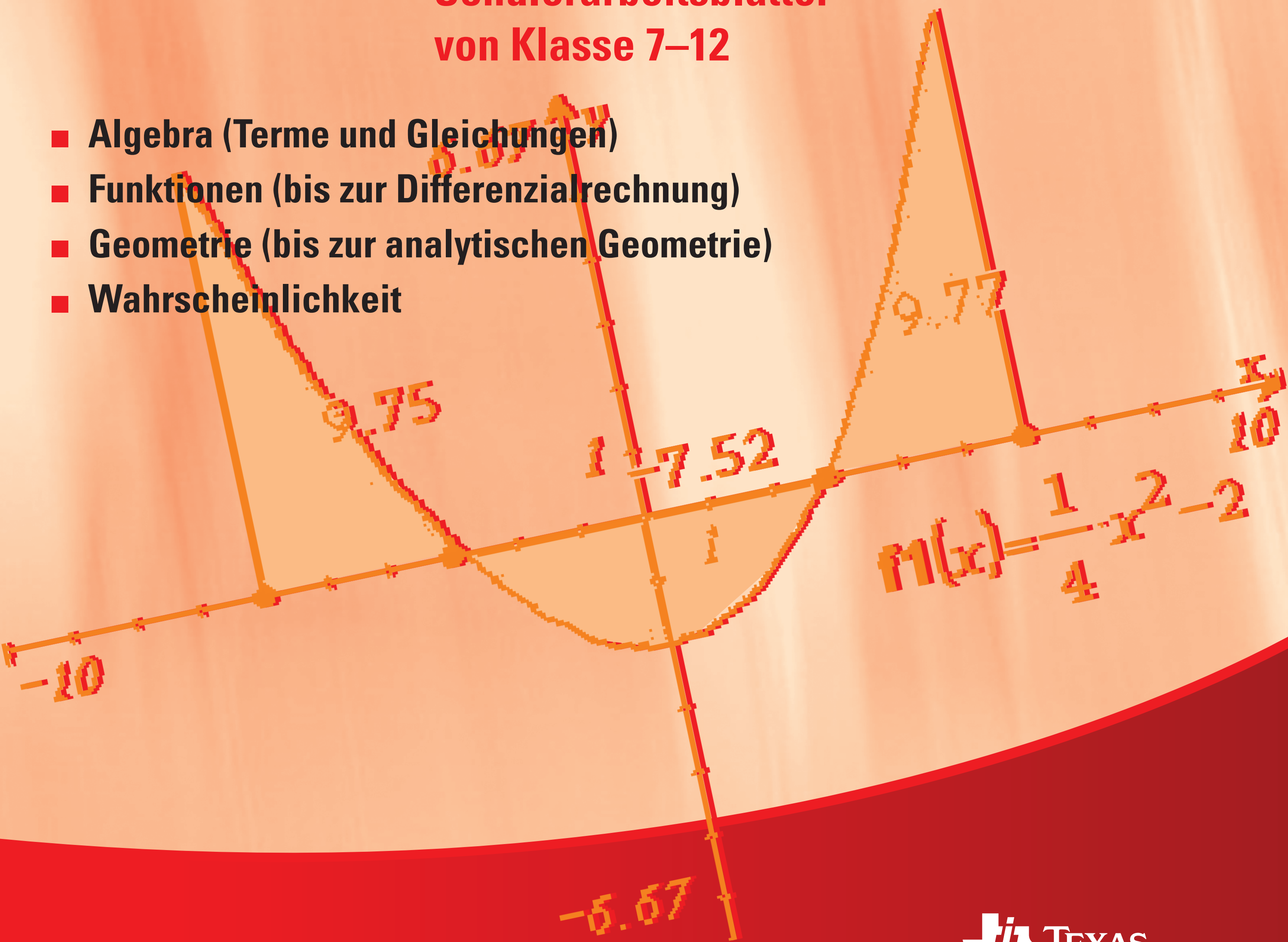
Materialien für TI-Nspire™ CAS Handheld,
TI-Nspire™ CAS *mit Touchpad,*
TI-Nspire™ CAS Software

Gerhard Bitsch, Heike Jacoby-Schäfer,
Michael Kölle, Markus Schwarz

Unterrichtsmaterialien zum CAS Einsatz

Schülerarbeitsblätter von Klasse 7–12

- Algebra (Terme und Gleichungen)
- Funktionen (bis zur Differenzialrechnung)
- Geometrie (bis zur analytischen Geometrie)
- Wahrscheinlichkeit



Texas Instruments
Ihre Erfahrung. Unsere Technologie. Mehr Lernerfolg.

**Gerhard Bitsch, Heike Jacoby-Schäfer,
Michael Kölle, Markus Schwarz**

Unterrichtsmaterialien zum CAS Einsatz

Schülerarbeitsblätter von Klasse 7-12

Inhaltsverzeichnis

die mit * gekennzeichneten Arbeitsblätter decken die notwendigen Bedienungskompetenzen bis zum Abitur ab.

Vorwort

Im Schuljahr 2006/2007 war das Kepler-Gymnasium Tübingen Pilotschule zur Einführung des TI-Nspire™ CAS in Klasse 7. Nach ersten positiven Erfahrungen wurde eine flächendeckende Einführung in allen Jahrgangsstufen beschlossen. Zum Erlernen der Bedienungselemente haben sich in der Pilotphase Schülerarbeitsblätter bewährt. Daraus entstand die Idee eines wachsenden Handbuchs zur Sicherung der Bedienungskompetenzen.
Es orientiert sich am Bildungsplan Baden-Württemberg und ist konkret ausgerichtet an den Unterrichtsthemen der Jahrgangsstufen 7 bis 12.

Das Handbuch besteht aus Arbeitsblättern, die unter den Lehrkräften ausgetauscht und im Unterricht erprobt wurden. Aufgrund der gemachten Erfahrungen haben wir die Arbeitsblätter überarbeitet und optimiert. Die Einbindung der Arbeitsblätter ins Schulcurriculum soll einen systematischen Aufbau und einheitlichen Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler ermöglichen. Sie sind allen Kolleginnen und Kollegen unserer Fachschaft schulintern zugänglich.

Zum Abschluss der Projektphase möchten wir unsere gemachten Erfahrungen anderen interessierten Kolleginnen und Kollegen mit der vorliegenden Handreichung zur Verfügung stellen.

Wichtig war uns:

- Die vorliegenden Arbeitsblätter sollen einen einfachen Einstieg für Schüler und Lehrer in die neue Technologie ermöglichen
- Die kleinschrittige Vorgehensweise soll motivieren und die eigene Hemmschwelle, den Rechner im Unterricht zu verwenden, herabsetzen.
- Die Arbeitsblätter behandeln typische Aufgabenstellungen des Mathematikunterrichts der jeweiligen Jahrgangsstufen ab Klasse 7.
- Es wurde unterschieden zwischen Arbeitsblättern, die die notwendigen Bedienungskompetenzen bis zum Abitur abdecken (mit * gekennzeichnet) und Arbeitsblättern, die aus didaktischer Sicht eine sinnvolle Ergänzung darstellen.

Die vorliegenden Arbeitsblätter für den TI-Nspire™ CAS (Version 1.7) und den TI-Nspire™ CAS mit *Touchpad* (ab Version 2.0) können als Kopiervorlage verwendet werden.
Sie liefern das notwendige Fundament für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts mit neuen Technologien.

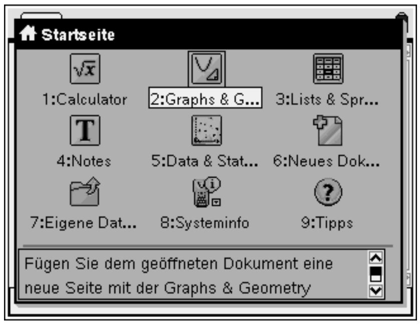
Gerhard Bitsch
Heike Jacoby-Schäfer
Michael Kölle
Markus Schwarz
unter Mitarbeit von Tobias Kaatze und Robert Stark

Erste Schritte mit dem TI-Nspire™ CAS

1. Grundlagen

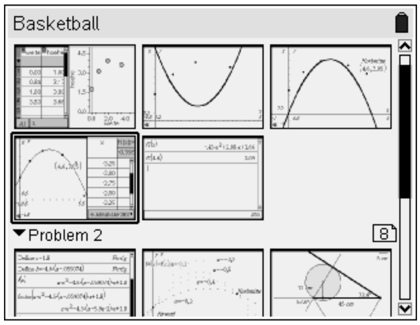
Hometaste

Die wichtigste Taste des TI-Nspire™ CAS ist die Hometaste ⌂.
Sie öffnet ein Fenster, von dem aus man alles Wichtige erreichen kann.
Im TI-Nspire™ CAS wird, wie Du es von Word oder Powerpoint kennst, immer in einem **Dokument** gearbeitet.



Dokumentenstruktur

Jedes Dokument kann mehrere Seiten haben.
In einem Dokument kann man auch mehrere Probleme (Themen) haben, was aber bei uns sicher selten vorkommt.
Jede Seite kann in bis zu vier Teile geteilt werden.
Jeder Teil kann eine der TI-Nspire™ CAS-Anwendungen (Calculator, Graphs & Geometry, Lists & Spreadsheet, Notes oder Data & Statistics) enthalten.



Dateien und Ordner – Neues Dokument

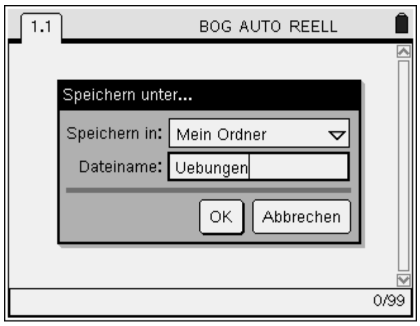
Zunächst verschaffst Du dir einen Überblick, ob schon Ordner und Dateien gespeichert sind, mit ⌂ 7: Eigene Dateien.
Über die Menü-Taste menu stehen weitere Befehle zur Verfügung.
Du sollst nun einen neuen Ordner mit dem Namen *„Mein Ordner“* anlegen:
Gib die Tasten menu 1 ⇧ M E I N ␣ O R D N E R ein und bestätige mit ☝ oder enter.

Das Anlegen eines neuen Dokumentes, z.B. mit einer Calculator-Seite, geht ganz einfach mit: ⌂ 6 1.
Ehe Du mit dem Rechnen loslegst, kannst Du dieses neue Dokument z.B. in deinem *neu angelegten Ordner* speichern.

Du erreichst verschiedene Verwaltungsbefehle für ein Dokument im Menü **Extras** über ctrl ⌂.

Speichern von Dokumenten

Mit der Eingabe ctrl ⌂ 1 4: „Speichern unter“ oder ctrl S lässt sich das Dokument speichern.
Mit der Tab-Taste tab kannst Du zwischen den Eingabefeldern wechseln, um zum Beispiel den Ordner auszuwählen, in dem die Datei gespeichert werden soll, oder zum Anspringen der OK-Schaltfläche.
Im Auswahlfeld für den Ordner kannst Du mit ▲ und ▼ nach oben und unten navigieren und mit enter oder ☝ bestätigen.
Wenn der richtige Ordner ausgewählt ist und Du das Feld für den Dokumentnamen aktiviert hast, gibst Du den Namen ein, z.B. U E B U N G E N und bestätigst mit der $\boxed{\text{OK}}$-Schaltfläche oder durch enter.



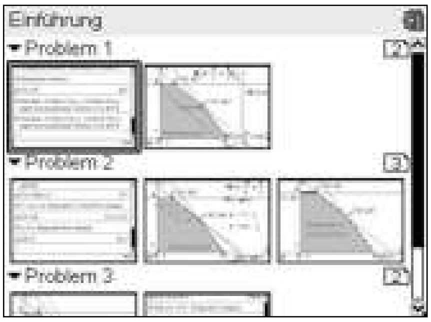
1. Grundlagen

Hometaste

Die wichtigste Taste des TI-Nspire™ CAS ist die Hometaste (on).
Sie öffnet ein Fenster, von dem aus man alles Wichtige erreichen kann.
Im TI-Nspire™ CAS wird, wie Du es von Word oder Powerpoint kennst, immer in einem **Dokument** gearbeitet.

Dokumentenstruktur

Jedes Dokument kann mehrere Seiten haben.
In einem Dokument kann man auch mehrere Probleme (Themen) haben, was aber bei uns sicher selten vorkommt.
Jede Seite kann in bis zu vier Teile geteilt werden.
Jeder Teil kann eine der TI-Nspire™ CAS-Anwendungen (Calculator, Graphs, Geometry, Lists & Spreadsheet, Notes oder Data & Statistics) enthalten.

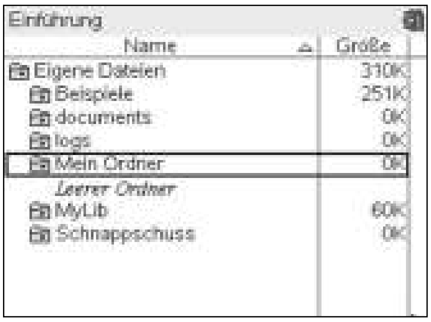


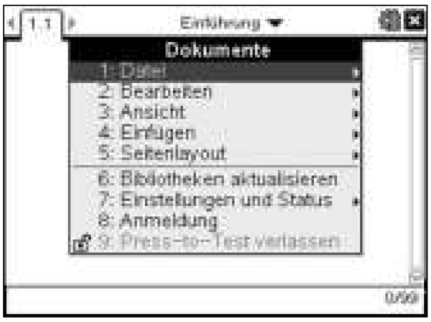
Dateien und Ordner – Neues Dokument

Zunächst verschaffst Du dir einen Überblick, ob schon Ordner und Dateien gespeichert sind, mit (on)(2): Eigene Dateien.
Über die Menü-Taste (menu) stehen weitere Befehle zur Verfügung.
Du sollst nun einen neuen Ordner mit dem Namen *„Mein Ordner“* anlegen:
Gib die Tasten (menu)(1)(shift) M E I N ␣ O R D N E R ein und bestätige mit (click) oder (enter).

