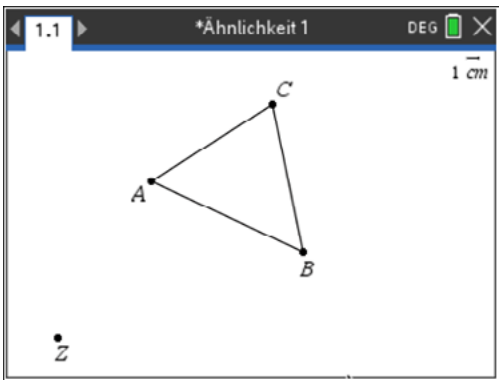


Arbeitsblatt 1: Grundkonstruktion einer Zentrischen Streckung mit DGS

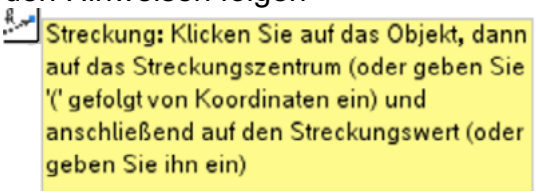
Wird ein Gegenstand von einer zentralen Lichtquelle aus angestrahlt, so entsteht bei bestimmten Bedingungen ein Schattenbild.
Ein mathematisches Modell dafür ist die zentrische Streckung.



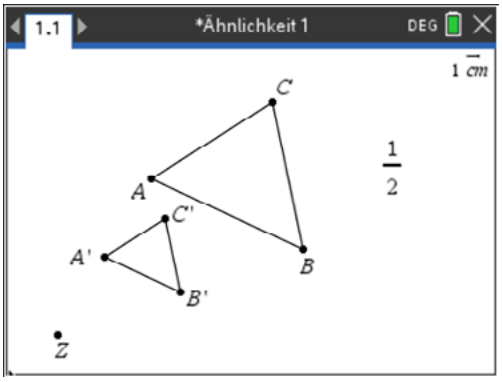
- ***Geometry*** - *Formen – Dreieck* öffnen
- auf das Icon oben links klicken
- dem ersten Teil der Hilfe folgen
- Dreieck zeichnen
- esc drücken
- jeden Eckpunkt anklicken und mit ctrl menu *Beschriftung* wählen
- Eckpunkte A, B und C des Dreiecks benennen (Großbuchstaben mit ⇧shift)
- *Punkte&Geraden – Punkt* wählen
- Punkt Z als künftiges Streckzentrum zeichnen und benennen



- Untermenü *Abbildung – Streckung* öffnen
- auf das Icon oben links klicken
- den Hinweisen folgen



- die Zahl ½ als Streckfaktor auf einer freien Stelle des Bildschirms eingeben,
- Das Bilddreieck wird mit den Bezeichnungen der Eckpunkte A‘, B‘ und C‘ von der Geometriesoftware erzeugt.



Aufgaben:

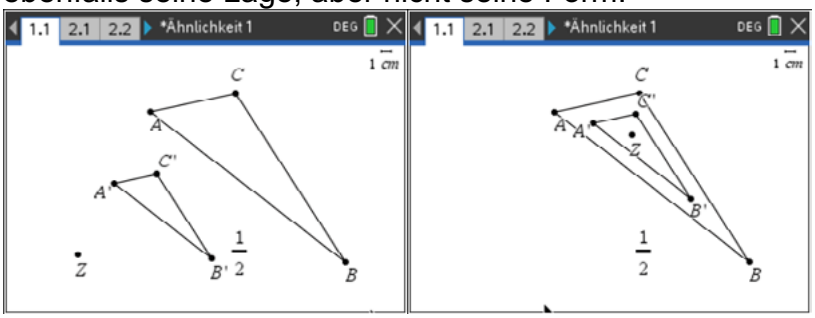
1. Greife mit dem Cursor einen Eckpunkt des Originaldreiecks ABC oder den Punkt Z und verändere seine Lage im Zugmodus. Beschreibe deine Beobachtungen.
   Was ändert sich, was bleibt gleich?
2. Klicke auf den Streckfaktor und verändere seinen Wert. Beschreibe deine Beobachtungen. Was ändert sich, was bleibt gleich?

Hinweis: Das Bilddreieck A’B’C‘ lässt sich als abhängiges Objekt nicht im Zugmodus verändern.

LB 4 Lösungen zu Arbeitsblatt 1

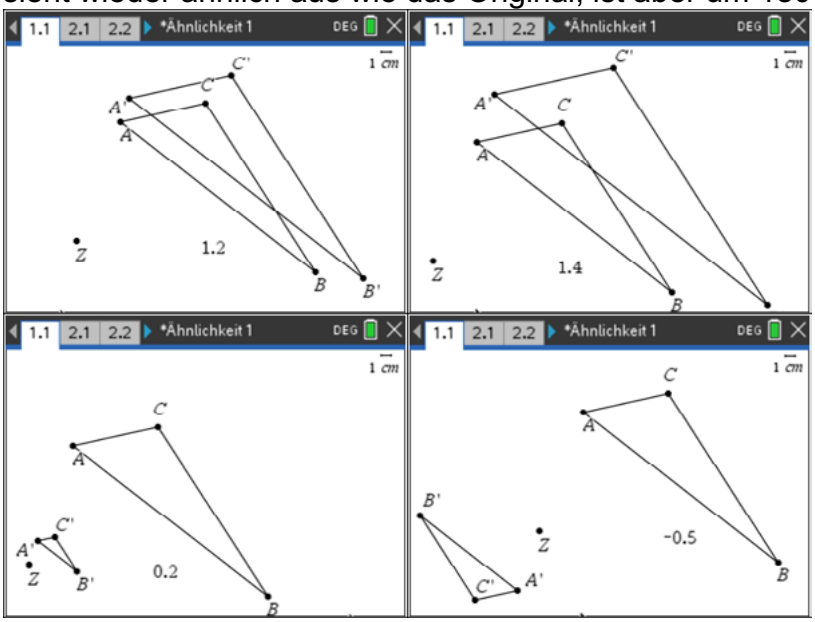
Aufgabe 1:

Greift man eine Ecke des Originaldreiecks und verändert dessen Form im Zugmodus, so wird auch die Form des Bilddreiecks in ähnlicher Weise verändert. So wie sich die Lage des bewegten Originalpunktes verändert, ändert sich in gleicher Weise die Lage des zugehörigen Bildpunktes. Die anderen Punkte von Original und Bild bleiben unverändert. Greift man das Streckzentrum Z und verändert dessen Lage, so verändert das Bilddreieck ebenfalls seine Lage, aber nicht seine Form.



Aufgabe 2:

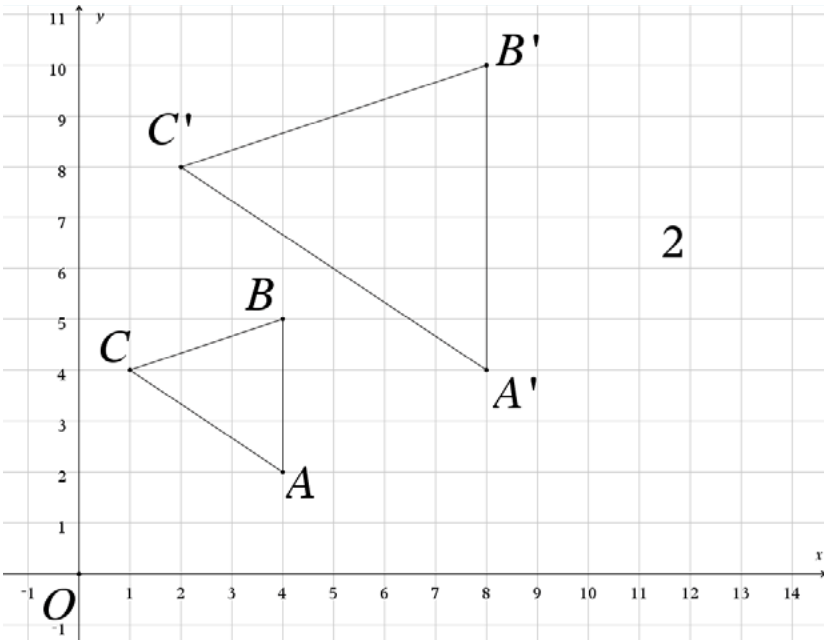
Eine Veränderung des Streckfaktors k bewirkt für k > 1 eine Vergrößerung des Bilddreiecks, dessen Form ähnlich zum Originaldreieck ist. Je größer k wird, desto weiter rückt das Bilddreieck vom Streckzentrum weg. Für k = 1 stimmen Original- und Bilddreieck überein. Für 0 < k < 1 erfolgt eine Verkleinerung des Bilddreiecks, je kleiner der positive Wert von k ist, desto näher rückt das immer kleiner werdende Bilddreieck an das Streckzentrum heran. Für negative Werte von k liegt Z zwischen Bild und Original, das Bild sieht wieder ähnlich aus wie das Original, ist aber um 180° gedreht.



Für alle bisher durchgeführten zentrische Streckungen gilt vermutlich:
Einander entsprechende Seiten von Original- und Bilddreieck scheinen immer parallel zu sein. Die Seiten des Bilddreiecks könnten immer k-mal so lang sein wie die entsprechenden Seiten des Originaldreiecks.

Arbeitsblatt 2: Untersuchung von Eigenschaften einer zentrischen Streckung

Gegeben sind ein Dreieck ABC mit A(4|2), B(4|5) und C(1|4) sowie der Ursprung O(0|0). Das Dreieck wurde am Punkt O mit dem Streckfaktor k = 2 zentrisch gestreckt. Sein Bilddreieck ist das Dreieck A'B'C'.



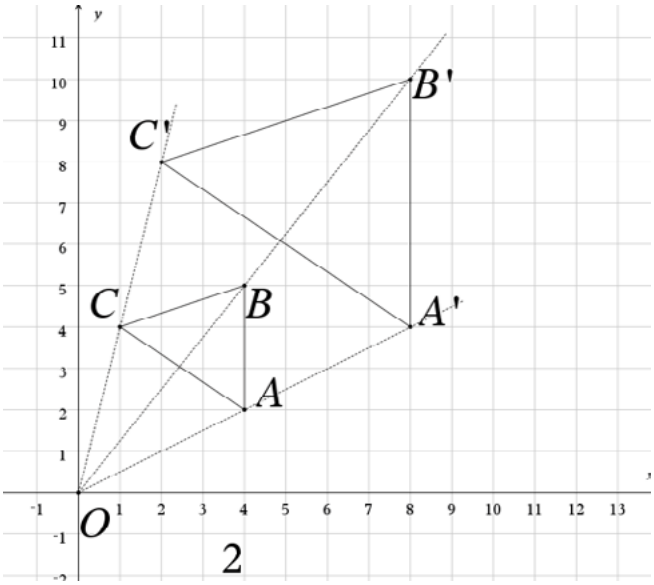
Aufgaben:

1. Zeichne die Verbindungsgeraden von O zu den Bildpunkten in die Abbildung ein (1LE entspricht 1 cm). Beschreibe die Lage der Originalpunkte bezüglich dieser Verbindungsgeraden.
2. Lies die Koordinaten der Original- und Bildpunkte ab und vergleiche sie miteinander.
3. Miss und vergleiche die Längen der Dreieckseiten von Original- und Bilddreieck.
4. Miss und vergleiche die Größe der Innenwinkel von Bild- und Originaldreieck.
5. Berechne die Flächeninhalte von Original- und Bilddreieck. Entnimm geeignete Größen der Darstellung.
6. Führe die oben dargestellte zentrische Streckung auf deinem CAS-Rechner durch. Miss die Längen der Dreieckseiten und die Größe der Innenwinkel mit den Werkzeugen der dynamischen Geometriesoftware. Nutze dazu die Möglichkeit, Punkte mit Koordinaten eingeben zu können. Vergleiche diese Ergebnisse mit den händisch ermittelten Resultaten.
7. Verändere die Form des Originaldreiecks oder den Streckfaktor und wiederhole die Messungen von Punkt 6.
8. Ergänze den folgenden Merktext:

Für zentrische Streckungen gilt:
- Winkelgrößen werden _____ verändert. (Winkeltreue)
- Eine Bildstrecke ist |k|-mal so lang wie ihre _____ $(a' = |k| \cdot a)$.
- Der Flächeninhalt einer Bildfigur ist k²-mal so groß wie der Flächeninhalt der _____ $(A' = k^2 \cdot A)$.