Das Anlegen eines **neuen Dokumentes**, z.B. mit einer Calculator-Seite, geht ganz einfach mit: (doc)(1)(1)(1).
Ehe Du mit dem Rechnen loslegst, kannst Du dieses neue Dokument z.B. in deinem *neu angelegten Ordner* speichern.

Du erreichst verschiedene Verwaltungsbefehle mit (doc) z.B. speicher mit (doc)(1)(4).





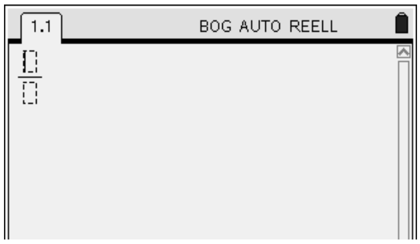
Speichern von Dokumenten

Mit der Eingabe (doc)(1)(5): „Speichern unter“ oder (ctrl) S lässt sich das Dokument speichern.
Mit der Tab-Taste (tab) kannst Du zwischen den Eingabefeldern wechseln, um zum Beispiel den Ordner auszuwählen, in dem die Datei gespeichert werden soll, oder zum Anspringen der Speichern -Schaltfläche.
Im Auswahlfeld für den Ordner kannst Du mit ▲ und ▼ nach oben und unten navigieren und mit (enter) oder (click) bestätigen.
Wenn der richtige Ordner ausgewählt ist und Du das Feld für den Dokumentnamen aktiviert hast, gibst Du den Namen ein, z.B. Übung und bestätigst mit der Speichern-Schaltfläche oder durch (enter).

2. Der Calculator

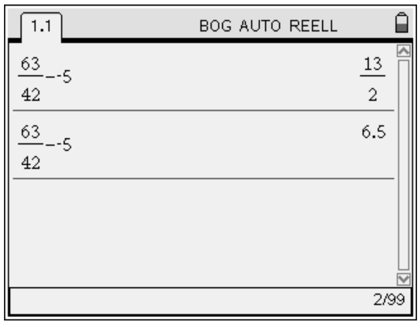
Dies ist der Rechnerbereich, in dem Du wie mit einem super komfortablen Taschenrechner arbeiten kannst. Beim Berechnen von Rechenausdrücken erhält man als Ergebnis (mit enter) (soweit möglich) exakte Werte, also Brüche.

Versuche es auch mit komplizierteren Rechenausdrücken,
1. Beispiel: $\frac{63}{42} - (-5)$.



Eingabe von Brüchen

1. Möglichkeit:
ctrl ÷ öffnet eine Vorlage für Brüche. Gib im Zähler 63 ein und platziere mit ▾ den Cursor im Nenner. Dort gibt man 42 ein. Die Pfeiltaste ▸ nach rechts bringt den Cursor wieder in die Mitte, anschließend − (−) 5 und enter.
Hinweis: Das Minus vor der 5 ist ein Vorzeichenminus.
Die zugehörige Taste (−) findet man in der untersten Reihe.

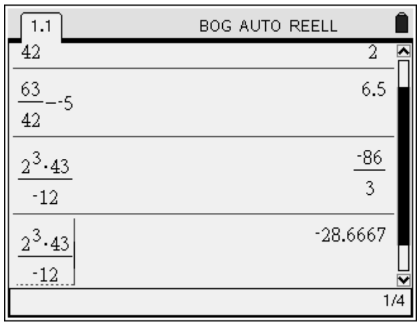


2. Möglichkeit:
Du kannst den Bruch auch mit der ÷-Taste eingeben, also 63 ÷ 42 – (−) 5 und enter.

Der Calculator liefert als Ergebnis einen Bruch.
Um die zugehörige Dezimalzahl zu erhalten drücke ctrl enter.

2. $\frac{2^3 \cdot 43}{-12}$

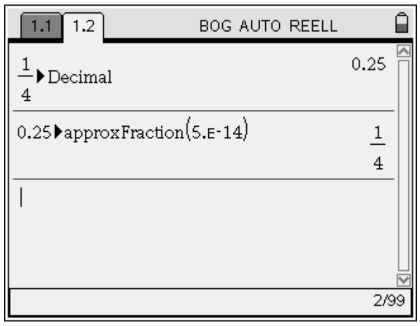
Wie im 1. Beispiel öffnest Du die Vorlage mit ctrl ÷. Die Hochzahl von 2^3 kannst Du mit der ^-Taste eingeben.
Hinweis: Auch hier musst Du anschließend einmal die Pfeiltaste ▸ drücken um den Cursor wieder aus der Hochzahl in die ursprüngliche Position zu bringen.



Umwandlung Dezimal- in Bruchzahl und umgekehrt

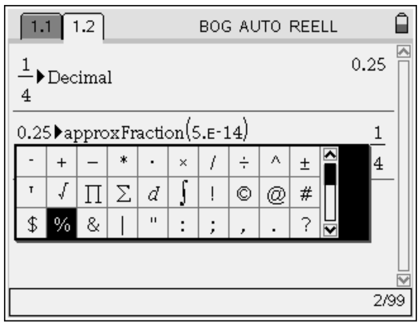
Willst Du eine Bruchzahl als Dezimalzahl angeben, so gibst Du die Bruchzahl ein z.B. $\frac{1}{4}$ und wählst über menu 2: Zahl, dann 1: „In Dezimalzahl konvertieren“.

Umgekehrt kannst Du eine Dezimalzahl z.B. 0.25 in ein eine Bruchzahl umwandeln durch menu 2: Zahl, dort 2: „In Bruch approximieren“.



Prozentschreibweise

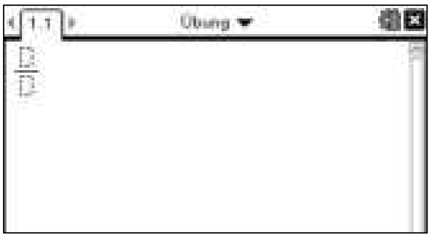
Das Prozentzeichen findest Du bei den Sonderzeichen entweder über die Tasten ctrl ⚐. Eine zweite Möglichkeit geht über ctrl menu 6: „Sonderzeichen“.
Es öffnet sich ein Fenster in dem viele Sonderzeichen, auch das %- Zeichen zu finden sind.
Mit den Pfeiltasten und enter auswählen.
Wenn Du z.B. 25% eingibst und die Enter-Taste enter drückst, erhältst Du das Ergebnis als Bruch 25% = $\frac{1}{4}$.



2. Der Calculator

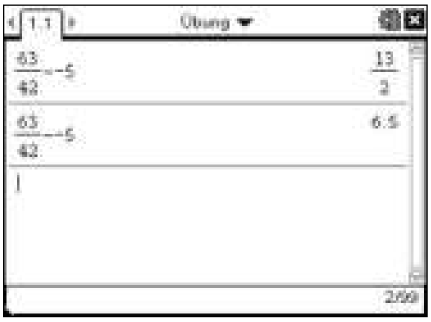
Dies ist der Rechnerbereich, in dem Du wie mit einem super komfortablen Taschenrechner arbeiten kannst. Beim Berechnen von Rechenausdrücken erhält man als Ergebnis (mit enter) (soweit möglich) exakte Werte, also Brüche.

Versuche es auch mit komplizierteren Rechenausdrücken,
1. Beispiel: $\frac{63}{42} - (-5)$.



Eingabe von Brüchen

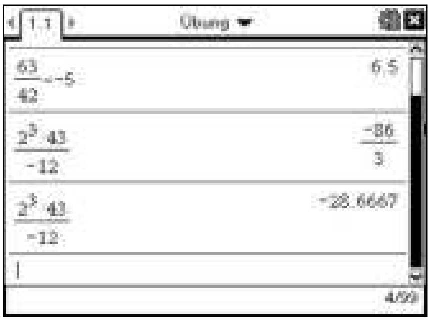
1. Möglichkeit:
ctrl ÷ öffnet eine Vorlage für Brüche. Gib im Zähler 63 ein und platziere mit ▼ den Cursor im Nenner. Dort gibt man 42 ein. Die Pfeiltaste ▶ nach rechts bringt den Cursor wieder in die Mitte, anschließend − (−) 5 und enter.
Hinweis: Das Minus vor der 5 ist ein Vorzeichenminus.
Die zugehörige Taste (−) findet man in der untersten Reihe.



2. Möglichkeit:
Du kannst den Bruch auch mit der ÷-Taste eingeben, also 63 ÷ 42 – (−) 5 und enter.

Der Calculator liefert als Ergebnis einen Bruch.
Um die zugehörige Dezimalzahl zu erhalten drücke ctrl enter.

2. Beispiel: $\frac{2^3 \cdot 43}{-12}$.
Wie im 1. Beispiel öffnest Du die Vorlage mit ctrl ÷. Die Hochzahl von 2^3 kannst Du mit der ^-Taste eingeben.
Hinweis: Auch hier musst Du anschließend einmal die Pfeiltaste ▶ drücken um den Cursor wieder aus der Hochzahl in die ursprüngliche Position zu bringen.



Umwandlung Dezimal- in Bruchzahl und umgekehrt

Willst Du eine Bruchzahl als Dezimalzahl angeben, so gibst Du die Bruchzahl ein z.B. $\frac{1}{4}$ und wählst über menu 2: Zahl, dann 1: „In Dezimalzahl konvertieren".

Umgekehrt kannst Du eine Dezimalzahl z.B. 0.25 in ein eine Bruchzahl umwandeln durch menu 2: Zahl, dort 2: „In Bruch approximieren".

Prozentschreibweise

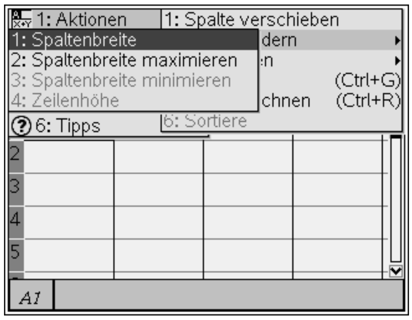
Das Prozentzeichen findest Du bei den Sonderzeichen entweder über die Tasten ctrl 📖. Eine zweite Möglichkeit geht über ctrl menu 7: „Sonderzeichen".
Es öffnet sich ein Fenster in dem viele Sonderzeichen, auch das %- Zeichen zu finden sind.
Mit den Pfeiltasten und enter auswählen.
Wenn Du z.B. 25% eingibst und die Enter-Taste enter drückst, erhältst Du das Ergebnis als Bruch 25% = $\frac{1}{4}$.

3. Lists & Spreadsheet

Dies ist eine Tabellenkalkulation. Wenn Du Excel kennst, kannst Du gleich loslegen.
Gehe im Homemenü ⌂ zu 3: Lists & Spreadsheet.

Spaltenbreite

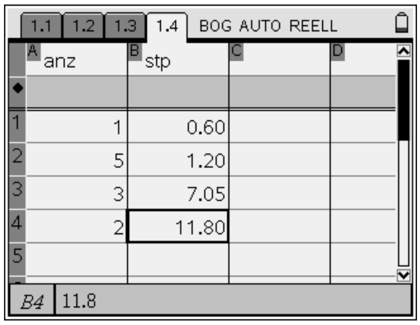
Um die Spalte breiter zu machen gehe zu menu 1: Aktionen, dort zu 2: Größe ändern und dann zu 1: Spaltenbreite. Mit der rechten Pfeiltaste ▸ lässt kannst Du die Spalte beliebig verbreitern. Breite mit enter festlegen.



Spaltenamen

In der 1. Zeile kann man den Spalten verschiedene Namen geben.
Z.B. *anz* (für Anzahl) für die 1. Spalte, *stp* (für Stückpreis) für die 2. Spalte.
Gib die Werte der nebenstehenden Tabelle ein:

Anzahl	Stückpreis
1	0.60
5	1.20
3	7.05
2	11.80



Dokumenteinstellungen

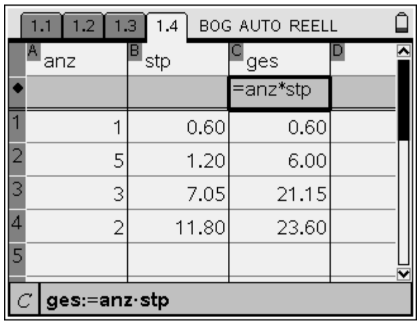
Sollte nicht die korrekte Anzahl Kommastellen angezeigt werden, kannst Du dies ändern mit

⌂ 8 Systeminfo dort 8: Dokumenteinstellungen.
Bei \`Angezeigte Ziffern´ kannst Du *Fix 2* einstellen.

Spaltenformeln

Die **2. Zeile ist für Spaltenformeln** und darf **nicht** für die Eingabe von Zahlen mitbenutzt werden.

In der 3. Spalte soll der Gesamtpreis *ges* berechnet werden. Der Gesamtpreis errechnet sich aus Stückpreis mal Anzahl. Gib in die 2. Zeile (Spaltenformel) der 3.Spalte die Formel für die ganze Spalte ein: **= anz · stp**

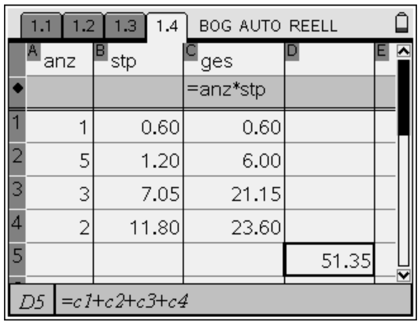


Zellenformeln

Wie in Excel kannst Du auch in einer Zelle Berechnungen durchführen.