LB 4 Lösungen zu Arbeitsblatt 2

Aufgabe 1:
Die Original- und die Bildpunkte legen jeweils auf ein und derselben Geraden, die durch das Streckzentrum geht.



Aufgabe 2:

Original	Bild
A(4|2)	A‘(8|4)
B(4|5)	B‘(8|10)
C(1|4)	C‘(2|8)

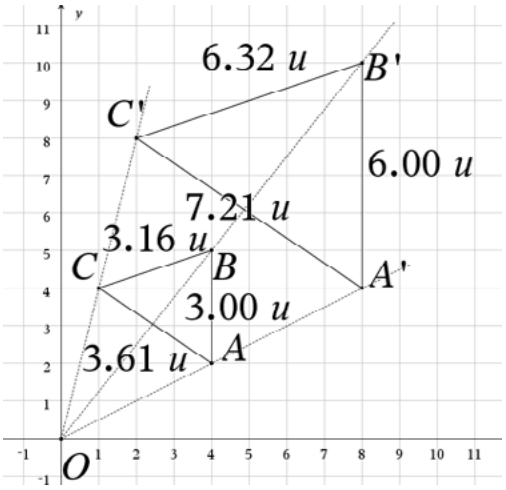
Die Quotienten einander entsprechender Koordinaten von Bild und Original sind gleich dem Streckfaktor.

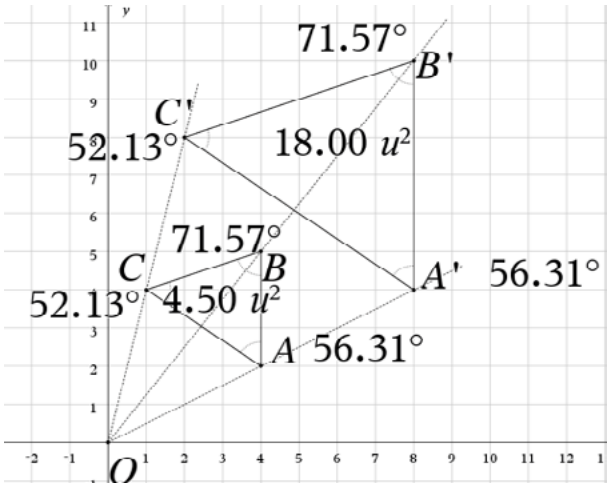
Aufgabe 3:
$\overline{AB} = 3\ LE \quad \overline{A'B'} = 6\ LE$
$\overline{AC} = 3{,}6\ LE \quad \overline{A'C'} = 7{,}2\ LE$
$\overline{BC} = 3{,}2\ LE \quad \overline{B'C'} = 6{,}4\ LE$

Aufgabe 4:
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B' \approx 56°$
$\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A' \approx 52°$
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' \approx 72°$

Aufgabe 5:
Als Grundseiten wählt man zweckmäßig $\overline{AB} = 3\ LE$ bzw. $\overline{A'B'} = 6\ LE$. Die Höhe der Dreiecke kann man dann als Abstand dieser Seiten zu den Punkten C bzw. C‘ ablesen.
$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5\ FE \qquad A_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18\ FE$
Der Flächeninhalt vervierfacht sich!

Aufgabe 6:
Hinweise:
Wenn das Originaldreieck mit dem Werkzeug menu *Formen – Dreieck* erzeugt wurde, und man dann nach der zentrischen Streckung mit dem Werkzeug menu *Messung – Länge* die Seitenlängen der Dreiecke messen möchte, muss man vorher die Dreieckseiten mit dem Werkzeug menu *Punkte&Geraden – Strecke* markieren. Wenn man das nicht tut, wird mit diesem Werkzeug die Größe des Dreiecksumfanges gemessen.
Bei der Winkelmessung mit dem Werkzeug menu *Messung – Winkel* ist darauf zu achten, dass man drei Eckpunkte des Dreiecks in einer solchen Reihenfolge auswählt, dass der Scheitelpunkt des Winkels als zweiter, mittlerer Eckpunkt angeklickt wird.
Für die Messung der Flächeninhalte mit dem Werkzeug menu *Messung – Fläche* werden vorher die zu messenden Dreiecke angeklickt. Achte darauf, dass dann auch das Objekt „Dreieck“ angezeigt wird. Wenn nicht, bitte tab drücken!





Aufgabe 7:
Lösung individuell

Aufgabe 8:
Für zentrische Streckungen gilt:

- Winkelgrößen werden **nicht** verändert. (Winkeltreue)
- Eine Bildstrecke ist |k|-mal so lang wie ihre **Originalstrecke** $(a' = |k| \cdot a)$.
- Der Flächeninhalt einer Bildfigur ist k²-mal so groß wie der Flächeninhalt der **Originalfigur** $(A' = k^2 \cdot A)$.

Arbeitsblatt 3: Seitenverhältnisse und Winkel bei ähnlichen Dreiecken

Zeichne mit der dynamischen Geometriesoftware wie im Bild 1 die Dreiecke ABC mit A(2|3), B(4|2), C(5|5) und PQR mit P(8|5), Q(12|3), R(14|9). Greife das Dreieck PQR an einer Seite und verschiebe es so, dass P auf A zu liegen kommt (siehe Bild 2).

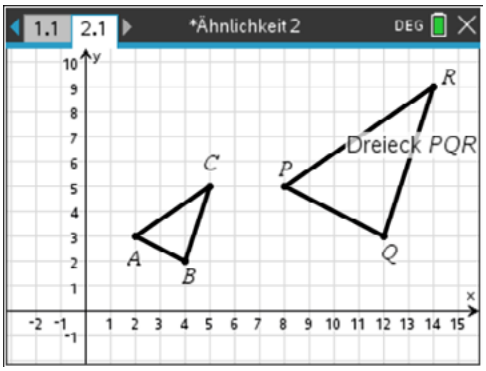


Bild 1

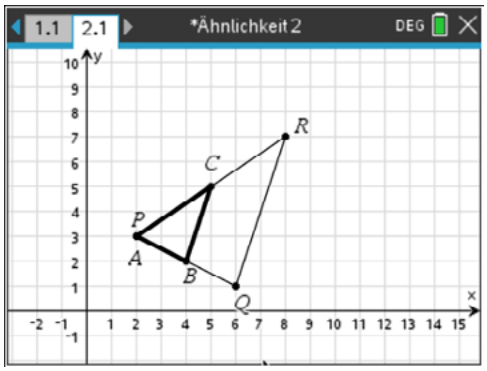


Bild 2

Die Figur im Bild 2 erinnert an eine zentrische Streckung, bei der das kleinere Dreieck mit dem Streckfaktor k = 2 vom Streckzentrum A aus gestreckt wurde und so das größere Dreieck als Bild entsteht.

Aufgaben:

1. Begründe die folgenden Aussagen:

Wegen der Eigenschaften der zentrischen Streckung müssen die Dreiecke ABC und PQR
- in der Größe gleichliegender Innenwinkel übereinstimmen und
- die Seitenlängen einander entsprechender Seiten gleiche Verhältnisse bilden.

2. Überzeuge dich durch Nachmessen der Winkelgrößen und Seitenlängen von der Gültigkeit dieser Aussagen im oben beschriebenen Beispiel.

Definition: Ähnlichkeitsätze für Dreiecke

Dreiecke, die in ihren Innenwinkeln übereinstimmen, nennt man zueinander ähnliche Dreiecke.

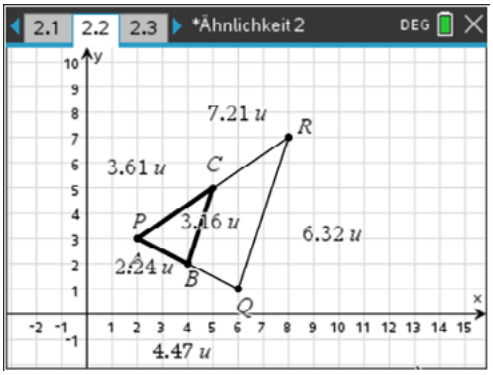
1. Bei zueinander ähnlichen Dreiecken ist das Verhältnis einander entsprechender Seitenlängen immer gleich.
2. Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei Innenwinkeln übereinstimmen.

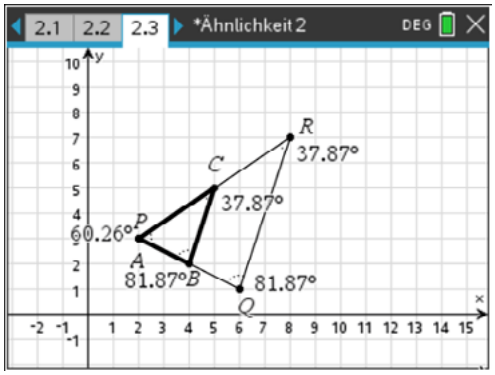
3. Begründe den zweiten Ähnlichkeitssatz mithilfe der Innenwinkelsumme von Dreiecken.

LB 4 Lösungen zu Arbeitsblatt 3

Aufgabe 1:
Diese Aussagen folgen unmittelbar aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung (siehe Arbeitsblatt 2).

Aufgabe 2:
$\overline{PQ} \approx 4{,}4\ LE = 2 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot 2{,}2\ LE$
$\overline{QR} \approx 6{,}4\ LE = 2 \cdot \overline{BC} = 2 \cdot 3{,}2\ LE$
$\overline{PR} \approx 7{,}2\ LE = 2 \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 3{,}6\ LE$
Winkelgrößen siehe Screenshot.



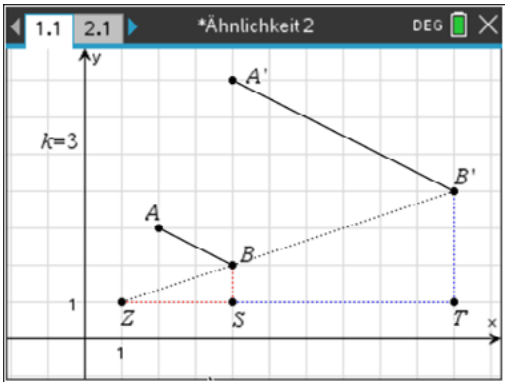


Aufgabe 3:

Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck, die immer 180° beträgt, muss bei zwei Dreiecken, die in zwei Winkeln übereinstimmen, auch die Größe des dritten Winkels gleich sein. Die Größe des dritten Winkels ergibt sich für jedes Dreieck aus 180° abzüglich der Summe der beiden anderen Innenwinkel.

Arbeitsblatt 4: Verknüpfung von dynamischer und analytischer Geometrie

Beispiel: Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ durch die Punkte A(2|3) und B(4|2).
Ermittle rechnerisch die Koordinaten des Bildpunktes B‘ von B bei Streckung von $\overline{AB}$ am Streckzentrum Z(1|1) mit dem Streckfaktor k = 3.



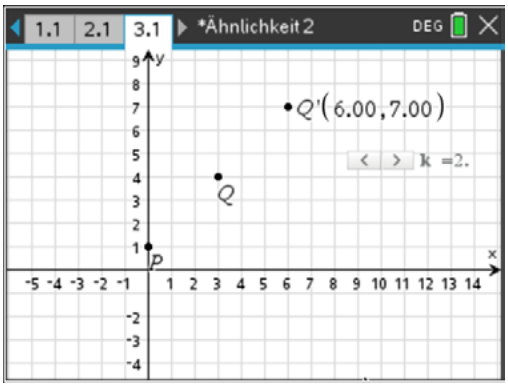
Lösung:
Die Dreiecke ZSB und ZTB‘ sind zueinander ähnlich, weil sie in dem Innenwinkel bei Z und den rechten Winkeln bei S bzw. T übereinstimmen (siehe Abbildung).
Deshalb gilt $\frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = k$, $\frac{|\overline{ZT}|}{|\overline{ZS}|} = k$ sowie $\frac{|\overline{TB'}|}{|\overline{SB}|} = k$.
Die x-Koordinate von B‘ ergibt sich durch Addition:
$x_{B'} = x_Z + k \cdot (x_B - x_Z)$
Analog erhält man die y-Koordinate von B‘: $y_{B'} = y_Z + k \cdot (y_B - y_Z)$
Daraus ergibt sich für k = 3 mit den oben gegebenen Koordinaten:
$x_{B'} = 1 + 3 \cdot (4 - 1) = 10$ und $y_{B'} = 1 + 3 \cdot (2 - 1) = 4$, also B‘(10|4).