In der Zelle **D5** soll die Gesamtsumme berechnet werden.
Gehe in die Zelle und drücke: **= C1+C2+C3+C4**

Probiere selbst aus.



3. Lists & Spreadsheet

Dies ist eine Tabellenkalkulation. Wenn Du Excel kennst, kannst Du gleich loslegen. Öffne einfach ein zusätzliches Fenster mit (doc)(4)(6): Lists & Spreadsheet.

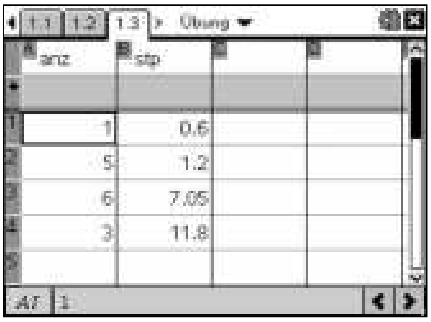
Spaltenbreite

Um die Spalte breiter zu machen gehe zu (menu)(1): Aktionen, dort zu (2): Größe ändern und dann zu (1): Spaltenbreite. Mit der rechten Pfeiltaste ▸ lässt kannst Du die Spalte beliebig verbreitern. Breite mit (enter) festlegen.

Spaltenamen

In der 1. Zeile kann man den Spalten verschiedene Namen geben.
Z.B. *anz* (für Anzahl) für die 1. Spalte, *stp* (für Stückpreis) für die 2. Spalte.
Gib die Werte der nebenstehenden Tabelle ein:

Anzahl	Stückpreis
1	0.60
5	1.20
3	7.05
2	11.80



Dokumenteinstellungen

Sollte nicht die korrekte Anzahl Kommastellen angezeigt werden, kannst Du dies ändern mit

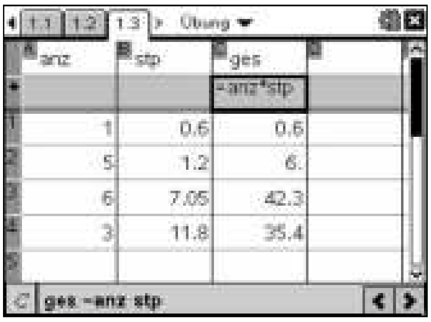
(⌂on)(5) Einstellung und Status, dort (2): Einstellungen

Bei *„Angezeigte Ziffern"* kannst Du *Fix 2* einstellen.

Spaltenformeln

Die **2. Zeile ist für Spaltenformeln** und darf **nicht** für die Eingabe von Zahlen mitbenutzt werden.

In der 3. Spalte soll der Gesamtpreis *ges* berechnet werden. Der Gesamtpreis errechnet sich aus Stückpreis mal Anzahl. Gib in die 2. Zeile (Spaltenformel) der 3.Spalte die Formel für die ganze Spalte ein: **= anz · stp**

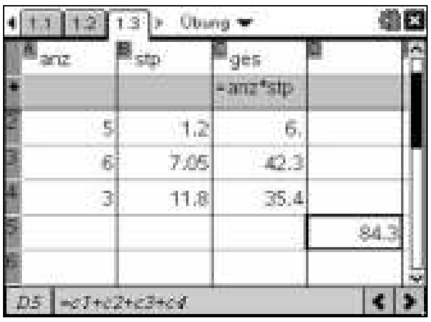


Zellenformeln

Wie in Excel kannst Du auch in einer Zelle Berechnungen durchführen.

In der Zelle **D5** soll die Gesamtsumme berechnet werden. Gehe in die Zelle und drücke: **= C1+C2+C3+C4**

Probiere selbst aus.



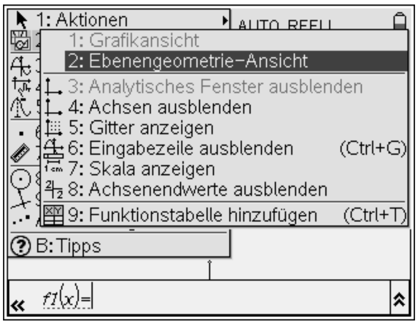
4. Graphs & Geometry

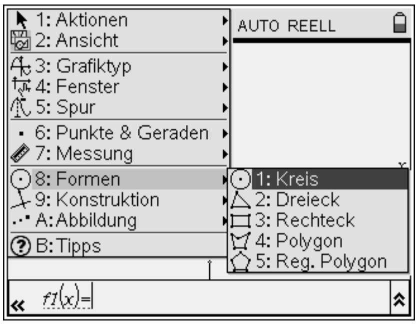
Gehe im Homemenü ⌂ zu 2: Graphs & Geometry.
In diesem Bereich kann man entweder geometrische Konstruktionen durchführen oder man kann Wertetabellen oder Zuordnungen (Funktionen) graphisch darstellen und damit arbeiten.
Fürs Erste sollst Du nur das Konstruieren ein bisschen ausprobieren.

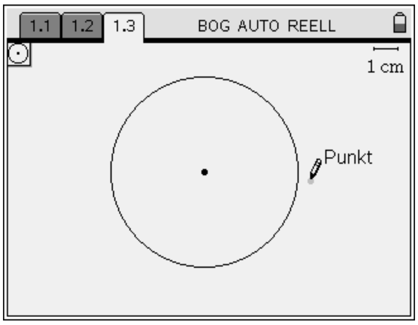
Ebenengeometrieansicht

Da wir Konstruktionen durchführen, entfernst Du Achsen und Eingabezeile mit menu 2: Ansicht und wählst dort 2: Ebenengeometrieansicht.
Um z.B. einen Kreis zu zeichnen, gibst Du im Menü menu 8: Formen und dort die 1: Kreis ein. Der Cursor erscheint dann als Stift ✎.
Mit den Pfeiltasten kannst Du ihn an die Stelle verschieben, an die der Mittelpunkt des Kreises hin soll, jetzt mit einem „Mausklick" mit der (Klick)–Taste in der Mitte des Clickpads (oder durch die enter-Taste) bestätigen.
Sobald man die Pfeiltaste nach rechts bedient, wird der Cursor zur Hand. Der Radius (Größe) wird durch einen weiteren Mausklick (Klick) (oder enter) festgelegt.

Hinweis:
Eine sehr wichtige Taste in Graphs & Geometry ist die esc Taste links oben. Mit ihr kann man die Menüs verlassen. Der Cursor wird in diesem Grundmodus zum Pfeil.



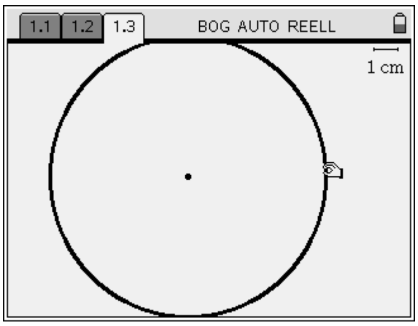




Zugmodus

In den Zugmodus kommt man mit der blauen ctrl Taste dann (Klick). Es erscheint die Hand und Du kannst den ganzen Bildschirm mit den Pfeiltasten verschieben (danach wieder die Escape-Taste esc).

Der Kreis (oder andere Formen) lässt sich auch vergrößern oder verkleinern, wenn man mit dem Cursorpfeil auf die Linie geht, ctrl (Klick) drückt und dann mit den Pfeiltasten zieht.

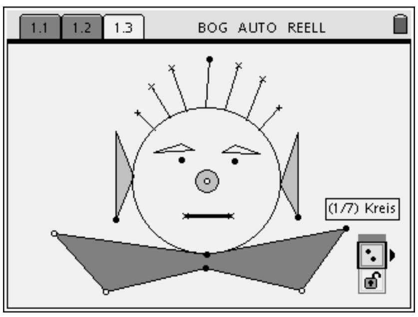


Ausprobieren, Attribute

Mit diesen Infos kannst Du versuchen z.B. ein Gesicht herzustellen. Dazu brauchst Du auch noch menu 6: (Punkte & Geraden).

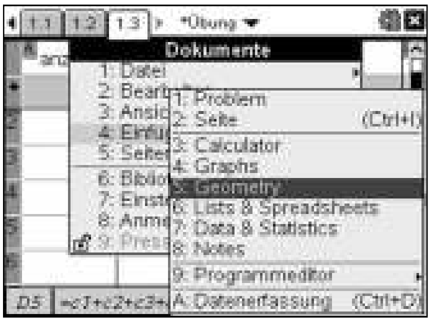
Tipp: Dort am besten mit „Strecken" arbeiten.

Du kannst dein Bild noch verschönern. Dazu gehst Du mit dem Cursor zu dem zu verändernden Objekt bis die Hand erscheint und das zugehörige Objekt blinkt.
Nun wählst Du ctrl menu, dort 2: Attribute.
Je nach Objekt kannst Du **hier Form, Linienstärke und „Farbe"** (d.h. Graustufen) ändern und so versuchen ein besonders schönes Bild zu erstellen.



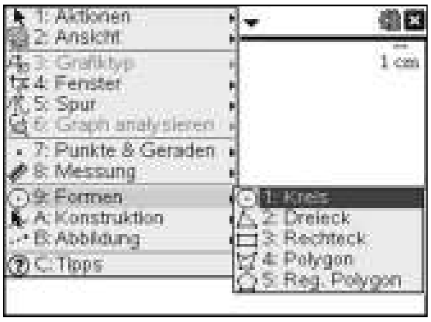
4. Geometry

Öffne über (doc▾)(4)(5): Geometry.
In diesem Bereich kann man geometrische Konstruktionen durchführen.
Hier soll erst mal ein bisschen ausprobiert werden.

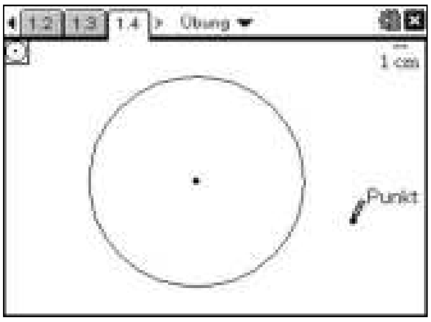


Ebenengeometrieansicht

In der Ebenengeometrieansicht, die in Geometry voreingestellt ist, hast Du keine Achse oder Eingabezeile wie in Graphs.
Um z.B. einen Kreis zu zeichnen, gibst Du im Menü (menu)(9): Formen und dort die (1): Kreis ein. Der Cursor erscheint dann als Stift.
Mit dem Touchpad kannst Du ihn an die Stelle verschieben, an die der Mittelpunkt des Kreises hin soll, jetzt mit einem „Mausklick“ mit der –Taste in der Mitte des Touchpads (oder durch die (enter)-Taste) bestätigen.
Sobald man die Pfeiltaste nach rechts bedient, wird der Cursor zur Hand. Der Radius (Größe) wird durch einen weiteren Mausklick (oder (enter)) festgelegt.



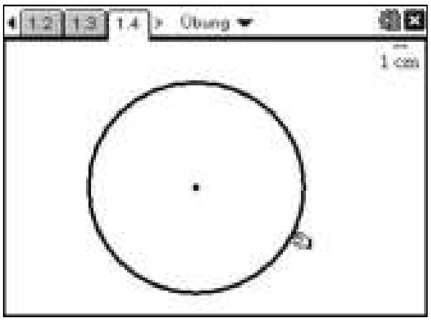
Hinweis:
Eine sehr wichtige Taste in Geometry ist die (esc) Taste links oben. Mit ihr kann man die Menüs verlassen. Der Cursor wird in diesem Grundmodus zum Pfeil.



Zugmodus

In den Zugmodus kommt man mit der (ctrl) Taste dann . Es erscheint die Hand und Du kannst den ganzen Bildschirm mit den Pfeiltasten verschieben (danach wieder die Escape-Taste (esc)).

Der Kreis (oder andere Formen) lässt sich auch vergrößern oder verkleinern, wenn man mit dem Cursorpfeil auf die Linie geht, (ctrl) drückt und dann mit den Pfeiltasten zieht.

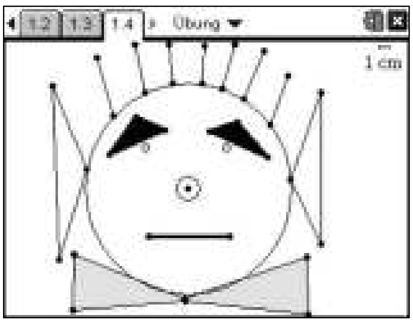


Ausprobieren, Attribute

Mit diesen Infos kannst Du versuchen z.B. ein Gesicht herzustellen. Dazu brauchst Du auch noch (menu)(7): (Punkte & Geraden).

Tipp: Dort am besten mit „Strecken“ arbeiten.

Du kannst dein Bild noch verschönern. Dazu gehst Du mit dem Cursor zu dem zu verändernden Objekt bis die Hand erscheint und das zugehörige Objekt blinkt.
Nun wählst Du (ctrl)(menu), dort (3): Attribute.
Je nach Objekt kannst Du **hier Form, Linienstärke und „Farbe“** (d.h. Graustufen) ändern und so versuchen ein besonders schönes Bild zu erstellen.



Berechnung von Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert

Aufgabe

a) Berechne den Grundwert.

p%	33%	17%	8%	5,4%	138%
W	80	45	149	3,9	56

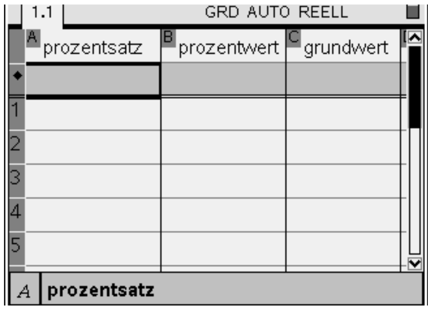
b) Um wie viel Prozent ist die obere Zahl größer als die untere Zahl? Um wie viel Prozent ist die untere Zahl kleiner als die obere Zahl?

20	17	87	2,3	11
10	9	67	1,9	12

Lists & Spreadsheet

Öffne Lists & Spreadsheet (⌂ 3) und füge in die oberste Zeile die Spaltenüberschriften \`Prozentsatz´ und \`Prozentwert´ ein. Das Anzeigen von Großbuchstaben und Leerzeichen ist in diesen Zellen nicht möglich.

Die Spaltenbreite lässt sich vergrößern mit menu 1 2 1, dann Pfeiltaste ▸ verwenden und mit enter esc Vorgang beenden.



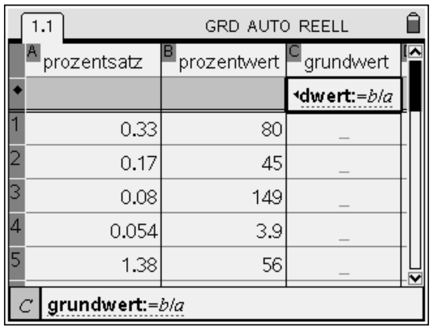
a) Grundwertberechnung

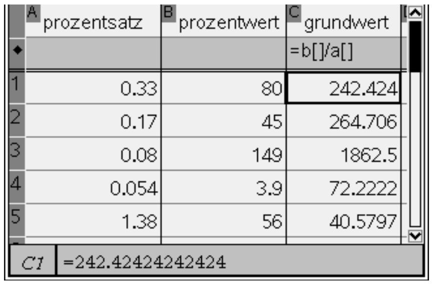
Gib zunächst die Werte der Tabelle in die entsprechenden Spalten ein.
In die Formelzeile der Grundwertspalte gibst Du die Formel zur Berechnung des Grundwertes ein: $\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{p}}$.

Formeleingaben beginnen stets mit dem „:=“ Zeichen.

Wie bei jeder Tabellenkalkulation wird dabei mit Zellen bzw. in diesem Fall mit Spaltennamen gerechnet.
Die eckigen Klammern werden automatisch eingefügt.
Die Nachfrage des möglichen Datenverlustes kann man ignorieren und enter drücken.

Alle Grundwerte werden dann auf einmal berechnet.

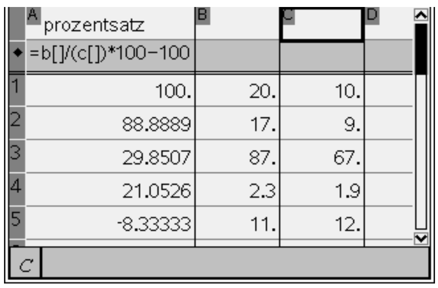


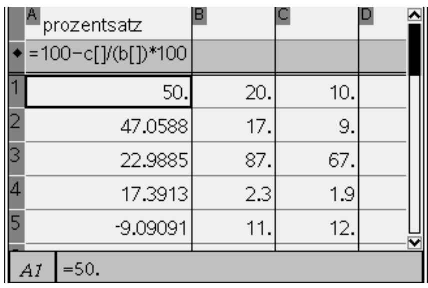


b) Berechnung des Prozentsatzes

Nach Eingabe der Tabellenwerte in die entsprechenden Spalten gibt man in die Formelzeile des Prozentsatzes die gewünschte Formel ein:
Im ersten Teil steht in der Spalte c der Grundwert.

Durch Multiplikation mit 100 wird der Prozentsatz in % direkt angegeben. Da nach der Erhöhung gefragt ist, muss der ursprüngliche Wert (100%) wieder abgezogen werden.
Im zweiten Teil steht der Grundwert in Spalte b. In diesem Fall wird vom ursprünglichen Wert (100%) der entsprechende Wert abgezogen.





Aufgabe

a) Berechne den Grundwert.

p%	33%	17%	8%	5,4%	138%
W	80	45	149	3,9	56

b) Um wie viel Prozent ist die obere Zahl größer als die untere Zahl? Um wie viel Prozent ist die untere Zahl kleiner als die obere Zahl?

20	17	87	2,3	11
10	9	67	1,9	12

Lists & Spreadsheet

Öffne Lists & Spreadsheet ((⌂on)(4)) und füge in die oberste Zeile die Spaltenüberschriften \`Prozentsatz´ und \`Prozentwert´ ein. Das Anzeigen von Großbuchstaben und Leerzeichen ist in diesen Zellen nicht möglich.

Die Spaltenbreite lässt sich vergrößern mit (menu)(1)(2)(1), dann Pfeiltaste ▶ verwenden und mit (enter)(esc) Vorgang beenden.

a) Grundwertberechnung

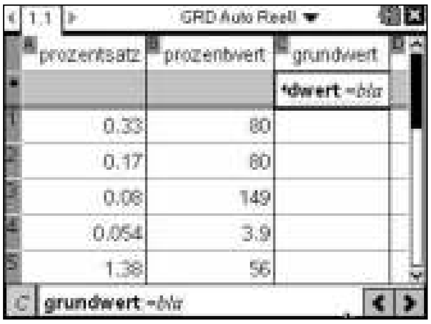
Gib zunächst die Werte der Tabelle in die entsprechenden Spalten ein.

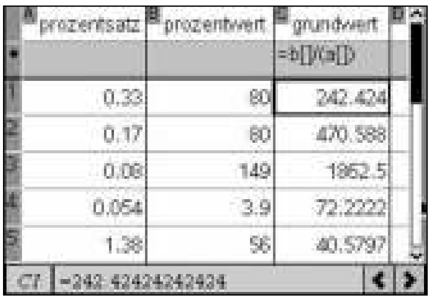
In die Formelzeile der Grundwertspalte gibst Du die Formel zur Berechnung des Grundwertes ein: $\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{p}}$.

Formeleingaben beginnen stets mit dem „:=“ Zeichen.

Wie bei jeder Tabellenkalkulation wird dabei mit Zellen bzw. in diesem Fall mit Spaltennamen gerechnet.
Die eckigen Klammern werden automatisch eingefügt.
Die Nachfrage des möglichen Datenverlustes kann man ignorieren und (enter) drücken.

Alle Grundwerte werden dann auf einmal berechnet.



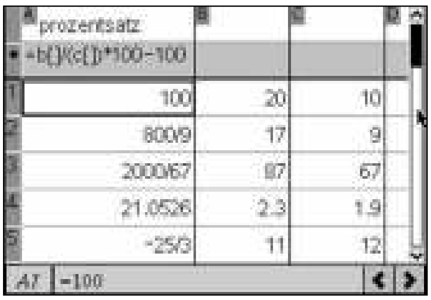


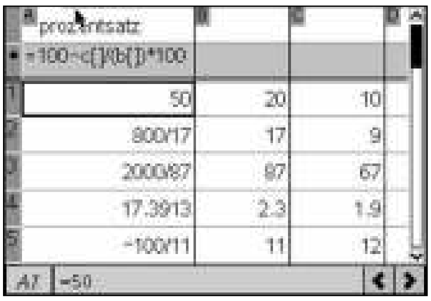
b) Berechnung des Prozentsatzes

Nach Eingabe der Tabellenwerte in die entsprechenden Spalten gibt man in die Formelzeile des Prozentsatzes die gewünschte Formel ein:

Im ersten Teil steht in der Spalte c der Grundwert.

Durch Multiplikation mit 100 wird der Prozentsatz in % direkt angegeben. Da nach der Erhöhung gefragt ist, muss der ursprüngliche Wert (100%) wieder abgezogen werden.
Im zweiten Teil steht der Grundwert in Spalte b. In diesem Fall wird vom ursprünglichen Wert (100%) der entsprechende Wert abgezogen.





Berechnung von Zinseszinsen (Calculator)

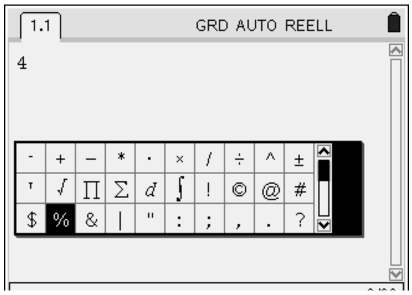
Aufgabe

a) Anfang des Jahres 2006 besitzt Hanno ein Guthaben von 1200€. Das Geld legt er zu einem jährlichen Zinssatz von 4% bis zum Jahr 2010 an. Berechne das Guthaben von Hanno Ende 2010.
b) Um wie viel Prozent vergrößert sich sein Guthaben in diesen fünf Jahren?

Prozentschreibweise

Wähle die Anwendung Calculator.

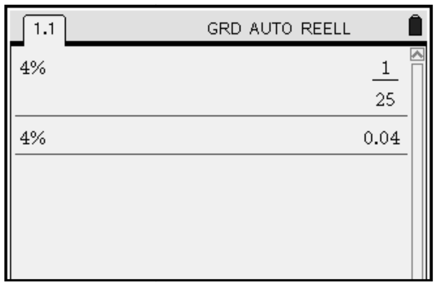
Wenn Du beim Prozentrechnen unsicher bist, kannst Du Deinen Rechner als Kontrolle verwenden: das %-Zeichen findest Du unter ctrl ?!▸.



Umwandlung Bruch- und Dezimaldarstellung

Mit enter fügst Du das %-Zeichen ein, nochmaliges Betätigen der enter-Taste liefert das Ergebnis (Bruchdarstellung) und mit ctrl enter auch die Dezimaldarstellung.

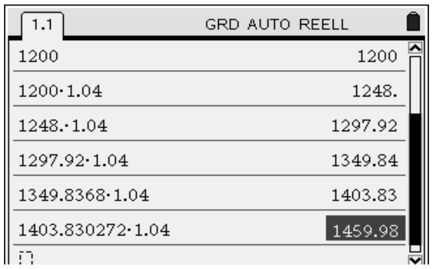
Da zu Hannos Anfangsguthaben (entsprechen 100%) nach dem ersten Jahr 4% hinzukommen beträgt das neue Guthaben zum 1.1.2007 also 104% des Startguthabens: 1200·1,04 (€).



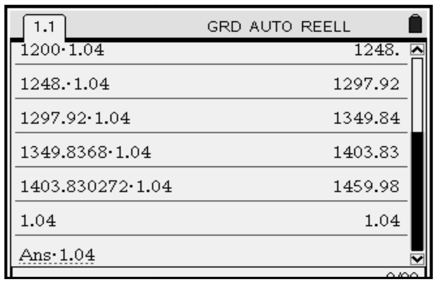
Die „unsichtbare“ ANS – Taste:
Weiterrechnen mit dem letzten Eintrag

a) Gib das Startkapital (in €) von Hanno ein: 1200. Betätige die x-Taste × und gib den Faktor 1,04 ein. Beende mit enter. Für jedes Betätigen der enter-Taste wird das Guthaben des folgenden Jahres angegeben.

Zum Ende des Jahres 2010 (bzw. zum 1.1.2011) beträgt Hannos Guthaben also 1459,98€.

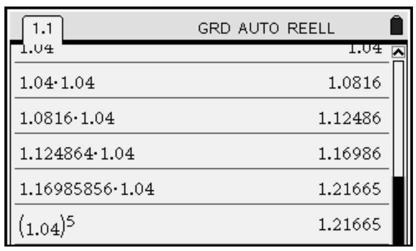


b) Möchtest Du den Prozentsatz für diese fünf Jahre berechnen, kannst Du genau wie oben vorgehen: Eingabe von 1,04. Betätige die x-Taste × und gib den Faktor 1,04 ein. Beende mit enter.
Für jedes Betätigen der enter-Taste erfolgt der Prozentsatz für die bis dahin zurückgelegten Jahre.



Potenzschreibweise

Natürlich geht das auch einfacher: Gib $1{,}04^5$ ein und Du erhältst die gewünschte Antwort sofort: der prozentuale Zuwachs beträgt in diesen fünf Jahren etwa 21,7%.



Aufgabe

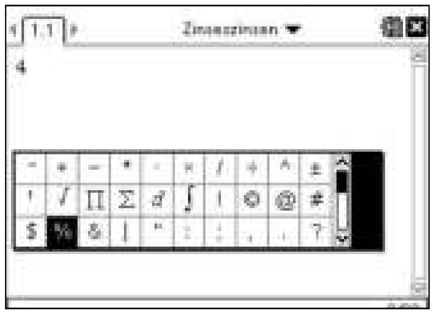
a) Anfang des Jahres 2006 besitzt Hanno ein Guthaben von 1200€. Das Geld legt er zu einem jährlichen Zinssatz von 4% bis zum Jahr 2010 an. Berechne das Guthaben von Hanno Ende 2010.

b) Um wie viel Prozent vergrößert sich sein Guthaben in diesen fünf Jahren?

Prozentschreibweise

Wähle die Anwendung Calculator.

Wenn Du beim Prozentrechnen unsicher bist, kannst Du Deinen Rechner als Kontrolle verwenden: das %-Zeichen findest Du unter (ctrl)(📖).