Aufgaben:

1. Beschreibe, wie man analog zum Beispiel die Koordinaten von A‘ ermitteln kann.

2. Überprüfe die bisherigen Überlegungen durch Konstruktion der Bildpunkte mit dem CAS-Rechner.

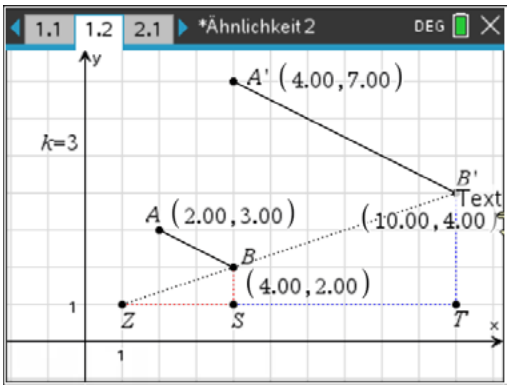
3. Gegeben sind die Punkte P(0|1) und Q(3|4). Der Punkt Q wird durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor k am Streckzentrum P auf den Punkt Q‘ abgebildet. Prüfe rechnerisch nach, ob es stimmt, dass sich die Koordinaten von Q‘ durch Q‘(3k |1 + 3k) ergeben.
   Teste das Ergebnis durch Konstruktion, füge für k dazu einen Schieberegler ein.



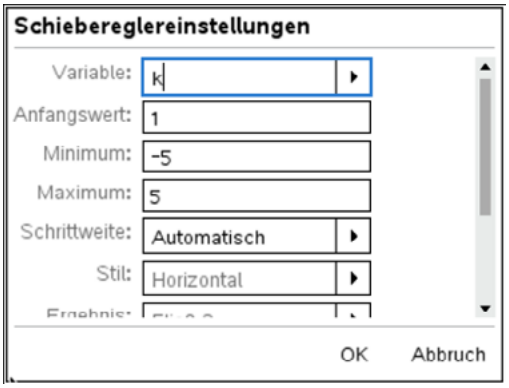
LB 4 Lösungen zu Arbeitsblatt 4

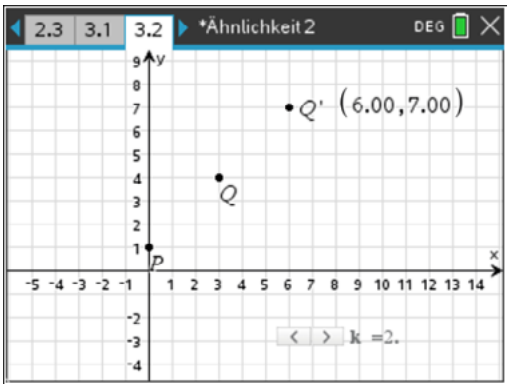
Aufgabe 1:
$x_{A'} = 1 + 3 \cdot (2 - 1) = 4$ und $y_{A'} = 1 + 3 \cdot (3 - 1) = 7$, also A‘(4|7)

Aufgabe 2:
Setze den Cursor auf den Punkt, wähle aus dem Kontextmenü mit ctrl menu das Untermenü *Koordinaten &Gleichung.* Die Punktkoordinaten werden angezeigt.



Aufgabe 3:
Mit $x_{B'} = x_Z + k \cdot (x_B - x_z)$ und $y_{B'} = y_Z + k \cdot (y_B - y_Z)$ sowie P(0|1) und Q(3|4) folgt:
$x_{Q'} = x_P + k \cdot (x_Q - x_P) = 0 + k \cdot (3 - 0) = 3k$
$y_{Q'} = y_P + k \cdot (y_Q - y_P) = 1 + k \cdot (4 - 1) = 1 + 3k$
Einfügen eines Schiebereglers durch menu *Aktionen – Schieberegler einfügen*. Dann die Einstellungen etwa wie folgt vornehmen und noch „minimieren“ aktivieren:

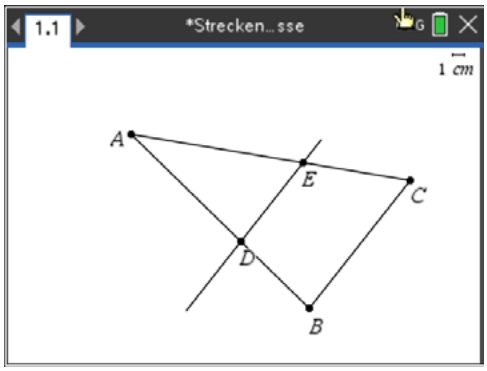




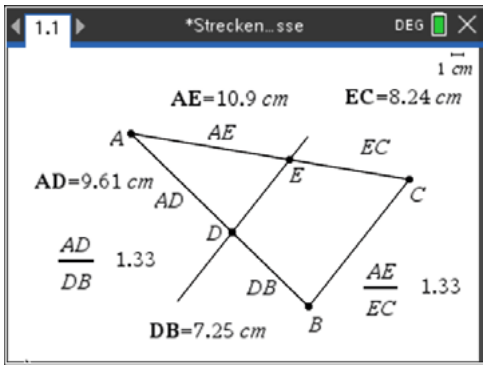
Für k = 2 ergibt sich rechnerisch aus $Q'(3k;\ 3k + 1)$ der auch zeichnerisch mit dem Schieberegler ermittelte Wert Q‘(6; 7).

Arbeitsblatt 5: Streckenverhältnisse

1. Untersuchungen zu Verhältnissen von Seitenlängen:

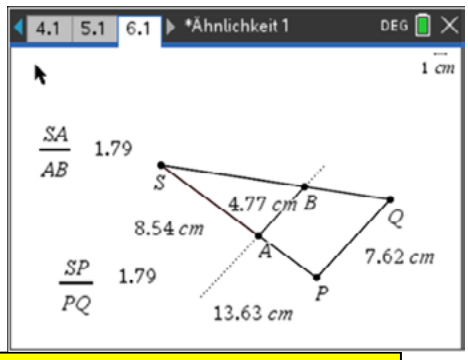


a) Zeichne ein Dreieck ABC.
b) Konstruiere zur Seite $\overline{BC}$ eine Parallele durch einen Punkt D auf der Seite $\overline{AB}$.
c) Benenne den Schnittpunkt der Parallelen mit der Seite $\overline{AC}$ mit E.
d) Erzeuge die Strecken $\overline{AD}, \overline{DB}, \overline{AE}, \overline{EC}$ und benenne sie. (menu *Aktionen-Text*)
e) Miss die Längen dieser Strecken und speichere die Messwerte unter Variablen ab mit ctrl menu *Speicher.* Ersetze „var“ durch die zugehörige Bezeichnung.



f) Bilde die angegebenen Verhältnisse der Streckenlängen.
Gib dazu zunächst die Texte AD/DB und AE/EC ein mit menu *Aktionen-Text.*
Wähle dann menu *Aktionen-Berechne,* klicke auf jeden der Texte und folge den Anweisungen des Rechners.
g) Verändere im Zugmodus sowohl die Form des Dreiecks als auch die Lage der Parallelen.
h) Beschreibe die Veränderungen der Streckenlängen und ihrer Verhältnisse.

2. Führe analoge Untersuchungen für die nebenstehende Figur durch:



3. Ergänze die Merksätze zu wahren Aussagen:

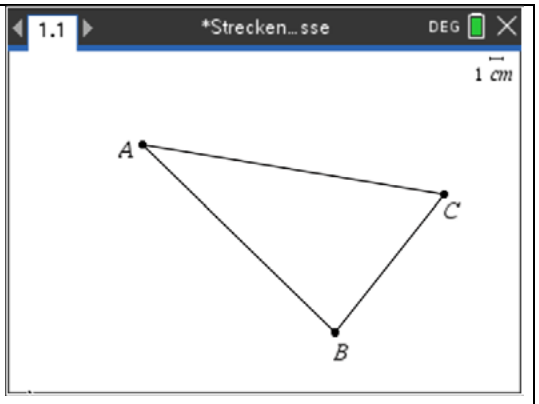
Wenn zwei durch einen Punkt verlaufende <u>Geraden</u> von zwei <u>Parallelen</u> geschnitten werden, die nicht durch den Scheitelpunkt gehen, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Es verhalten sich je zwei Abschnitte auf der einen Geraden so zueinander wie die _____ auf der anderen Geraden.
2. Es verhalten sich die Abschnitte _____wie die ihnen entsprechenden, vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf jeweils derselben Geraden.

LB 4 Lösungen zu Arbeitsblatt 5

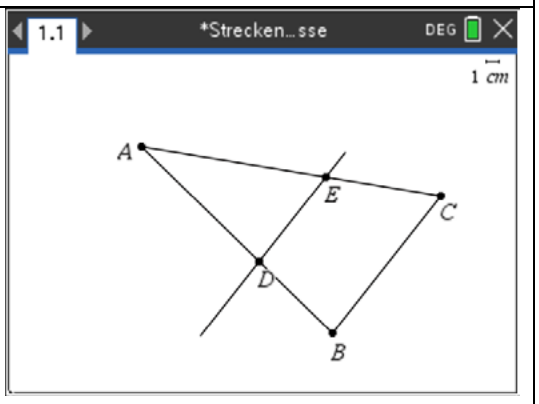
Aufgabe 1:

1a:
- Applikation ***Geometry*** öffnen
- menu *Formen – Dreieck*



1b:
- Den Punkt D für die Parallele auf die Seite $\overline{AB}$ legen mit menu *Punkte&Geraden-Punkt auf*
- Parallele konstruieren mit menu *Konstruktion – Parallele*
  Hilfe oben links anklicken und danach verfahren

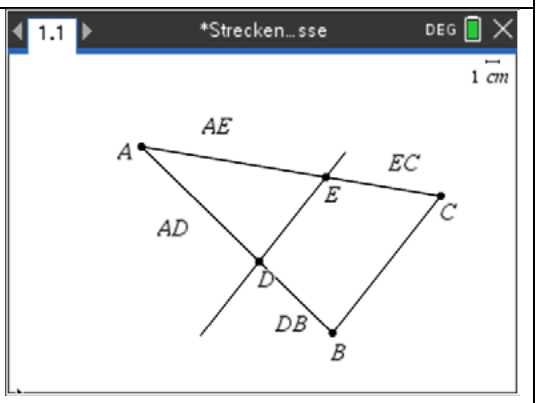
  Parallele: Klicken Sie auf die Gerade und dann auf den Punkt, durch den die Parallele verlaufen soll (oder geben Sie '(' gefolgt von Koordinaten ein)



1c:
- Punkt E konstruieren und bezeichnen mit menu *Punkte&Geraden-Schnittpunkt*
-

1d:
- Strecken zeichnen mit menu *Punkte&Geraden – Strecke*

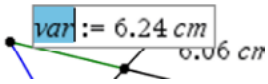
  Strecken $\overline{AD}, \overline{DB}, \overline{AE}, \overline{EC}$ mit menu *Aktionen-Text* bezeichnen



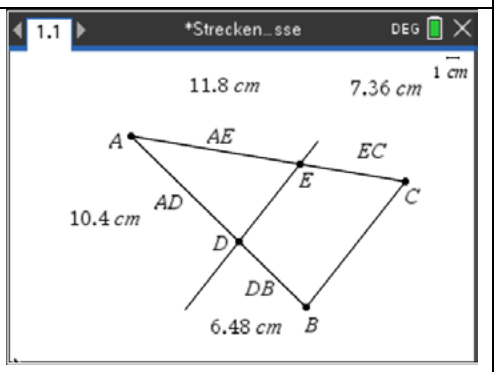
1e:

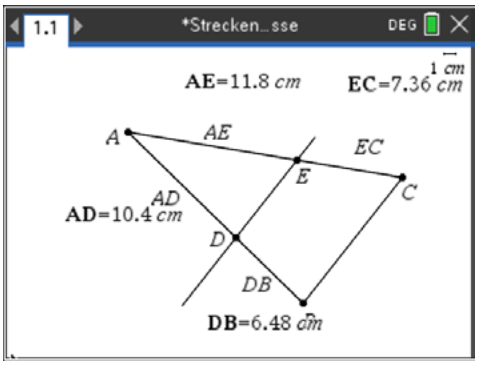
- Strecken einzeln anklicken und messen mit dem Kontextmenü:
  ctrl menu *Messung – Länge*

- Klicke jeden Messwert an und speichere die gemessenen Längen als Variable mit dem Kontextmenü: ctrl menu *Speichern*



Ersetze "var" durch die entsprechende Streckenbezeichnung.

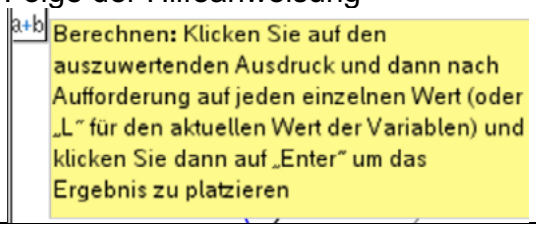


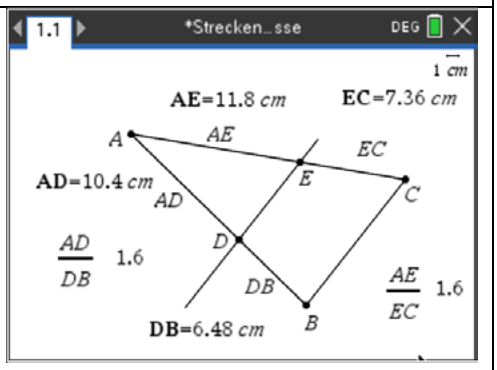


1f:

- Wähle menu *Aktionen – Text*
- Gib als Text ein AD ÷ DB enter
- Gib als Text ein AE ÷ EC enter
- Wähle menu *Aktionen – Berechnen*

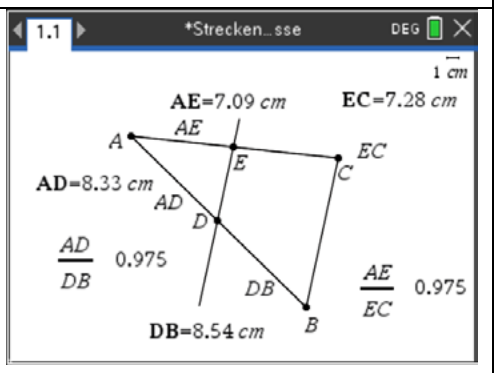
  Folge der Hilfeanweisung





1g:

- Greife den Punkt D und bewege ihn entlang der Dreieckseite. Beobachte die Messwerte und ihre Verhältnisse
- Verändere die Form des Dreiecks und wiederhole die Beobachtung



1h:
Für jede Form des Dreiecks und jede Lage des „Zugpunktes" sind die Verhältnisse der Streckenlängen gleich groß.

Aufgabe 2:

Konstruktion, Beobachtung und Beschreibung analog zu Aufgabe 1.

Aufgabe 3

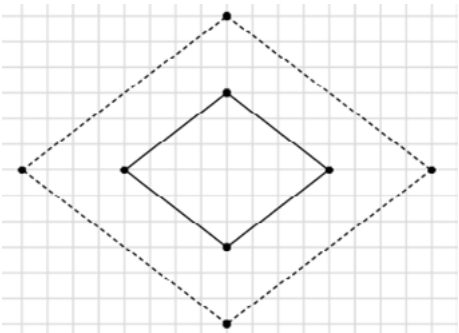
Wenn zwei durch einen Punkt verlaufende Geraden von zwei Parallelen geschnitten werden, die nicht durch den Scheitelpunkt gehen, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Es verhalten sich je zwei Abschnitte auf der einen Geraden so zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf der anderen Geraden.
2. Es verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die ihnen entsprechenden, vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf jeweils derselben Geraden.

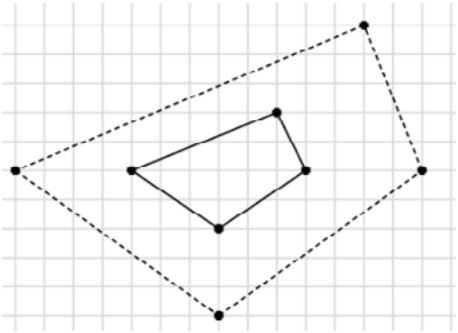
Arbeitsblatt 6: Übungen

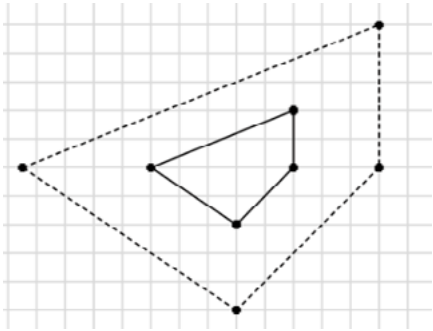
1. Das große Parallelogramm ist aus dem kleinen durch eine zentrische Streckung hervorgegangen.

   Zeichne das Streckzentrum ein und ermittle den Streckfaktor durch Nachdenken.
   Beschreibe, wie du die Aufgabe auch mit der dynamischen Geometriesoftware (DGS) lösen kannst und kontrolliere so deine Überlegungen mithilfe der DGS.

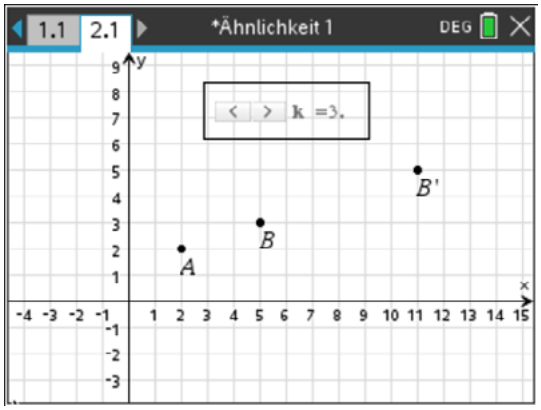


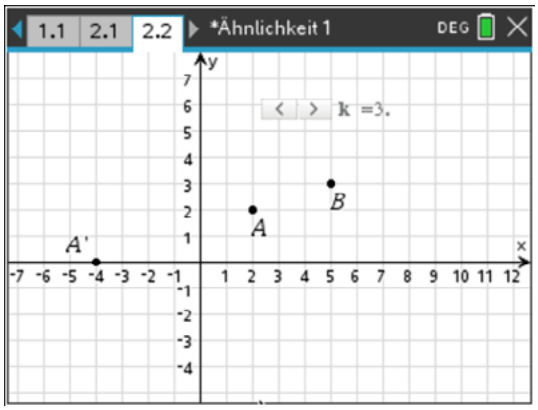
2. Prüfe und begründe, ob eine zentrische Streckung vorliegt. Beschreibe deinen Lösungsweg.





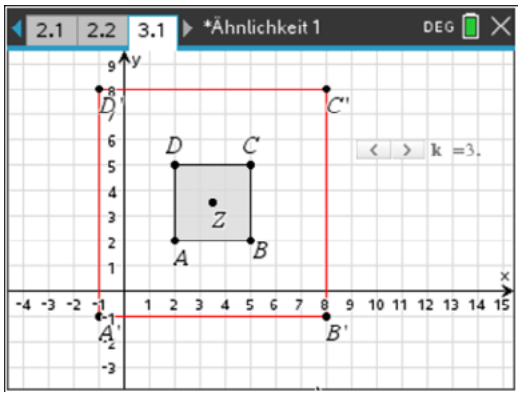
3. Gegeben sind zwei Punkte A(2|2) und B(5|3).





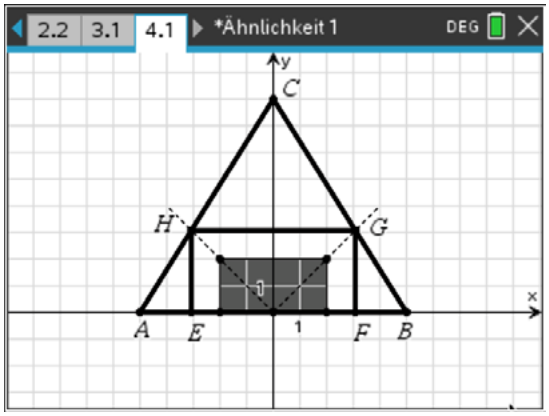
   a) Ermittle die Koordinaten des Bildpunktes B‘ in Abhängigkeit von k bei einer zentrischen Streckung von B am Streckzentrum A mit dem Streckfaktor k.
   Gib auch eine Gleichung der Geraden an, auf der die Bildpunkte B‘ liegen.
   Untersuche, ob es einen Wert für k gibt, für den B‘(32|12) gilt.
   Kontrolliere Deine Ergebnisse mit dem CAS-Rechner.
   b) Ermittle die Koordinaten des Bildpunktes A‘ in Abhängigkeit von k bei einer zentrischen Streckung von A am Streckzentrum B mit dem Streckfaktor k.
   Gib auch eine Gleichung der Geraden an, auf der die Bildpunkte A‘ liegen.
   Kontrolliere Deine Ergebnisse mit dem CAS-Rechner.

4. Gegeben ist ein achsenparalleles Quadrat ABCD mit einem Eckpunkt A(2|2) und der Seitenlänge k (siehe Zeichnung).



a) Das Quadrat ABCD wird an seinem Mittelpunkt Z mit dem Streckfaktor k = 4 zentrisch gestreckt. Ermittle die Koordinaten der Bildpunkte.
b) Das Quadrat ABCD wird an seinem Mittelpunkt Z mit dem Streckfaktor k zentrisch gestreckt. Ermittle die Koordinaten der Bildpunkte in Abhängigkeit von k mit $k \in \mathbb{Q}, k > 0$.
c) Untersuche, für welchen Wert von k der Flächeninhalt des Bilddreiecks 27 FE (225 FE) beträgt.

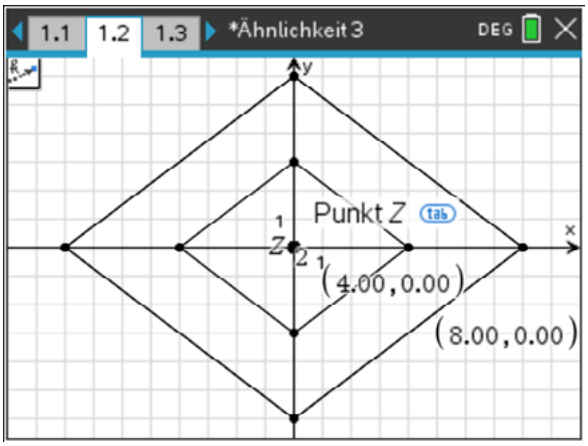
5. Die Abbildung zeigt ein Dreieck ABC mit A(-5|0), B(5|0) und C(0|8). Diesem Dreieck soll ein Rechteck EFGH mit einem Seitenverhältnis von 2 : 1 durch Konstruktion einbeschrieben werden[16]. Diese Konstruktion kann mithilfe des grau eingezeichneten Hilfsrechtecks erfolgen.
   a) Beschreibe und begründe diese Konstruktion.
   b) Untersuche rechnerisch oder durch Konstruktion mit DGS, ob der Augenschein stimmt, dass das einbeschriebene Rechteck EFGH Eckpunkte mit ganzzahligen Koordinaten besitzt.



[16] Das dem Dreieck einbeschriebene Rechteck liegt so, dass seine Eckpunkte auf den Dreieckseiten liegen, und zwar so, wie es die Abbildung deutlich macht.