Umwandlung Bruch- und Dezimaldarstellung

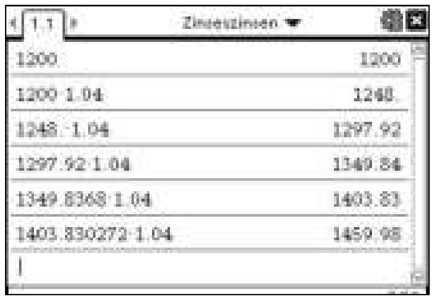
Mit (enter) fügst Du das %-Zeichen ein, nochmaliges Betätigen der (enter)-Taste liefert das Ergebnis (Bruchdarstellung) und mit (ctrl)(enter) auch die Dezimaldarstellung.

Da zu Hannos Anfangsguthaben (entsprechen 100%) nach dem ersten Jahr 4% hinzukommen beträgt das neue Guthaben zum 1.1.2007 also 104% des Startguthabens: 1200·1,04 (€).

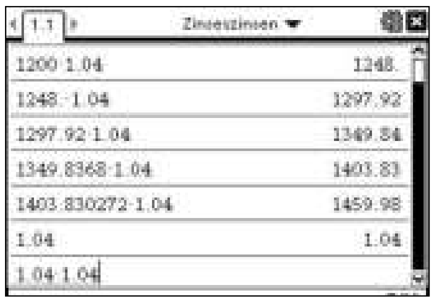
Die „unsichtbare“ ANS – Taste:
Weiterrechnen mit dem letzten Eintrag

a) Gib das Startkapital (in €) von Hanno ein: 1200. Betätige die x-Taste (×) und gib den Faktor 1,04 ein. Beende mit (enter). Für jedes Betätigen der (enter)-Taste wird das Guthaben des folgenden Jahres angegeben.

Zum Ende des Jahres 2010 (bzw. zum 1.1.2011) beträgt Hannos Guthaben also 1459,98€.

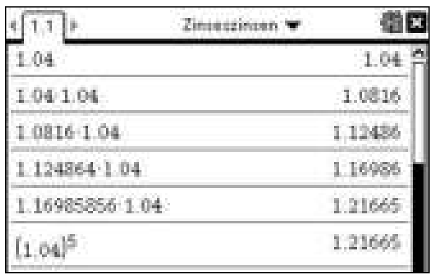


b) Möchtest Du den Prozentsatz für diese fünf Jahre berechnen, kannst Du genau wie oben vorgehen: Eingabe von 1,04. Betätige die x-Taste (×) und gib den Faktor 1,04 ein. Beende mit (enter).
Für jedes Betätigen der (enter)-Taste erfolgt der Prozentsatz für die bis dahin zurückgelegten Jahre.



Potenzschreibweise

Natürlich geht das auch einfacher: Gib $1{,}04^5$ ein und Du erhältst die gewünschte Antwort sofort: der prozentuale Zuwachs beträgt in diesen fünf Jahren etwa 21,7%.



Wertetabellen graphisch darstellen

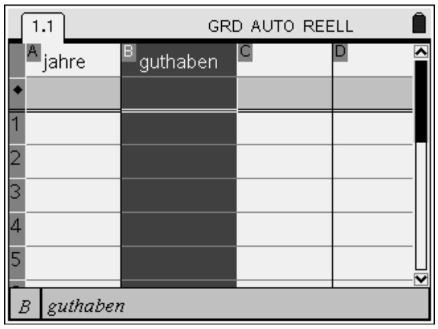
Aufgabe

c) Wie viele Jahre muss man ein Kapital von 500€ bei einem Zinssatz von 5% anlegen, damit es sich mit Zinseszins verdoppelt?

d) Ein Kapital von 500€ soll sich in fünf Jahren verdoppeln. Welcher Zinssatz – gerundet auf eine Dezimale – ist dazu nötig?

Vorbereiten der Tabellenkalkulation

Wähle die Anwendung Lists & Spreadsheet. In der 1.Zeile gibst Du den Spalteninhalten Namen, z.B. jahre (in der 1.Spalte) und guthaben (in der 2.Spalte); Namen haben keine Leerzeichen und werden vom Rechner immer klein geschrieben). Um die **Spalte breiter** zu machen, gehst Du auf menu 1 2 1. Dann kannst Du mit der ▸-Taste die Spaltenbreite beliebig vergrößern (beenden mit enter esc).

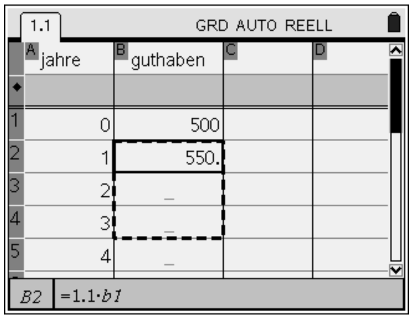


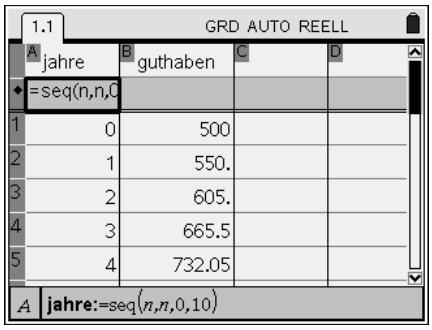
Arbeiten mit Formeln

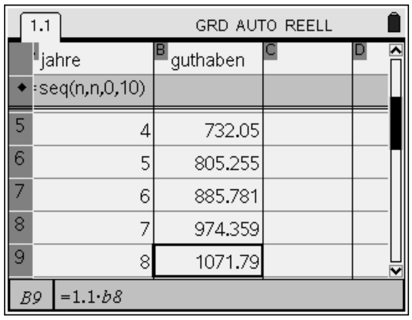
Um eine Zinseszinstabelle anlegen zu können, gibst Du zunächst in die erste Spalte die Jahre ein (0 bis z.B. 10).
In der zweiten Spalte gibst Du in die erste Zelle (B1) das Startkapital (500 €) ein. Für das Rechnen mit Formeln verwendest Du das „=“ – Zeichen. In die zweite Zeile (B2) gibst Du die Formel **=1,1·b1** ein und markierst sie mit ctrl.
Mit der ▾-Taste kannst Du den Formeleintrag nach unten kopieren.
Mit enter schließt Du den Kopiervorgang ab.

Tipp:
Du kannst in der ersten Spalte statt der Zahlen 0 bis 10 in der Formelzeile (markiert mit ◆) einen Befehl eingeben, der die gewünschte Zahlenfolge ausgibt (=seq(n,n,0,10); engl. für Folge: sequence).

Gehst Du mit dem Cursor nach unten (▾), so stellst Du fest, dass sich zwischen dem siebten und achten Jahr das Ausgangskapital verdoppelt hat.



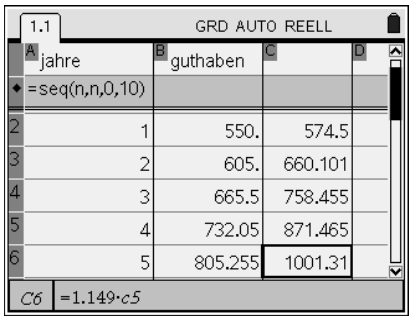




Systematisches Probieren

Gib in die dritte Spalte (Spalte c) in c1 wieder das Startkapital ein und verfahre mit dem Arbeiten mit Formeln wie oben (verwende einen größeren Zinssatz als 10%).

Systematisches Probieren liefert für die Verdoppelungszeit des Guthabens von fünf Jahren den Prozentsatz 14,9%.



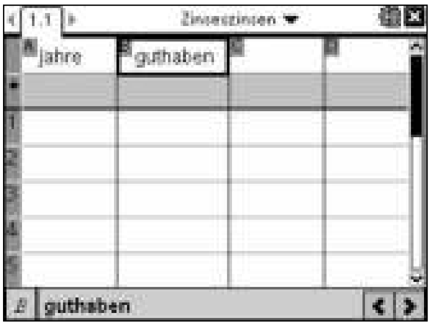
Aufgabe

c) Wie viele Jahre muss man ein Kapital von 500€ bei einem Zinssatz von 5% anlegen, damit es sich mit Zinseszins verdoppelt?

d) Ein Kapital von 500€ soll sich in fünf Jahren verdoppeln. Welcher Zinssatz – gerundet auf eine Dezimale – ist dazu nötig?

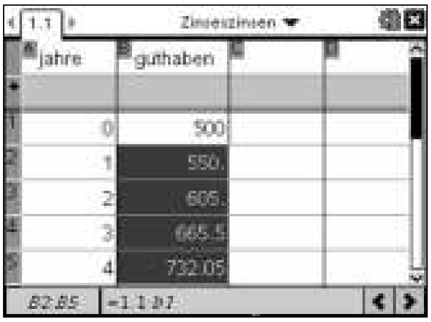
Vorbereiten der Tabellenkalkulation

Wähle die Anwendung Lists & Spreadsheet. In der 1.Zeile gibst Du den Spalteninhalten Namen, z.B. jahre (in der 1.Spalte) und guthaben (in der 2.Spalte); Namen haben keine Leerzeichen und werden vom Rechner immer klein geschrieben). Um die **Spalte breiter** zu machen, gehst Du auf (menu)(1)(2)(1). Dann kannst Du mit der ▸-Taste die Spaltenbreite beliebig vergrößern (beenden mit (enter)(esc)).



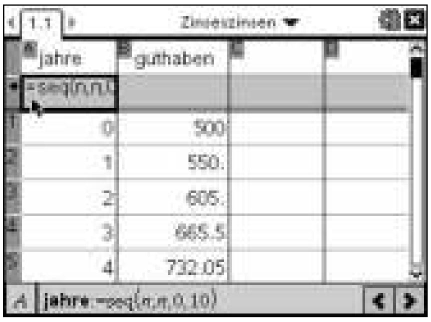
Arbeiten mit Formeln

Um eine Zinseszinstabelle anlegen zu können, gibst Du zunächst in die erste Spalte die Jahre ein (0 bis z.B. 10). In der zweiten Spalte gibst Du in die erste Zelle (B1) das Startkapital (500 €) ein. Für das Rechnen mit Formeln verwendest Du das „=“ – Zeichen. In die zweite Zeile (B2) gibst Du die Formel **=1,1·b1** ein und markierst sie mit (ctrl)(☝). Mit der ▾-Taste kannst Du den Formeleintrag nach unten kopieren.

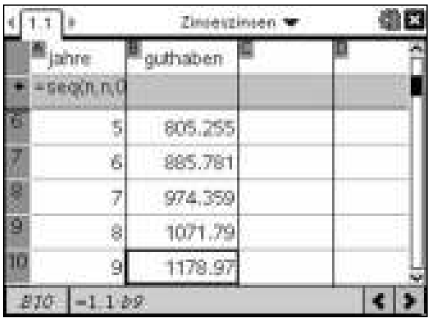


Tipp:

Du kannst in der ersten Spalte statt der Zahlen 0 bis 10 in der Formelzeile (markiert mit ◆) einen Befehl eingeben, der die gewünschte Zahlenfolge ausgibt (=seq(n,n,0,10); engl. für Folge: sequence).



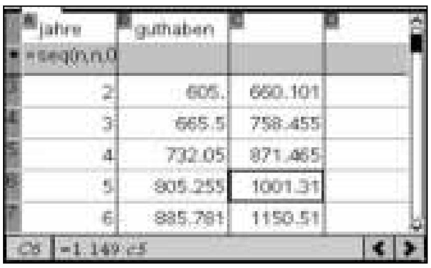
Gehst Du mit dem Cursor nach unten (▾), so stellst Du fest, dass sich zwischen dem siebten und achten Jahr das Ausgangskapital verdoppelt hat.



Systematisches Probieren

Gib in die dritte Spalte (Spalte c) in c1 wieder das Startkapital ein und verfahre mit dem Arbeiten mit Formeln wie oben (verwende einen größeren Zinssatz als 10%).

Systematisches Probieren liefert für die Verdoppelungszeit des Guthabens von fünf Jahren den Prozentsatz 14,9%.



Wertetabellen graphisch darstellen

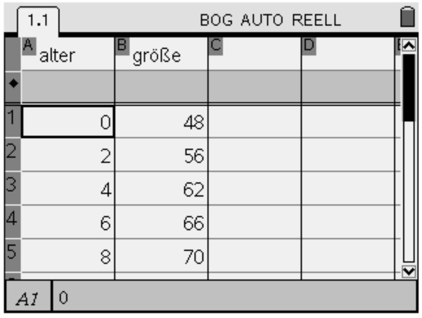
Aufgabe

In der nebenstehenden Tabelle ist das Größenwachstum des Babys Lara angegeben. Zeichne mit deinem Nspire zur Veranschaulichung einen passenden Graphen.

Lebensalter (in Mon.)	0	2	4	6	8	10
Körpergröße (in cm)	48	56	62	66	70	72

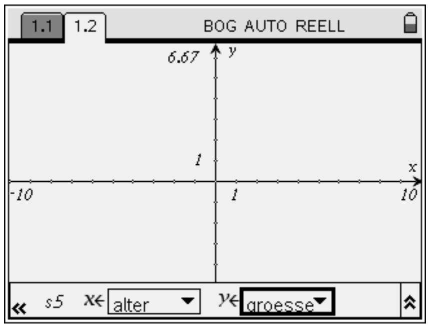
Eingabe der Wertepaare

Öffne im Homemenü mit [home][6] ein neues Dokument und dort die Anwendung Lists & Spreadsheet**.**
In der ersten Zeile gibst Du jeder Spalte einen passenden Namen, z.B. ***alter*** für die erste Spalte und ***größe*** für die zweite Spalte.
Gib nun die Daten ein.
Hinweis:
Achte darauf, dass die zweite Zeile nicht benutzt wird, da sie für Spaltenformeln reserviert ist.