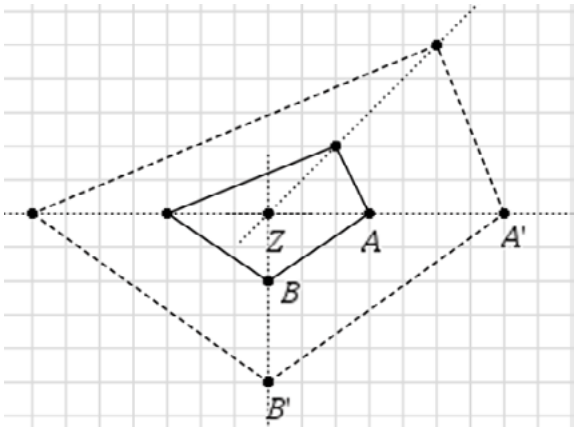
LB 4 Lösungen zu Arbeitsblatt 6

Aufgabe 1:

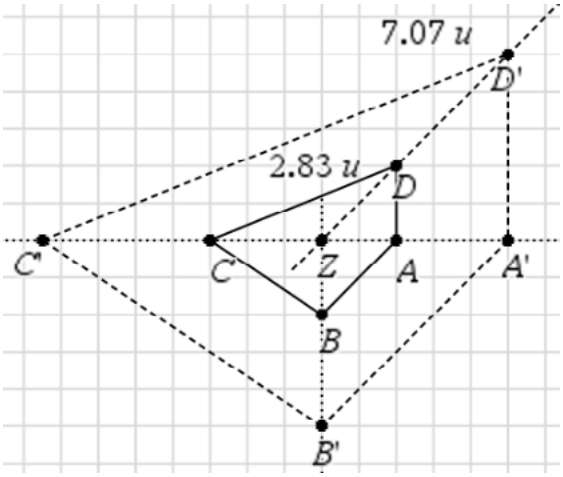


Das Streckzentrum Z erhält man als Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkten. Z ist das Zentrum der Symmetrieachsen.
Der Streckfaktor k = 2 ergibt sich als Quotient der Längen einer Bildstrecke durch die Länge der zugehörigen Originalstrecke.
Mit dem CAS-Rechner lässt sich die Figur am besten in der Applikation ***Graphs*** mit eingeblendetem Gitter nachzeichnen, wenn man die Achsen des Koordinatensystems als Symmetrieachsen der Figur wählt. Durch Anzeigen der Punktkoordinaten eines Original- und eines Bildpunktes lässt sich dann rasch auch der Streckfaktor ermitteln. Eine Probe wird möglich, wenn man die Streckung dann mit dem Geometriewerkzeug ausführt.

Aufgabe 2:



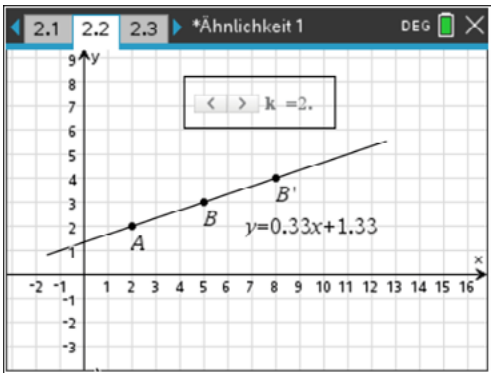
Die Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkten schneiden einander augenscheinlich in ein und demselben Punkt Z. Wenn es ein Streckzentrum gibt, dann muss es der Punkt Z sein.
Durch Nachmessen der Entfernungen von Original- und zugehörigem Bildpunkt findet man allerdings verschiedene Streckenverhältnisse, z. B. (leicht ablesbar) $\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{7}{4} = 1{,}75$ und $\frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$. Deshalb liegt keine zentrische Streckung vor.



Bei der zweiten Figur findet man wie bei der ersten einen Punkt Z, der als Streckzentrum in Frage kommt.
Für die Streckenverhältnisse gilt:
$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \qquad \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$
$\frac{\overline{ZC'}}{\overline{ZC}} = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5 \qquad \frac{\overline{ZD'}}{\overline{ZD}} \approx \frac{7{,}07}{2{,}83} \approx 2{,}5$
Für die Punkte A, B und C und ihre Bildpunkte lassen sich die Streckenlängen zum Punkt Z leicht ablesen. Bei den Punkten D und D‘ muss man sich mit einer Messung begnügen.
Konstruiert man die Figur in der Anwendung ***Graphs*** nach, lassen sich die Entfernungen von D bzw. D‘ zu Z auch mit dem Werkzeug *Messung* genauer ermitteln. Noch genauer geht es mit dem Satz des Pythagoras, der aber noch nicht zur Verfügung steht. Hier ist es also sinnvoll anzunehmen, dass eine zentrische Streckung vorliegt.

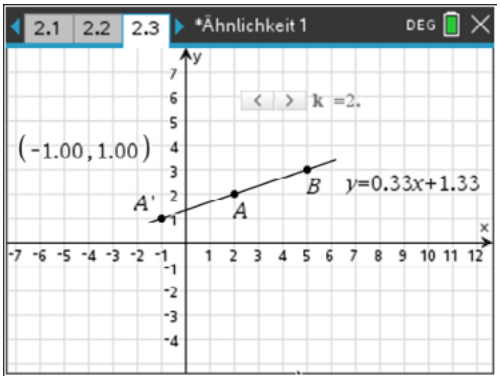
Aufgabe 3a:

Im Arbeitsblatt 3 wurde als Zusammenhang zwischen den Koordinaten von Bildpunkt B‘ und Originalpunkt B bei Streckung am Punkt A hergeleitet:
$x_{B'} = x_A + k \cdot (x_B - x_A)$ und : $y_{B'} = y_A + k \cdot (y_B - y_A)$
Mit A(2|2) und B(5|3) ergibt sich:
$x_{B'} = 2 + k \cdot (5 - 2)$ und : $y_{B'} = 2 + k \cdot (3 - 2)$ und damit B‘(2 + 3k|2 + k)
Die Gleichung für die Gerade, auf der die Bildpunkte B‘ liegen, kann mithilfe der Punkte A und B bestimmt werden: $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.



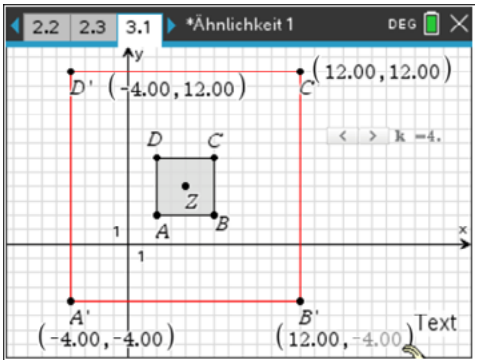
Aufgabe 3b:

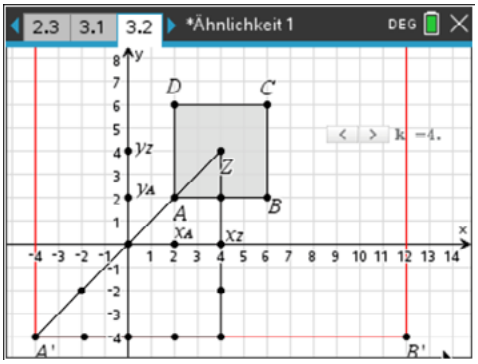
Analog zur Lösung der Aufgabe 3a ergibt sich mit
$x_{A'} = x_B + k \cdot (x_A - x_B)$ und $y_{A'} = y_B + k \cdot (y_A - y_B)$: A(2|2), B(5|3), A‘(5-3k|3-k)
Die Gleichung für die Gerade, auf der die Bildpunkte A‘ liegen, kann mithilfe der Punkte A und B bestimmt werden zu $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. Sie ist also dieselbe Gleichung wie bei Aufgabe 3a.



Aufgabe 4a:

Ermittlung der Bildpunkte durch Konstruktion: A‘(-4|-4), B‘(12|-4), C‘(12|12), D‘(-4|12).



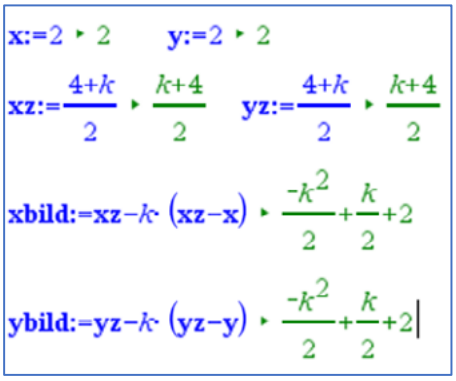


Aufgabe 4b:
Koordinaten der Punkte in Abhängigkeit von k:
A(2|2), B(2+k|2), C(2+k|2+k), D(2|2+k) sowie $Z\left(\frac{4+k}{2}\middle|\frac{4+k}{2}\right)$ als Mittelpunkt von $\overline{AZ}$.
Verwende $x_{P'} = x_Z - k \cdot (x_Z - x_P)$ und $y_{P'} = y_Z - k \cdot (y_Z - y_P)$.
Zur Vereinfachung der Rechnung wird ein wiederverwendbares Notes-Dokument erstellt. Hier sind mit x bzw. y die Koordinaten des Originalpunktes bezeichnet, mit xbild und ybild die des Bildpunktes sowie mit x_Z und y_Z die Koordinaten des Streckzentrums.

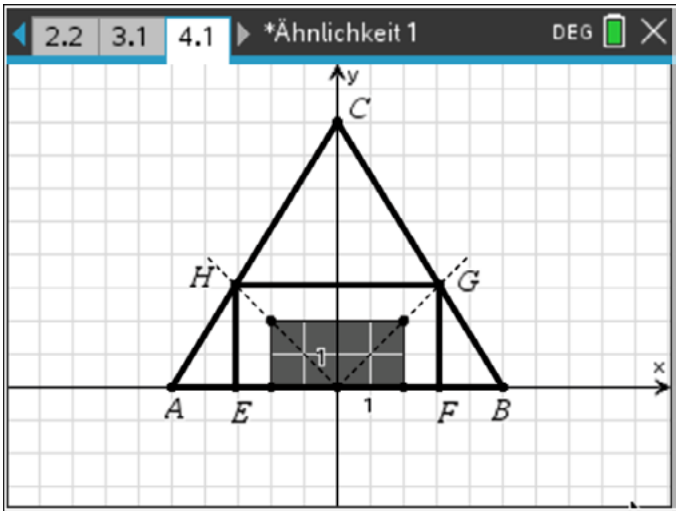
Ergebnis:

$$A'\left(\frac{-x^2}{2}+\frac{k^2}{2}+2\middle|\frac{-x^2}{2}+\frac{k^2}{2}+2\right)$$
$$B'\left(\frac{-k^2}{2}+k+2\middle|\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2\right)$$
$$C'\left(\frac{k^2}{2}+k+2\middle|\frac{-k^2}{2}+k+2\right)$$
$$D'\left(\frac{k^2}{2}+2\middle|\frac{k^2}{2}+2\right)$$

Für k = 4 erhält man die in Aufgabe 4a ermittelten Koordinaten aus diesen allgemeinen Ergebnissen.

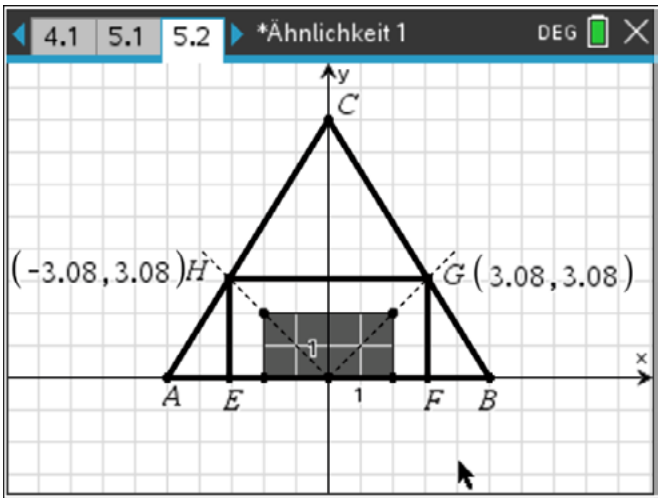


Aufgabe 5a:



Das kleine graue Rechteck ist so gezeichnet, dass seine Seitenlängen das Verhältnis 2 : 1 bilden. Es liegt wie das Dreieck symmetrisch zur y-Achse mit einer der langen Seiten auf der x-Achse. Man sieht nun den Ursprung O des Koordinatensystems als Streckzentrum an und zeichnet die Halbgeraden von O aus durch die beiden oberen Ecken des kleinen Rechtecks, bis sie die Dreieckseiten in den Punkten G und H schneiden. Die Senkrechten von G und H auf die x-Achse schneiden diese in den Punkten E und F. Das Rechteck EFGH ist dann das Bild vom kleinen grauen Rechteck bei einer zentrischen Streckung am Ursprung O. Wegen der Eigenschaften einer zentrischen Streckung stehen die Seitenlängen des Rechtecks EFGH dann auch im selben Verhältnis 2 : 1 wie die des kleineren Rechtecks.

Aufgabe 5b:



Lässt man sich die Koordinaten der Punkte G und H anzeigen, so ergeben sich keine ganzzahligen Koordinaten, der Augenschein scheint also zu trügen.
Man kann die Koordinaten von G und H auch als Schnittpunkte zweier Geraden berechnen. Wegen der Symmetrie der Figur genügt die Berechnung eines der Schnittpunkte, z. B. von G:
Gerade vom Ursprung durch die rechte obere Ecke des kleinen Rechtecks. Diese hat die Koordinaten (2|2). Die Ursprungsgerade hat deshalb die Gleichung y = x. Die Gerade g(BC) geht durch die Punkte B(5|0) und C(0|8). Ihr Anstieg ist $m = -\frac{8}{5}$ und ihr y-Achsenabschnitt n = 8. Die Gleichung von g(BC) ist $y = -\frac{8}{5}x + 8$. Setzt man hier y = x ein, so ergibt sich die Gleichung $x = -\frac{8}{5}x + 8$. Hieraus erhält man $x = \frac{40}{13}$. Diese Zahl ist keine ganze Zahl, sodass hiermit bestätigt ist, dass die Schnittpunkte von G und H nicht ganzzahlig sind.

Checkliste Ähnlichkeit

Applikationen ***Geometry*** oder ***Graphs***

Ich möchte	Was tust Du?	Das kann ich sicher.	Ich muss das noch üben.
ein geometrisches Objekt zeichnen.	menu *Punkte&Geraden*, *Formen, Konstruktion oder Abbildung* verwenden. Hilfe oben links auf dem Bildschirm anklicken.		
den Zugmodus anwenden.	Cursor auf das zu bewegende Objekt setzen, bis er die Form einer offenen Hand ✋ hat, dann Klicken, bis sich das Handsymbol schließt ✋ , mit Klicktasten ◀ ▶ ▲ ▼ oder über das Touchpad streichen.		
eine zentrische Streckung ausführen.	menu *Abbildungen – Streckung* Objekt anklicken, Streckzentrum anklicken, Streckfaktor eingeben oder anklicken		
einen Schieberegler einfügen.	menu *Aktionen – Schieberegler einfügen,* Einstellungen vornehmen		
geometrische Größen messen.	Cursor auf das zu messende Objekt setzen, menu *Messung* und die zu messende Größe wählen, Für eine Winkelmessung drei Punkte anklicken, die den Winkel kennzeichnen, der Scheitelpunkt muss der zweite anzuklickende Punkt sein. Das Winkelmaß DEG einstellen z. B. mit menu *Einstellungen.*		
Rechnungen auf dem Geometrieblatt durchführen.	Mit menu *Messung* die benötigten Größen messen, mit menu *Aktionen Text* den Term für die Berechnung eingeben, mit menu *Aktionen Berechnen* die für die Berechnung gemessenen Größen in der angezeigten Reihenfolge anklicken.		

5. Wahlbereich 1: Programmierung mathematischer Algorithmen

Wahlbereich 1: Programmierung mathematischer Algorithmen	
Beherrschen des umgangssprachlichen Beschreibens von Algorithmen	Programmieren eines Videorecorders, Kochrezepte ➔ INF, Kl. 8, LB 2
Kennen des Umsetzens einfacher Algorithmen in der Programmierebene des GTR unter Verwendung der allgemeinen Grundstrukturen Sequenz, Verzweigung und Zyklus	Programme zur Berechnung von Flächeninhalten, Volumina, Prozentwerten sowie zur Textausgabe und zur Simulation einfacher Zufallsversuche Hinweis auf EVA-Prinzip ⇒ Medienbildung Datenaustausch zwischen zwei GTR bzw. zwischen GTR und PC

Technische Hinweise für Lehrkräfte

Der TI-Nspire-CAS verfügt über 2 Programmiersprachen (TI-Basic und ab der Version 5.2 zusätzlich Python), welche schnell erlernbar und auch im Mathematikunterricht einsetzbar sind.

Hier werden kleinere und auch weiterführende Python-Programme vorgestellt, die die Verwendung der allgemeinen Grundstrukturen Sequenz, Verzweigung und Zyklus veranschaulichen und zum Weiterprobieren anregen sollen.

1. Berechnungen an geometrischen Objekten

2. Simulation einfacher Zufallsversuche

3. Tauschen zweier Variablen - Sortieren von Zahlen

4. Das Heronverfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel

5. Größter gemeinsamer Teiler zweier Zahlen

6. Maximum einer Liste suchen

Zunächst verweisen wir hier auf die folgende Webseite
https://education.ti.com/en/activities/ti-codes/python/TI-Nspire

Dort finden Sie einen kurz gefassten Einstieg in die Programmiersprache Python in 5 Lektionen.
Die hier vorgestellten kleinen Programme sollen diesen Einstieg in das Programmieren mit Python unterstützen.
Bei den vorgeschlagenen Programmen wird bewusst auf den Import TI-spezifischer Bibliotheken (wie z.B. tI_system) weitgehend verzichtet, sodass diese Programme auch in einer Python-IDE programmiert und ausgeführt werden können.
Wir verwenden bei allen Programmen durchgängig Kleinschreibung und verzichten auf Umlaute, da beides das Programmieren mit dem Handheld vereinfacht.

Problem 1: Berechnungen an geometrischen Objekten

Aufgabe 1
Schreibe ein Programm, das nach Eingabe von Länge und Breite den Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks berechnet und ausgibt.
Hinweis: Beachte, dass die Seitenlängen als Fließkommazahlen gespeichert werden müssen.

```
1.1 1.2 1.3 sachsen_..4_1 RAD
rechteck.py 7/7
print("rechteck")
a = float(input("laenge = "))
b = float(input("breite  = "))
fl = a*b
um = 2*a + 2*b
print("flaeche = ",fl," cm^2")
print("umfang = " ,um," cm")
```

Nach Starten des Programms mit CTRL-R in der Python-Shell wird das Programm nach Eingabe von Länge und Breite einmal ausgeführt.

```
Python-Shell 8/8
>>>#Running rechteck.py
>>>from rechteck import *
Rechteck
Länge = 34
Breite = 56
Fläche = 1904.0 cm^2
Umfang= 180.0 cm
>>>
```

Aufgabe 2
Schreibe ein Programm, das nach Eingabe eines Radius den Flächeninhalt und den Umfang des zugehörigen Kreises berechnet und ausgibt.
Hinweis: Zur Lösung vieler mathematischer Problemstellungen benötigt man die Bibliothek „math“, die importiert werden muss.

```
1.2 1.3 1.4 sachsen_..4_1 RAD
*kreis.py 1/10
from math import *

print("kreis")
r = float(input("radius = "))
fl = pi*r**2
um = 2*pi*r
print("flaeche =",fl," cm^2")
print("umfang =" ,um," cm")
```

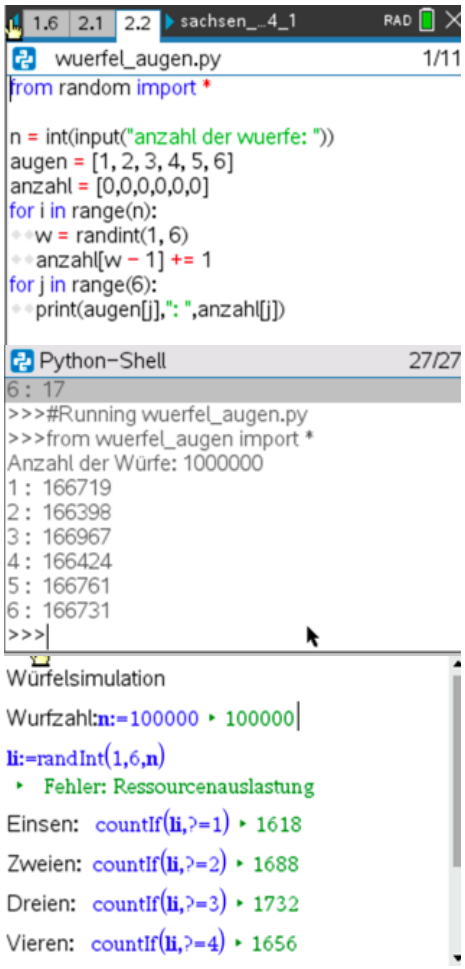
Aufgabe 3
Schreibe ein Programm, das nach Eingabe der Seitenlängen eines Dreiecks überprüft, ob ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt.
Hinweise:
1. „==“ ist in Python der Vergleichsoperator.
2. Nutze für Kontrollstrukturen – hier „IF...Else – die entsprechenden Menüs.
3.Nutze zur Überprüfung den Satz des Pythagoras, informiere dich dazu vorher im Internet.
4. Sonderfälle mit zwei gleich langen Seiten sind hier nicht berücksichtigt, dies kann als Zusatzaufgabe gelöst werden.

```
1.4 1.5 1.6 sachsen_..4_1 RAD
dreieck.py 1/10
print("dreieck")
h  = float(input("laengste Seite  =  "))
k1 = float(input("mittlere Seite  =  "))
k2 = float(input("kuerzeste Seite =  "))

if h**2 == k1**2 + k2**2:
    print("dreieck ist rechtwinklig")
else:
    print("dreieck ist nicht rechtwinklig")
```

Problem 2: Simulation einfacher Zufallsversuche

Aufgabe 1
Ein Würfel wird mehrfach geworfen. Ausgegeben werden die jeweiligen Augenzahlen und ihre Anzahl.
(Idee Veit Berger)
Hinweise:
1. Hier wird z. B. die Bibliothek **random** genutzt.
2. Erstmals wird hier eine Zählschleife verwendet.
3. Listen, wie „augen“ und „anzahl“ können ebenfalls über das Menü „Eingebaute“ definiert werden.
4. Vorteil dieses Programms gegenüber einer Bearbeitung mit ***Lists&Spreadsheet*** bzw. ***Notes*** ist z. B., dass man mit sehr großen Wurfzahlen arbeiten kann.



Aufgabe 2
Ein Würfel wird mehrfach geworfen. Ausgegeben werden die jeweiligen Augenzahlen und die Anzahl der Würfe, bis das erste Mal eine 6 erscheint.
Hinweise:
1. Da die Anzahl der Durchläufe nicht bekannt ist, verwendet man hier eine kopfgesteuerte Schleife (while).
2. „!=“ ist der Vergleichsoperator „ungleich“
wuerfe += 1 bedeutet, dass der Wert der Variablen wuerfe um 1 erhöht wird.

Problem 3: Tauschen zweier Variablen - Sortieren von Zahlen

Aufgabe 1
Tauschen zweier Variablen

Zwei Zahlen werden zwei Variablen zugewiesen.
Zum Beispiel: 2 ↦ a und
3 ↦ b. Das Programm soll den Variablen a und b jeweils die andere Zahl zuweisen, also tauschen.
Hinweis:
Hier verwendet man den „klassischen“ Tauschalgorithmus mit Hilfe einer Hilfsvariable.

```
3.1 3.2 4.1 sachsen_..4_1 RAD
tausch.py 1/10
print("tauschen von variablenwerten")
a = input("wert für a = ")
b = input("wert für b = ")
print("variable a = ", a, " variable b = ", b)
h = a
a = b
b = h
print("variable a = ", a, " variable b = ", b)
```

Aufgabe 2
Sortieren

Nach Eingabe von drei paarweise verschiedenen Zahlen sollen diese aufsteigend geordnet ausgegeben werden.
Hinweis:
Zum Tauschen kann folgende Python-Funktion verwendet werden: a,b = b,a

```
3.2 4.1 4.2 sachsen_..4_1 RAD
*sort_3.py 7/12
print("sortieren von drei verschiedenen zahlen")
z1 = input("zahl 1 = ")
z2 = input("zahl 2 = ")
z3 = input("zahl 3 = ")
if z1>z2:
  z1,z2 = z2,z1
if z1>z3:
  z1,z3 = z3,z1
if z2>z3:
  z2,z3 = z3,z2
print(z1, "<", z2, "<" , z3)
```

Aufgabe 3
Sortieren

Nach Eingabe von drei Zahlen sollen diese aufsteigend geordnet ausgegeben werden.
Dabei soll bei Eingabe gleicher Zahlen nur das Relationszeichen = verwendet werden.
Hinweis:
Rechts ist nur ein Teil des Programms zu sehen, es müssen weitere Fallunterscheidungen getroffen werden.

```
4.2 4.3 4.4 sachsen_..4_1 RAD
sort_mit_gleich.py 1/31
print("sortieren von drei zahlen")
z1=input("zahl 1 = ")
z2=input("zahl 2 = ")
z3=input("zahl 3 = ")
if z1 != z2 and z2 != z3:
  if z1<z2:
    z1,z2 = z2,z1
  if z1<z3:
    z1,z3=z3,z1
  if z2<z3:
    z2,z3=z3,z2
```

Aufgabe 4

Die gleiche Aufgabenstellung wie bei Aufgabe 3.