Erstellen eines Punktediagramms

Öffne eine weitere Seite mit der Anwendung Graphs & Geometry ([home][2]). Um die Werte aus der Tabelle darzustellen, wählst Du mit [menu][3]:Graphiktyp, dort [4]: Streuplot. Es öffnet sich ein Fenster für die Belegung der Achsen. Das Feld für die x-Achse ist „markiert“. Klicke [click] (oder [enter]) und wähle „alter“ mit [click] (oder [enter]).
Mit der Pfeiltaste ▶ (oder [tab]) kommt man zum Feld für die y-Achse. Wähle dort \`größe´ aus.



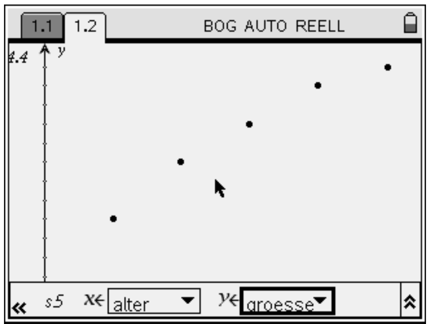
Achseneinteilung

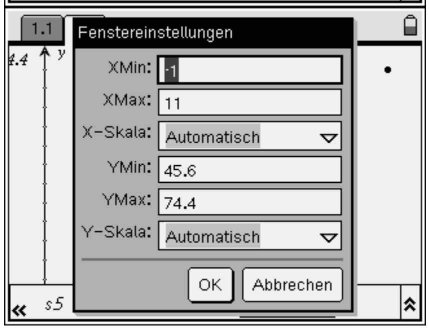
Da die Achsen noch nicht passend gewählt sind, kannst Du die Punkte nicht auf dem Bildschirm sehen.

1. Möglichkeit - automatisch:
Um jetzt die **passende Achseneinteilung** zu bekommen geht es weiter mit [menu][4]: Fenster und dort mit [9] für Statistik-Zoom.

2. Möglichkeit - von Hand:
Du kannst die Fenstereinstellung auch selbst bestimmen. Das ist über [menu][4]: Fenster und dort mit [1]: Achseneinstellungen möglich.

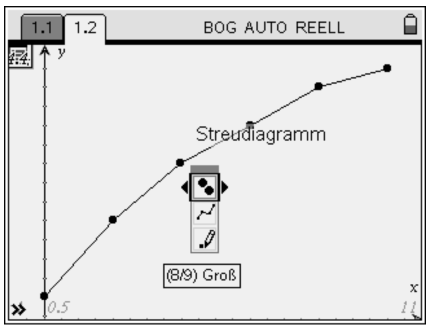
Hinweis:
Die Eingabezeile lässt sich mit /G oder d ausblenden.





Verändern der Diagrammeigenschaften

Um z.B. die Punkte zu verbinden oder aus den Punkten Kringel, Kreuzchen, usw. zu machen, gehst Du mit dem Pfeil auf einen der Punkte. Alle Punkte blinken dann.
Nun kannst Du über [menu][1], dort [4]: Attribute dein Schaubild verändern. (Auch mit [ctrl][menu], dann [3] kommst Du zu den Attributen.)
Teste verschiedene Möglichkeiten.

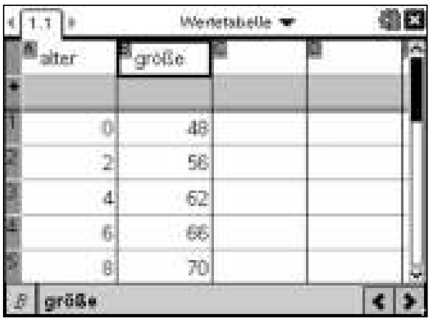


Aufgabe
In der nebenstehenden Tabelle ist das Größenwachstum des Babys Lara angegeben. Zeichne mit deinem Nspire zur Veranschaulichung einen passenden Graphen.

Lebensalter (in Mon.)	0	2	4	6	8	10
Körpergröße (in cm)	48	56	62	66	70	72

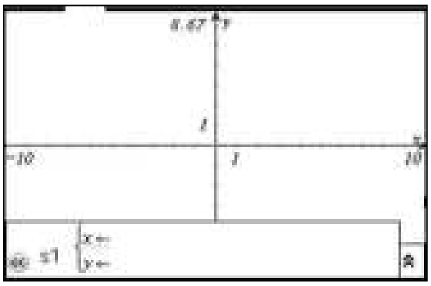
Eingabe der Wertepaare
Öffne mit on 1 4 ein neues Dokument mit der Anwendung Lists & Spreadsheet**.**
In der ersten Zeile gibst Du jeder Spalte einen passenden Namen, z.B. ***alter*** für die erste Spalte und ***größe*** für die zweite Spalte.
Gib nun die Daten ein.

Hinweis:
Achte darauf, dass die zweite Zeile nicht benutzt wird, da sie für Spaltenformeln reserviert ist.



Erstellen eines Punktediagramms
Öffne eine weitere Seite mit der Anwendung Graphs doc 4 4. Um die Werte aus der Tabelle darzustellen, wählst Du mit menu 3:Graphiktyp, dort 4: Streuplot.

In dem Fenster kannst Du nun der x- und y-Achse einen Wert zuordnen. Gib bei der x-Achse ***alter*** und bei der y-Achse ***größe*** ein. Bestätige deine Eingabe mit enter.

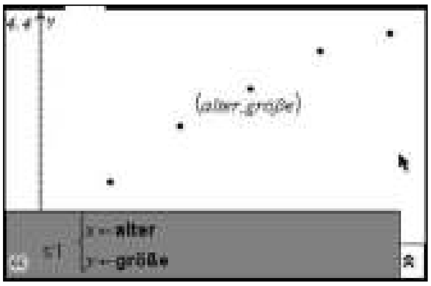


Achseneinteilung
Da die Achsen noch nicht passend gewählt sind, kannst Du die Punkte nicht auf dem Bildschirm sehen.

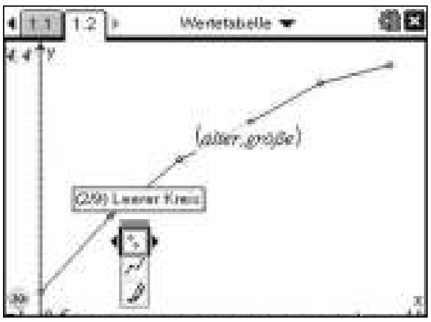
1. Möglichkeit - automatisch:
Um jetzt die **passende Achseneinteilung** zu bekommen geht es weiter mit menu 4: Fenster und dort mit 9 für Statistik-Zoom.

2. Möglichkeit - von Hand:
Du kannst die Fenstereinstellung auch selbst bestimmen. Das ist über menu 4: Fenster und dort mit 1: Achseneinstellungen möglich.

Hinweis:
Die Eingabezeile lässt sich mit ctrl G ausblenden.



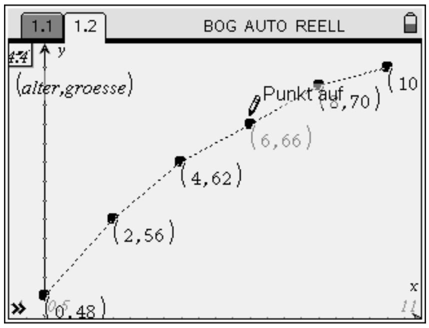
Verändern der Diagrammeigenschaften
Um z.B. die Punkte zu verbinden oder aus den Punkten Kringel, Kreuzchen, usw. zu machen, gehst Du mit dem Pfeil auf einen der Punkte. Alle Punkte blinken dann.
Nun kannst Du über menu 1, dort 4: Attribute dein Schaubild verändern. (Auch mit ctrl menu, dann 3 kommst Du zu den Attributen.)
Teste verschiedene Möglichkeiten.



Wertetabellen graphisch darstellen

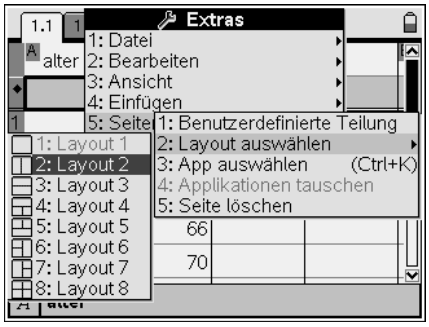
Datenpunkte beschriften

Um die Datenpunkte zu beschriften, wählst Du mit menu 6 (Punkt/Gerade) das Werkzeug 2 „Punkt auf“ aus.
Wenn Du mit dem Pfeil den entsprechenden Punkt auswählst, erscheinen die Koordinaten „blass“.
Um die Koordinaten an die Punkte zu schreiben musst Du noch einmal klicken mit (oder die enter -Taste drücken).
So kannst Du nacheinander alle Punkte bezeichnen.



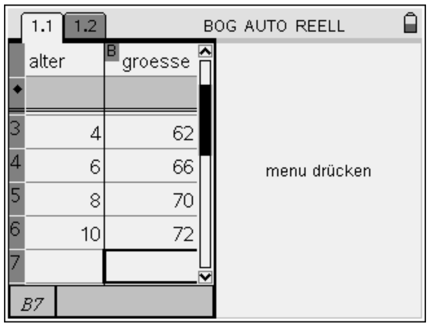
Darstellen von Wertetabelle und Diagramm im selben Bildschirm

Nach der Eingabe der Wertpaare in Lists & Spreadsheet kannst Du auch den Bildschirm teilen.
Das hat den Vorteil, dass Du die Tabelle und die graphische Darstellung direkt miteinander vergleichen kannst.

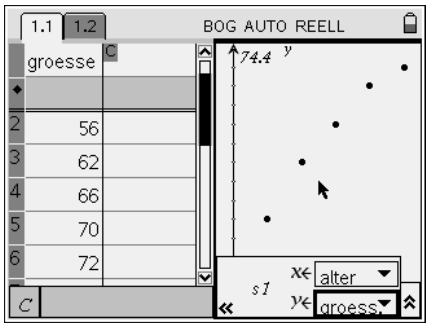


Dies geschieht mit ctrl (d.h.) 5: Seitenlayout, dort mit 2: Layout auswählen, Layout 2.
Das Fenster teilt sich und es wird Seitenlayout 2 eingestellt.
Zur nun freien Hälfte kommst Du über ctrl tab.

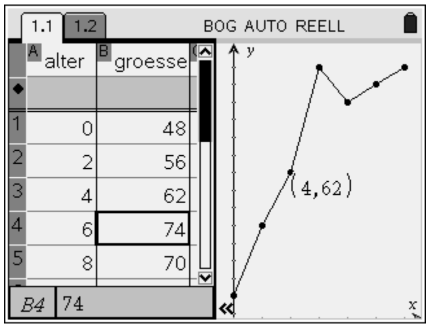
Hinweis: Um die freie Hälfte ist dann ein dicker Rahmen.



Mit menu lässt sich in dieser Hälfte nun z.B. wieder Graphs & Geometry“ öffnen.
In diesem Teilfenster kannst Du dann wie oben beschrieben fortfahren um deine Wertpaare darzustellen, sie zu verbinden, zu beschriften usw.

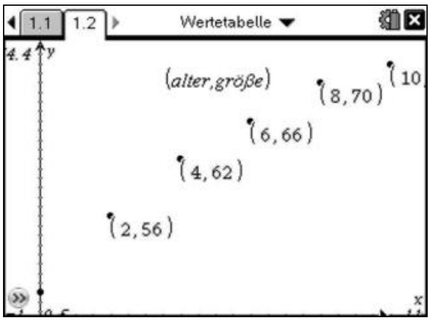


Wenn Du jetzt in der Tabelle einen Wert veränderst, z.B. beim Alter von 6 Monaten eine Größe von 74 (statt 66) eingibst, kannst Du Veränderung direkt im Schaubild nachvollziehen.



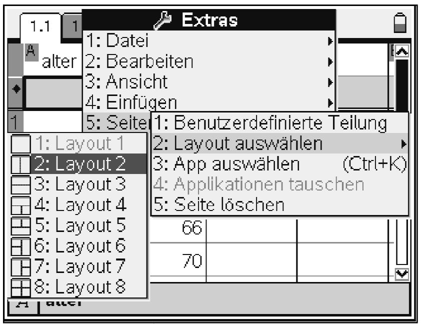
Datenpunkte beschriften

Um die Datenpunkte zu beschriften, wählst Du mit [menu] [7] (Punkt/Gerade) das Werkzeug [2] „Punkt auf“ aus.
Wenn Du mit dem Pfeil den entsprechenden Punkt auswählst, erscheinen die Koordinaten „blass“.
Um die Koordinaten an die Punkte zu schreiben musst Du noch einmal klicken mit [Klick] (oder die [enter] -Taste drücken).
So kannst Du nacheinander alle Punkte bezeichnen.



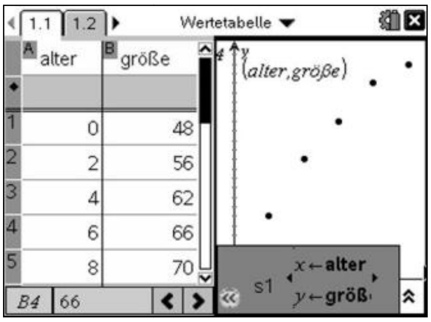
Darstellen von Wertetabelle und Diagramm im selben Bildschirm

Nach der Eingabe der Wertpaare in Lists & Spreadsheet kannst Du auch den Bildschirm teilen.
Das hat den Vorteil, dass Du die Tabelle und die graphische Darstellung direkt miteinander vergleichen kannst.

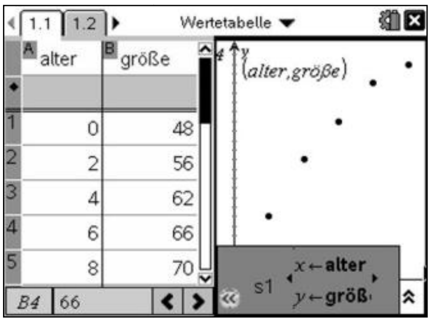


Dies geschieht mit [doc] [5]: Seitenlayout, dort mit [1]: Layout auswählen, Layout [2].
Das Fenster teilt sich und es wird Seitenlayout [2] eingestellt.
Zur nun freien Hälfte kommst Du über [ctrl] [tab].

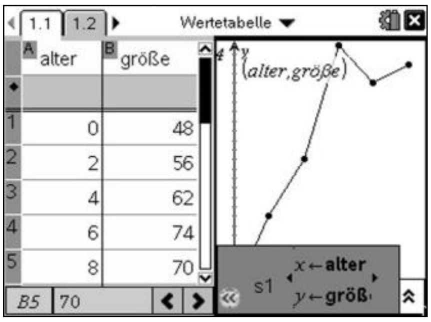
Hinweis: Um die freie Hälfte ist dann ein dicker Rahmen.



Mit [menu] lässt sich in dieser Hälfte nun z.B. wieder Graphs öffnen.
In diesem Teilfenster kannst Du dann wie oben beschrieben fortfahren um deine Wertpaare darzustellen, sie zu verbinden, zu beschriften usw.



Wenn Du jetzt in der Tabelle einen Wert veränderst, z.B. beim Alter von 6 Monaten eine Größe von 74 (statt 66) eingibst, kannst Du Veränderung direkt im Schaubild nachvollziehen.



Darstellung von Zuordnungen mit Zuordnungsvorschrift

Aufgabe

Erstelle den Graph und die Wertetabelle der Zuordnung x → y, bei der sich der y-Wert mit der Zuordnungsvorschrift $y = \frac{1}{3}x^2 - 1$ berechnen lässt.

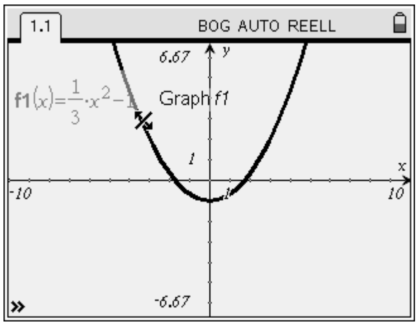
Darstellung in Graphs & Geometry

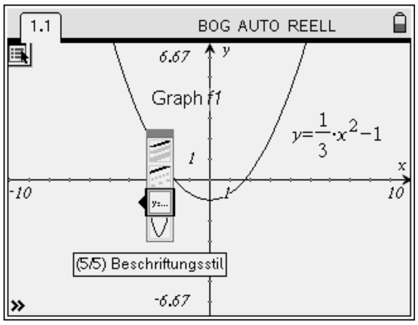
Öffne eine Seite mit Graphs & Geometry und gebe in der Eingabezeile die Zuordnungsvorschrift ein. Im Nspire steht für y die Schreibweise f1(x), also $f1(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$. Bestätige mit enter. Der zugehörige Graph wird in einem Standardfenster ohne Beschriftung angezeigt und die Eingabezeile wird automatisch ausgeblendet. Um die Beschriftung des Graphen anzuzeigen, gehst Du mit dem Pfeil auf die Kurve. Wenn Sie „fett" markiert ist, wählst Du ctrl menu: dort 2: Beschriftung. Bestätige mit ☉ und die Zuordnungsvorschrift erscheint. Sie lässt sich mit ctrl ☉ „packen" und an den gewünschten Platz verschieben.

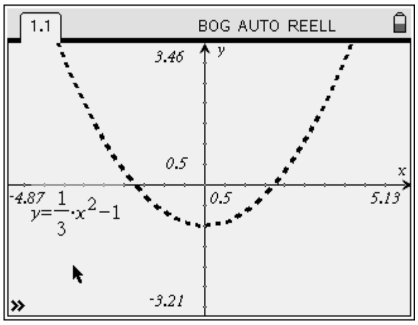
Um die gewohnte Schreibweise zu erhalten, kannst Du mit menu 1: Aktionen, dort 4: Attribute wählen. Mit ☉ auf die Kurve öffnet sich ein Fenster, mit dem Du verschiedene Formatierungen, unter anderem den Beschriftungsstil, ändern kannst. Mit den Pfeiltasten gehst Du zum dritten Symbol und wählst mit ◀ oder ▶ die gewünschte Beschriftung aus.

Eine Alternative um zu Attribute zu kommen ist ctrl menu, dort 3: Attribute. Außer der Beschriftung kannst Du noch die Linienstärke (dick – dünn), den Linienstil (gestrichelt – durchgehend) und die Darstellung des Graphen (stetig – diskret) verändern. Teste verschiedene Möglichkeiten.

Hinweis:
Die Eingabezeile lässt sich mit ctrl G ein- und ausblenden.







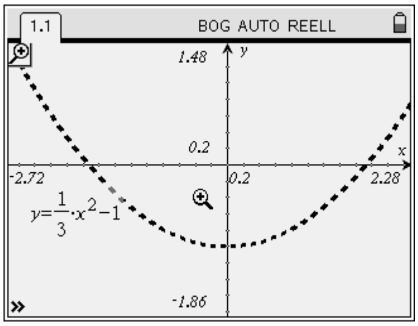
Passende Fenstereinstellung

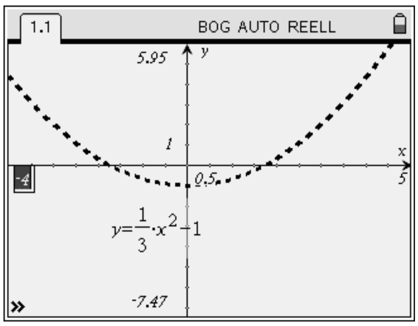
Hier passt die Fenstereinstellung ganz gut. Möchtest Du sie trotzdem verändern, wählst Du menu 4: Fenster. Hier gibt es zahlreiche Möglichkeiten die Koordinatenachsen zu verändern. Probiere aus.

Eine schnelle Möglichkeit bietet z.B. das „Hineinzoomen" mit 3: Hinein. Hierzu wählst Du das Zentrum und bestätigst durch ☉ oder enter.

Gehst Du mit dem Pfeil direkt zu den Achsen, kannst Du mit ctrl ☉ und anschießendem „Ziehen" durch ◀ oder ▶ die Achseneinteilung verändern.

Eine weitere Möglichkeit ist es durch zweimaliges „Klicken" direkt auf die Skalierungsangabe an den Achsen am Bildschirmrand und anschließender Eingabe der neuen „Grenzen", die Änderung der Achseneinteilung festzulegen.





Aufgabe

Erstelle den Graph und die Wertetabelle der Zuordnung x → y, bei der sich der y-Wert mit der Zuordnungsvorschrift $y = \frac{1}{3}x^2 - 1$ berechnen lässt.

Darstellung in Graphs

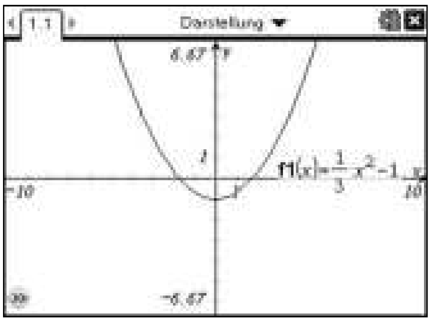
Öffne eine Seite mit Graphs und gebe in der Eingabezeile die Zuordnungsvorschrift ein. Im Nspire steht für y die Schreibweise f1(x), also $f1(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$. Bestätige mit (enter).

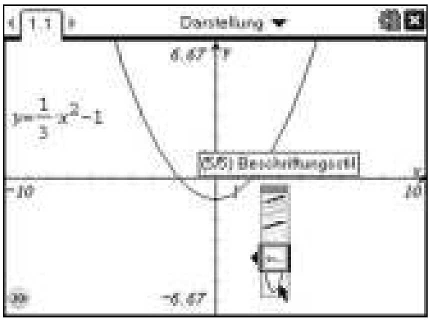
Der zugehörige beschriftete Graph wird in einem Standardfenster angezeigt und die Eingabezeile wird automatisch ausgeblendet. Um die Beschriftung des Graphen auszublenden, gehst Du mit dem Pfeil auf die Kurve. Wenn Sie „fett" markiert ist, wählst Du (ctrl)(menu): dort (2): Beschriftung. Bestätige mit ☝ und die Zuordnungsvorschrift verschwindet. Sie lässt sich mit (ctrl)☝ „packen" und an den gewünschten Platz verschieben.

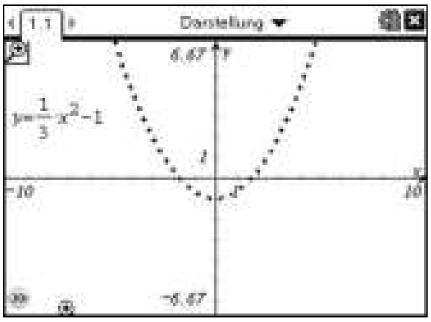
Um die gewohnte Schreibweise zu erhalten, kannst Du mit (menu)(1): Aktionen, dort (4): Attribute wählen. Mit ☝ auf die Kurve öffnet sich ein Fenster, mit dem Du verschiedene Formatierungen, unter anderem den Beschriftungsstil, ändern kannst. Mit den Pfeiltasten gehst Du zum dritten Symbol und wählst mit ◀ oder ▶ die gewünschte Beschriftung aus.

Eine Alternative um zu Attribute zu kommen ist (ctrl)(menu), dort (3): Attribute. Außer der Beschriftung kannst Du noch die Linienstärke (dick – dünn), den Linienstil (gestrichelt – durchgehend) und die Darstellung des Graphen (stetig – diskret) verändern. Teste verschiedene Möglichkeiten.

Hinweis:
Die Eingabezeile lässt sich mit (ctrl)G ein- und ausblenden.







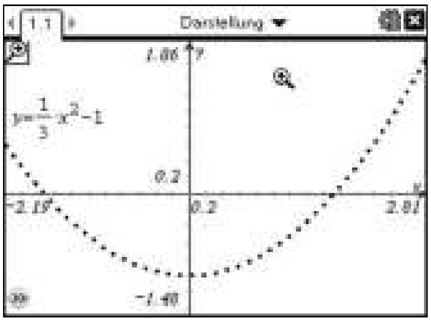
Passende Fenstereinstellung

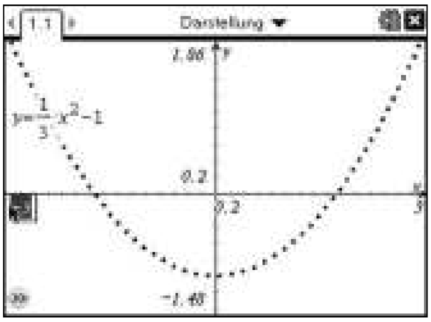
Hier passt die Fenstereinstellung ganz gut. Möchtest Du sie trotzdem verändern, wählst Du (menu)(4): Fenster. Hier gibt es zahlreiche Möglichkeiten die Koordinatenachsen zu verändern. Probiere aus.

Eine schnelle Möglichkeit bietet z.B. das „Hineinzoomen" mit (3): Hinein. Hierzu wählst Du das Zentrum und bestätigst durch ☝ oder (enter).

Gehst Du mit dem Pfeil direkt zu den Achsen, kannst Du mit (ctrl)☝ und anschießendem „Ziehen" durch ◀ oder ▶ die Achseneinteilung verändern.

Eine weitere Möglichkeit bietet zweimaliges „Klicken" direkt auf die Skalierungsangabe an den Achsen am Bildschirmrand und anschließender Eingabe der neuen „Grenzen", um die Änderung der Achseneinteilung festzulegen.



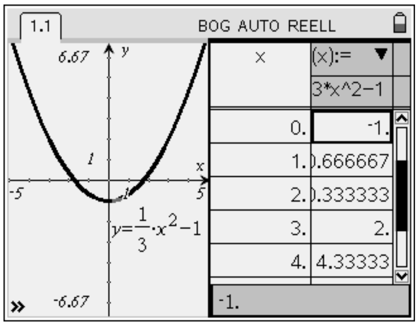


Darstellung von Zuordnungen mit Zuordnungsvorschrift

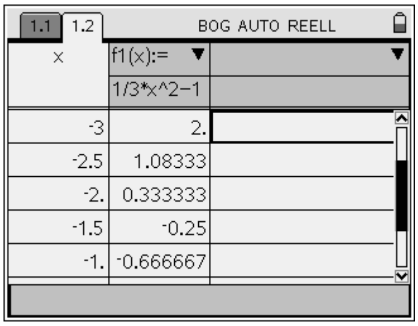
Wertetabelle anlegen

Mit menu 2: Ansicht, dort 9: Funktionstabelle hinzufügen, kannst Du eine Wertetabelle anzeigen lassen. Mit tab wechselst Du innerhalb einer Fensterhälfte zwischen den verschiedenen Bereichen. Mit ctrl tab kannst Du zwischen Wertetabelle und Zeichenfenster wechseln.

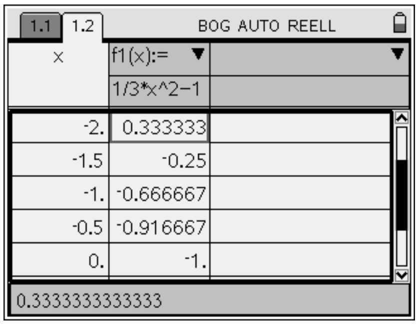
Sehr unpraktisch ist, dass die Tabelle nicht einfach zu löschen ist und das gesamte Fenster wieder für den Zeichenbereich zur Verfügung steht. Mit mehrmaligem ctrl esc kann man die jeweils vorhergehenden Schritte wieder rückgängig machen und so die Tabelle entfernen.