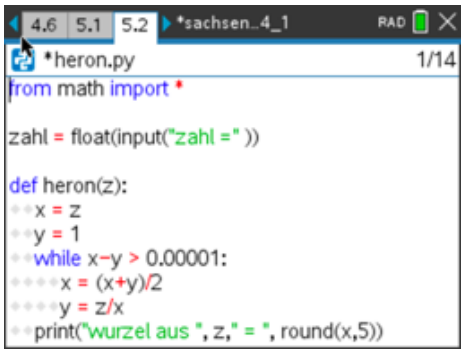
Hier mit der „eleganten“ Idee, nach dem Sortieren der Zahlen die richtigen Relationszeichen zu setzen.

```
4.4 4.5 4.6 sachsen_..4_1 RAD
sort_3g.py 1/20
print("sortieren von drei zahlen")
z1 = int(input("zahl 1 = "))
z2 = int(input("zahl 2 = "))
z3 = int(input("zahl 3 = "))
if z1 > z2:
  z1, z2 = z2, z1
if z1 > z3:
  z1, z3 = z3, z1
if z2 > z3:
  z2, z3 = z3, z2

rel1_2 = "<"
rel2_3 = "<"
if z1 == z2:
  rel1_2 = "="
if z2 == z3:
  rel2_3 = "="
print(z1, rel1_2, z2, rel2_3 , z3)
```

Problem 4: Das Heronverfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel

Heron von Alexandria, geboren um 10 n. Chr., gestorben um 70 n. Chr., war ein griechischer Mathematiker, er lebte in Alexandria.
Schreibe ein Programm, das nach Eingabe einer Zahl nach dem Heronverfahren auf fünf Nachkommastellen genau die Wurzel berechnet.
Hinweise:
Verwende dazu eine Funktion heron(z), die die Zahl übergeben bekommt.
Das Ergebnis wird mit dem „round"-Befehl auf 5 Nachkommastellen gerundet.



Problem 5: Größter gemeinsamer Teiler zweier Zahlen

Schreibe ein Programm, das den ggt zweier einzugebender Zahlen bestimmt und ausgibt.
Hinweise: Der TI hat solch eine Funktion gcd(a,b) schon implementiert.

Problem 6: Maximum einer Liste suchen

Maximum suchen
Zehn ganze Zahlen werden zufällig erzeugt und nacheinander in eine Liste geschrieben. Diese Liste wird ausgegeben.
Zusätzlich wird in der Liste die größte Zahl gesucht und ebenfalls ausgegeben.
Dabei werden zwei Funktionen verwendet.

Lösungen: vgl. Datei sachsen_programme_5.tns

6. Wahlbereich 2: Lineare Optimierung

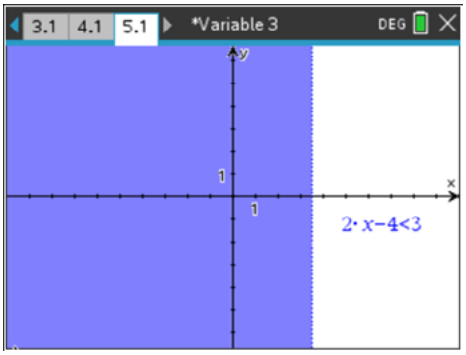
Wahlbereich 2: Lineare Optimierung	
Kennen einer Schrittfolge zum Lösen linearer Optimierungsprobleme - Einführen von Variablen - mathematisches Modellieren des Sachverhaltes - Erstellen einer grafischen Darstellung - Suchen nach dem Extremum in Tabellen oder in der grafischen Darstellung unter Nutzung der Zielfunktion - Herstellen von Beziehungen zur Problemstellung	Beispiele aus der Ökonomie (Kosten-Gewinn-Analyse) und der Erfahrungswelt der Schüler Nutzen von GTR-Listen, Funktionsplottern oder TK

Typische Problemstellungen aus diesem Bereich erfordern zunächst eine mathematische Modellierung, um zwei Variablen zu betrachten, die dann im $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden können.
Ausgangspunkt für Aufgaben zur linearen Optimierung sind Ungleichungen und insbesondere deren grafische Veranschaulichung. Aus einem praktischen Problem leitet man Beziehungen zu zwei Variablen, die man mit x und y bezeichnen kann, her und versucht damit, Maxima bzw. Minima einer Zielfunktion z(x,y) = ax +by zu bestimmen. Die Zielfunktionen z können z. B. der Gewinn bzw. die Produktionskosten eines Unternehmens sein.
Damit ist die Grundidee zur Lösung beliebig schwieriger linearer Optimierungsaufgaben gegeben.

Technische Hinweise für Lehrkräfte

Darstellung der Lösungsmengen von Ungleichungen

Lösungsmengen einiger Ungleichungen lassen sich grafisch veranschaulichen. Öffnen Sie dazu die Anwendung ***Graphs*** und dort mit menu – Graph – Eingabe/Bearbeitung die Anwendung *Relation*. Geben Sie dort z. B. die Ungleichung 2x – 4 < 3 ein.



Diese Art der Darstellung kann nun genutzt werden, um Aufgaben zu bearbeiten, die zur linearen Optimierung gehören.

Lösungsschritte

1. Variablen x und y definieren und mit Hilfe der gegebenen Bedingungen die Ungleichungen aufstellen.

2. Die Ungleichungen grafisch darstellen und das sogenannte Planungspolygon, welches alle Ungleichungen erfüllt, markieren.

3. Zielfunktion $z(x,y) = a \cdot x + b \cdot y$ aufstellen.

4. Betrachtet man z als veränderlichen Parameter, so stellt $z = a \cdot x + b \cdot y$ eine Geradenschar mit konstanter Steigung dar. Verschiebt man nun diese Geradenschar so im Planungspolygon, dass die äußere Ecke oben rechts (Gewinnmaximierung) bzw. unten links (Kostenminimierung) gerade berührt wird, hat man den optimalen Wert ermittelt.

Das Optimum kann man algebraisch durch Einsetzen der Koordinaten dieses Punktes in die Zielfunktion z(x,y) ermitteln oder man stellt die Zielfunktion z als Geradenschar mit dem Parameter z dar und verschiebt diese Gerade dann bis zum interessierenden Eckpunkt.

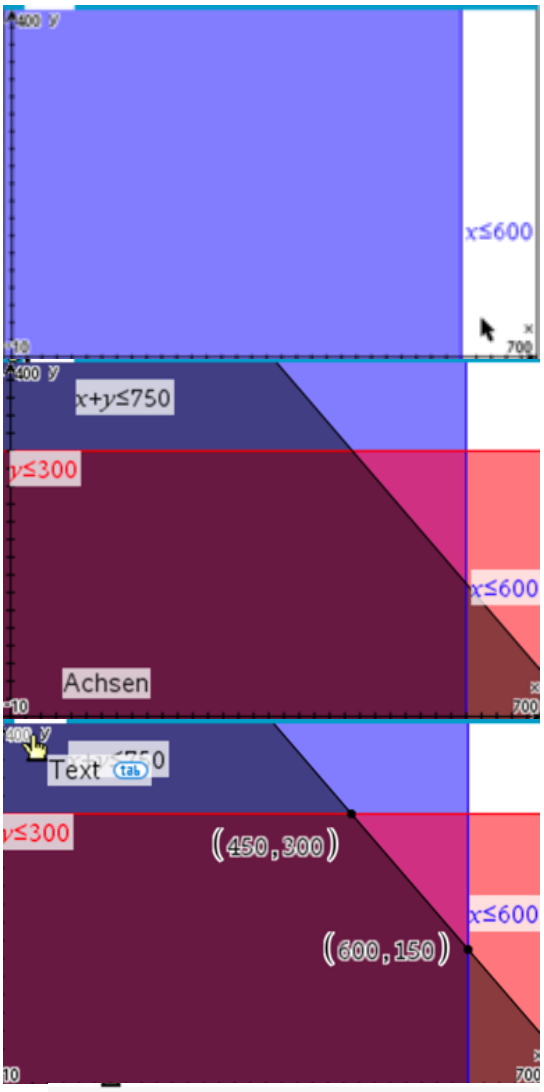
Höherdimensionale Probleme sind bis zum Grad drei noch grafisch lösbar, danach existieren entsprechende Algorithmen (z. B. Simplexalgorithmus).

Die folgenden drei Beispiele sind zunächst zum Nachvollziehen der Vorgehensweise mit Lösungen versehen, es folgt dann ein Arbeitsblatt mit Aufgaben zum selbstständigen Bearbeiten.

Beispiel 1: Gewinnmaximierung

Ein Automobilhersteller produziert zwei Wagentypen A und B. Vom Typ A können täglich maximal 600 Stück fertiggestellt werden, vom Typ B maximal 300 Stück, wegen Mangel an Personal jedoch nicht mehr als 750 Stück insgesamt. Der Reingewinn für einen Wagen vom Typ A beträgt 2400 €, für einen Wagen vom Typ B 3600 €.
Wie viele Wagen müssen täglich von jedem Typ produziert werden, wenn der Reingewinn maximal werden soll? Wie groß ist dieser Reingewinn?[17]

Die gegebenen Bedingungen lassen sich in entsprechende Ungleichungen übersetzen, welche direkt über die Ansicht „Relationen“
(in der Applikation ***Graphs***: menu - 3- 2) eingegeben werden können.



$z(x,y):=2400\cdot x+3600\cdot y$	*Fertig*
$z(450,300)$	2160000
$z(600,150)$	1980000

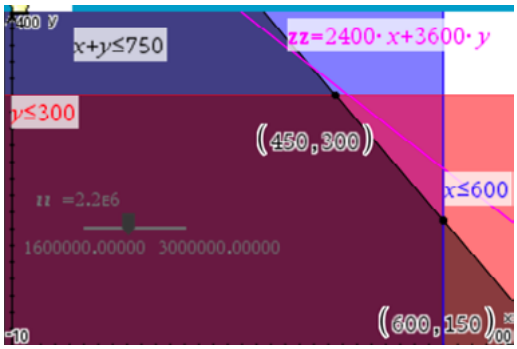
Es ergeben sich nach dem Eintragen der drei Ungleichungen
$x \leq 600$ maximal 600 Fahrzeuge vom Typ A
$y \leq 300$ maximal 300 Fahrzeuge vom Typ B
$x+y \leq 750$ maximal 750 Fahrzeuge am Tag
die rechts dargestellten Überlappungen dieser Teilebenen.

Betrachtet man nun die Schnittpunkte der Geraden y = 750 – x mit den beiden anderen Geraden (man betrachtet die Kanten des Planungspolygons), so erhält man P(450; 300) bzw.
Q(600; 150).
Für maximalen Gewinn müssen 450 Wagen vom Typ A und 300 vom Typ B produziert werden.

Die Zielfunktion z(x,y) = 2400x + 3600y liefert für den Punkt P den Maximalgewinn von 2160000 €.

[17] Vgl. B. Frei, R. Hugelshofer, R. Märki, Lineare Funktionen und Gleichungen TI 2011

Nutzung eines Schiebereglers
(hier mit zz bezeichnet)



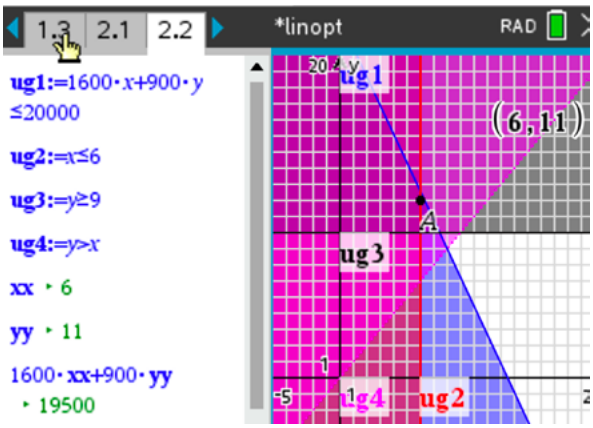
Beispiel 2: Fahrradkauf - Anzahlmaximierung

Eine Jugendherberge will für 20000 € Leihräder anschaffen. Es sollen höchstens sechs E-Bikes zu 1600 € und mindestens neun einfache Fahrräder zu 800 € angeschafft werden. Es sollen aber so viele Räder wie möglich angeschafft werden.

Hinweis: Beachte, dass es nur ganzzahlige Lösungen geben kann und nutze ggf. die Applikation ***Notes***.

Übersetzung der gegebenen Bedingungen in das Ungleichungssystem:

ug1: 20000 € stehen für den Kauf beider Räderarten maximal zur Verfügung.
ug2: Es sollen höchstens 6 E-Bikes gekauft werden.
ug3: Es sollen mindestens 9 einfache Fahrräder gekauft werden.
ug4: Die Anzahl der einfachen Räder muss größer als die Anzahl der E-Bikes sein.

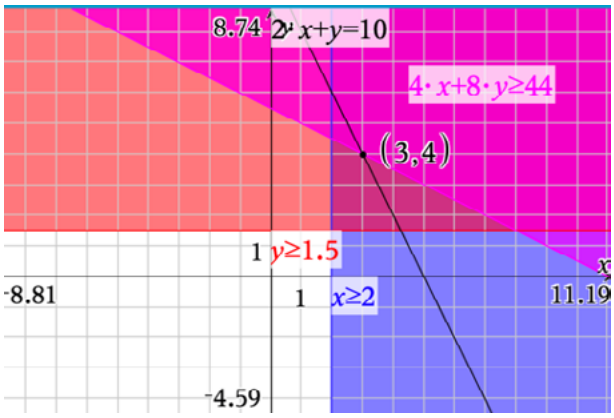


Beim Kauf von sechs E-Bikes und elf einfacher Räder kann die Summe von 20000 € fast vollständig ausgeschöpft werden.

Beispiel 3: Minimierungsproblem[18]

Peter kalkuliert scharf! Er muss in zwei Fächern - nämlich in Mathematik und in Englisch - eine Nachprüfung machen. Um den versäumten Stoff nachzuarbeiten, benötigt er in Mathematik mindestens zwei Tage und in Englisch mindestens anderthalb Tage. Das Nacharbeiten allein genügt nicht, da er auch den Stoff üben muss. Bei einem Arbeitsaufwand von einem Tag kann er in Mathematik vier Punkte und in Englisch acht Punkte oder eine entsprechende Kombination bei einer anderen Tagesaufteilung erreichen. Insgesamt muss er in beiden Fächern zusammen mindestens 44 Punkte erreichen. Sein Freund hat sich bereit erklärt, mit ihm mindestens zehn Stunden zusammenzuarbeiten, und zwar täglich zwei Stunden im Fach Mathematik und eine Stunde im Fach Englisch. Wie muss Peter seine Zeit einteilen, damit er mit einem möglichst geringen Aufwand sein Ziel erreicht?

Übersetzung der gegebenen Bedingungen in das Ungleichungssystem:
x: Anzahl der Tage für Mathematik
y: Anzahl der Tage für Englisch
$x \geq 2 \qquad y \geq 1{,}5$
$2x + y = 10 \; und \; 4x+8y \geq 44$
Zielfunktion: z = x + y



Die Zielfunktion berührt im Punkt P(3; 4) das Planungspolygon.
Dies bedeutet, dass Peter mindestens vier Tage Mathematik und drei Tage Englisch lernen muss, um mit minimalem Aufwand die Prüfung zu bestehen.

[18] Vgl. B. Frei, R. Hugelshofer, R. Märki, Lineare Funktionen und Gleichungen TI 2011

Arbeitsblatt 1: Lineare Optimierung

Aufgabe 1

Eine Computerfirma stellt Tablets in den Ausführungen N und H her.
Für die Produktion müssen zwei Fertigungslinien A und B durchlaufen werden, die beide wöchentlich jeweils maximal 80 Stunden genutzt werden können. Die Produktion eines Tablets der Ausführung N benötigt zwei Stunden in Linie A und eine Stunde in Linie B. Die Produktion eines Tablets der Ausführung H benötigt 1,5 Stunden in Linie A und zwei Stunden in Reihe B. Der Gewinn für Tablets der Ausführung N beträgt 180 € für die Ausführung H 240 €.

Bei welcher Anzahl an produzierten Tablets wird der Gewinn maximal?

Aufgabe 2

Ein Plüschtierhersteller stellt Teddys (T), Katzen (K) und Elefanten (E) her. Der Gewinn beträgt pro Teddy 8 €, pro Katze 6 € und pro Elefant 5 €.

Berechne den maximalen Gewinn, wenn folgende Bedingungen beachtet werden müssen:
a) Pro Monat werden 1000 Plüschtiere hergestellt werden.
b) Es müssen mindestens 250 Teddys und 200 Katzen hergestellt werden.
c) Es dürfen aber zusammen nicht mehr als 700 Teddys und Katzen hergestellt werden.

Aufgabe 3

Die Fußböden einer Schule haben eine Fläche von 6000 m^2 und sollen mit zweierlei Belag ausgestattet werden. Der erste Belag kostet 20€/m^2, die zweite Sorte 30€/m^2. Die Reinigungskosten pro Jahr sind bei der zweiten Sorte nur halb so groß, wie bei der ersten Sorte, bei der sie 4€/m^2 ausmachen. Für den Kauf des Belages stehen maximal 160 000€ zur Verfügung.

Welche Auswahl muss getroffen werden, damit Reinigungskosten möglichst klein gehalten werden können?

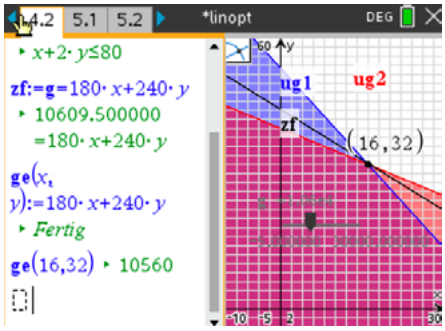
WB 2 Lösungen zum Arbeitsblatt 1

1. Version N: x, Version H: y

Zielfunktion G= 180x + 240y
Nebenbedingungen:

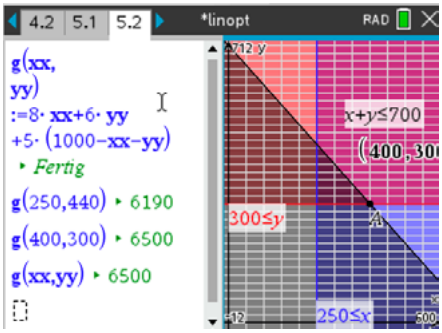
2 x + 1,5 y <= 80
x + 2y <= 80

Für x = 16 und y = 32 ergibt sich der Maximalgewinn zu 10560 €, d. h man muss 16 Tablets der Ausführung N und 32 der Ausführung H herstellen.



2.
Teddys: x
Katzen: y
Elefanten: z = 1000 – x – y

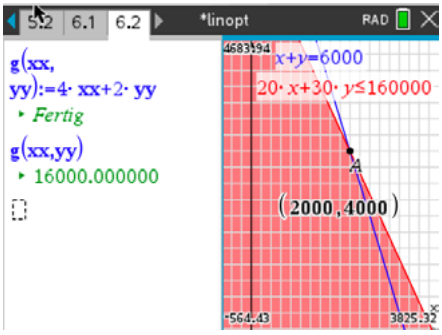
Zielfunktion G= 8x + 6y + 5(1000 – x – y)
Nebenbedingungen
x >= 250
y >= 200
x + y <= 700
Für x = 400, y = 300 und z = 300 ergibt sich der Maximalgewinn von 6500 €.



3. Belag kostet 20€/ m²: x
Belag kostet 30€/ m²: y

Zielfunktion K = 4x + 2y
Nebenbedingungen
20x + 30y <= 160 000
x + y = 6000

Für x = 2000 und y = 4000 ergibt sich das Minimum von 16000 € an Reinigungskosten pro Jahr. Dabei wird die zum Kauf zur Verfügung stehende Summe vollständig genutzt.



Ausführliche Lösungen:
Vergleiche Datei linopt.tns

Checkliste Lineare Optimierung

Ich möchte …	Was tust Du?	Das kann ich sicher.	Ich muss das noch üben.
Lösungsmengen von Ungleichungen darstellen.	Öffne die Anwendung ***Graphs*** und dort mit menu – *Graph* – *Eingabe/Bearbeitung* die Anwendung *Relation*. Gib dort die Ungleichung ein.		
Relationen darstellen.	Öffne die Anwendung ***Graphs*** und dort mit menu – *Graph* – *Eingabe/Bearbeitung* die Anwendung *Relation*. Gib dort die Relation ein.		
Schnittpunkte im Grafikfenster bestimmen.	In der Anwendung ***Graphs*** mit menu – *Graph analysieren* – *Schnittpunkt* wählen und dann ggf. die Relationen/Ungleichungen auswählen, deren Schnittpunkt bestimmt werden soll.		

Literaturhinweise:

Auf den deutschsprachigen Webseiten von Texas Instruments (TI) education.ti.com/de findet man unter der Rubrik „Downloads“ verschiedene Handbücher zum TI-NspireCX II-T CAS™ z.B.
...

Alle im Text beschriebenen Programme, die TI Codes und viel mehr nützliche Unterrichtsmaterialien finden Sie auf der TI Materialdatenbank unter www.ti-unterrichtsmaterialien.net oder gehen Sie auf www.t3europe.eu.

Unter der Rubrik „Resources“ gibt es auch unzählige fremdsprachige Materialien.

T³ Teachers Teaching with Technology

Netzwerk
Das T³ Lehrerfortbildungsnetzwerk richtet sich an Sie, an Lehrerinnen und Lehrer, die sich zum sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge im MINT-Unterricht austauschen und weiterentwickeln wollen. T³ Deutschland ist Teil des internationalen T³ Netzwerks.

Fortbildungen
T³ Deutschland bietet Ihnen pädagogisch-didaktische Unterstützung in Form von schulinternen Fortbildungen, Online-Seminaren und Tagungen an.

Materialien
Aufgabenbeispiele, Tutorials, Videos und mehr nützliche Materialien für Ihren MINT-Unterricht stellen wir auf der Materialdatenbank kostenlos zur Verfügung.

Der T³ EduBlog bietet exklusive Interviews, inspirierende Erfahrungsberichte und mehr

Informieren Sie sich. Machen Sie mit!

Nehmen Sie Kontakt zu uns auf unter:
www.t3deutschland.de | info@t3deutschland.de

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

@T3Europe **T3 Europe**

TI-Nspire™ CX CAS Technologie

Ob Handheld, Software (Win/Mac) oder Tablet (Win/iPad) - alle Produkte sind einzeln oder als integrierte Lösung einsetzbar. Passendes Zubehör unterstützt den fächerübergreifenden Einsatz in Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik (MINT).

Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank, auch ganz speziell zur TI-Nspire™ CX Technologie.

Schauen Sie mal rein:
TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

- Nutzen Sie beispielsweise unser kostenloses Ausleihprogramm!
- Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten.
- Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

www.youtube.com/TIedtechDE

education.ti.deutschland

@TIEducationDE

www.t3deutschland.de

education.ti.com

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Texas Instruments