Eine andere Möglichkeit ist es, die Wertetabelle auf einer eigenen Seite in Lists & Spreadsheets (home 3) zu öffnen. Wähle dort menu 5: Funktionstabelle und 1: Zu Funktionstabelle wechseln. Mit der Navigationstaste kannst Du die Zuordnungsvorschrift f1 auswählen.
Um Einstellungen in der Wertetabelle zu verändern, wählst Du menu 5: Funktionstabelle und 3: Funktionseinstellungen bearbeiten. Hier kannst Du sowohl den „Tabellenanfang“, als auch die „Schrittweite“ ändern und auswählen, welcher Bereich gerade interessiert.
Zum Beispiel sollen die x-Werte bei -3 starten und die Schrittweite 0,5 haben.

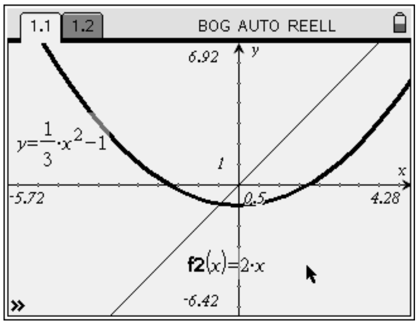


Die entsprechenden y-Werte werden in der rechten Spalte angezeigt.
Will man umliegende Werte ohne Ändern des Startwertes betrachten, „rollt“ man mit ▼ und ▲ nach unten und oben durch die Anzeige.

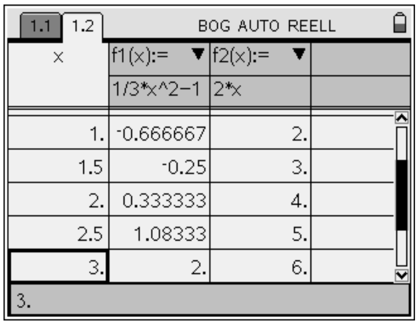


Es lassen sich sowohl im Zeichenfenster, als auch in der Wertetabellen problemlos weitere Zuordnungen, wie z.B. y = 2·x darstellen.

Zwischen den Seiten wechselt man mit ctrl ◀ und ▶. Im Graphikfenster wählst Du ctrl G oder und die Eingabezeile erscheint. Gebe f1(x) = 2·x ein. Der Graph der Geraden erscheint im gleichen Fenster.



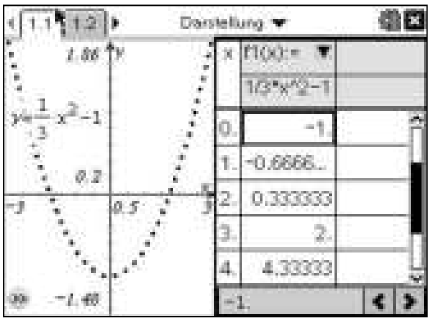
Wenn Du nun zur Funktionstabelle wechselst, kannst Du für die dritte Spalte f2 auswählen.
Für die gleichen x-Werte kannst Du nun die y-Werte der zwei Zuordnungsvorschriften nebeneinander ablesen.



Wertetabelle anlegen

Mit menu 2: Ansicht, dort 9: Tabelle einblenden, kannst Du eine Wertetabelle anzeigen lassen. Mit tab wechselst Du innerhalb einer Fensterhälfte zwischen den verschiedenen Bereichen. Mit ctrl tab kannst Du zwischen Wertetabelle und Zeichenfenster wechseln.

Soll die Teilung des Bildschirms wieder rückgängig gemacht werden, geschieht dies über doc 5: Seitenlayout 8:Gruppierung. Alternativ können mit mehrmaligem ctrl esc die jeweils vorhergehenden Schritte wieder rückgängig machen und so die Tabelle ebenfalls entfernt werden.

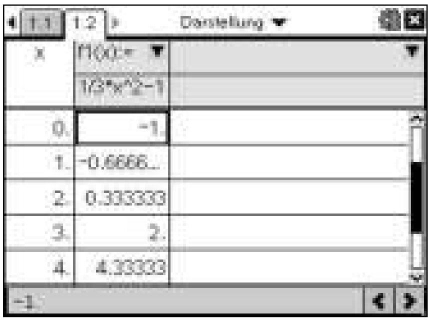


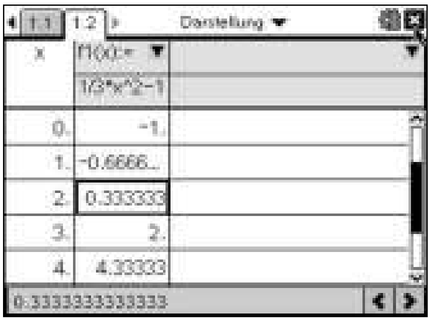
Wertetabelle in Lists & Spreadsheet

Die Wertetabelle kann auch auf einer eigenen Seite in Lists & Spreadsheets (doc 4 6) geöffnet werden.
Wähle dort menu 5: Wertetabelle und 1: Zu Wertetabelle wechseln. Mit ▫ kannst Du die Zuordnungsvorschrift f1 auswählen.

Um Einstellungen in der Wertetabelle zu verändern, wählst Du menu 5: Wertetabelle und 5: Funktionseinstellungen bearbeiten. Hier kannst Du sowohl den „Tabellenanfang“, als auch die „Schrittweite“ ändern und auswählen, welcher Bereich gerade interessiert.
Zum Beispiel sollen die x-Werte bei -3 starten und die Schrittweite 0,5 haben.

Die entsprechenden y-Werte werden in der rechten Spalte angezeigt.
Will man umliegende Werte ohne Ändern des Startwertes betrachten, „rollt“ man mit ▼ und ▲ nach unten und oben durch die Anzeige.



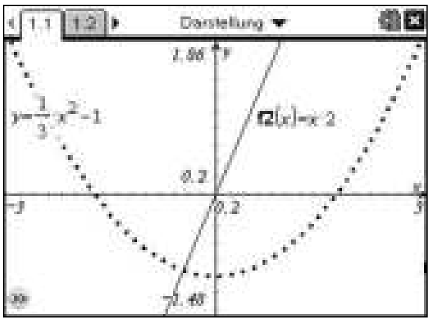


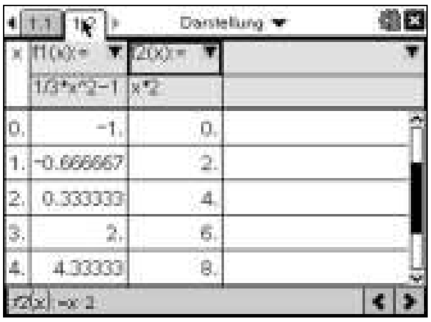
Darstellung weiterer Zuordnungen

Es lassen sich sowohl im Zeichenfenster, als auch in der Wertetabellen problemlos weitere Zuordnungen, wie z.B. $y = 2 \cdot x$ darstellen.

Zwischen den Seiten wechselt man mit ctrl ◀ und ▶. Im Graphikfenster wählst Du ctrl G oder und die Eingabezeile erscheint. Gebe $f1(x) = 2 \cdot x$ ein. Der Graph der Geraden erscheint im gleichen Fenster.

Wenn Du nun zur Funktionstabelle wechselst, kannst Du für die dritte Spalte f2 auswählen.
Für die gleichen x-Werte kannst Du nun die y-Werte der zwei Zuordnungsvorschriften nebeneinander ablesen.





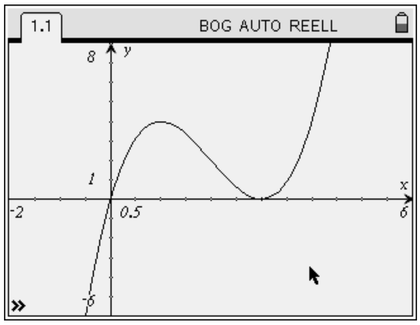
Graphen komplizierter Zuordnungen

Aufgabe
Eine komplizierte Zuordnung hat die folgende Gleichung: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.
Erstelle das Schaubild der Zuordnung im Nspire und übertrage das Schaubild möglichst genau in ein passendes Koordinatensystem in dein Heft.
Lies dazu die Koordinaten besonderer Punkte ab, die Du für deine Skizze verwenden kannst.

Darstellung in Graphs & Geometry

Öffne eine Seite mit Graphs & Geometry und gebe in der Eingabezeile die Zuordnungsvorschrift ein, also $f1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Beachte dabei, dass Du nach der Eingabe der Hochzahl einmal die Pfeiltaste ▸ drücken musst, um wieder auf der normalen \`Höhe´ zu schreiben.
Bestätige mit enter.
Die Achseneinstellungen kannst Du mit menu 4 1 verändern.
Wähle z.B: XMin=-2; XMax=6; YMin=-6 und YMax = 8.

Hinweis: Die Eingabezeile lässt sich mit ctrl G ein- und ausblenden.



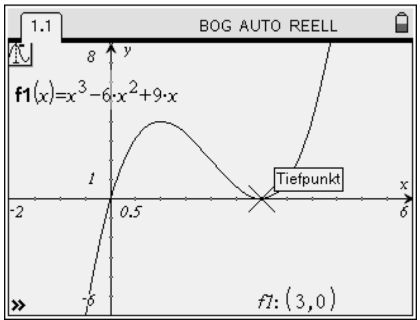
Übertragung ins Heft

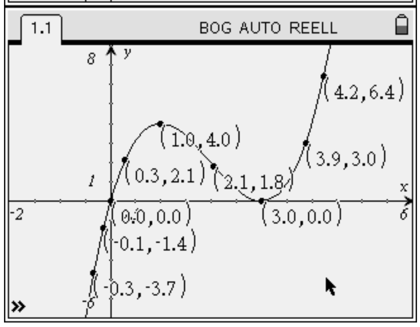
Zeichne ein passendes Koordinatensystem in dein Heft.
Beschrifte die Achsen, wähle 1 cm für eine Längeneinheit.
Um die Punkte im Schaubild ablesen zu können und zu übertragen nutzen wir die „Spur“. Wähle dazu menu 5 und dort 1: Spur.

Der Graph hat markante Punkte, die Du als erstes ablesen und in deine Skizze übernehmen kannst.

*An welche **Stellen** schneidet der Graph die x-Achse? Welche Koordinaten hat der so genannte „Tiefpunkt“ und der so genannte „Hochpunkt“?*

Diese Punkte sind für den Verlauf des Graphen wichtig.
Um eine gute Skizze zu erstellen, solltest Du noch weitere Punkte des Graphen ablesen, die dazwischen liegen, (wie z.B. rechts eingezeichnet). Die abgelesenen Punkte überträgst Du ebenfalls in deine Skizze.

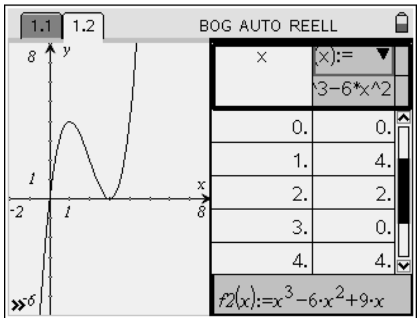


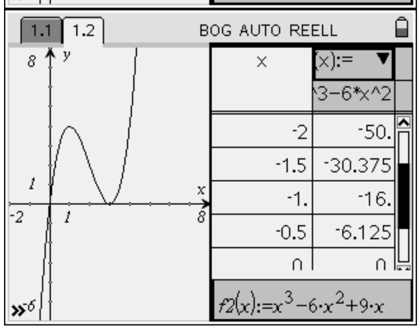


Wertetabelle anlegen

Als weitere Möglichkeit Punkte des Graphen zu erhalten und in die eigene Skizze zu übertragen, kannst Du auch eine Wertetabelle anlegen.

Mit menu 2 9 kannst Du die Funktionstabelle hinzufügen und neben dem Graphen anzeigen lassen. Mit ctrl tab wechselst Du zwischen Wertetabelle und Zeichenfenster.
Um die Einstellungen in der Wertetabelle zu verändern, wählst Du menu 5 3. Hier kann man sowohl den „Tabellenanfang“, als auch die „Schrittweite“ ändern und den Bereich auswählen, der gerade interessiert.
Es bietet sich als Startwert für die x-Werte z.B. -2 an, für die Schrittweite 0,5. Die entsprechenden y-Werte werden in der rechten Spalte angezeigt.
Mit ▾ kann man ohne Ändern des Startwertes nach unten durch die Anzeige scrollen.
Die zugehörigen Punkte kannst Du in deine Skizze übernehmen.





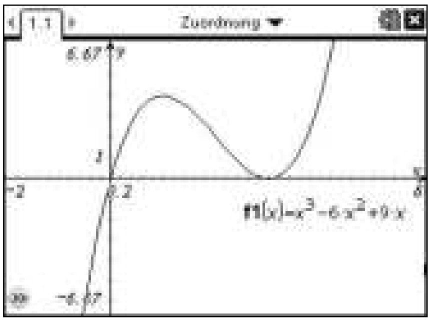
Aufgabe

Graphen komplizierter Zuordnungen

Eine komplizierte Zuordnung hat die folgende Gleichung: $y = x^3 – 6x^2 + 9x$.
Erstelle das Schaubild der Zuordnung im Nspire und übertrage das Schaubild möglichst genau in ein passendes Koordinatensystem in dein Heft.
Lies dazu die Koordinaten besonderer Punkte ab, die Du für deine Skizze verwenden kannst.

Darstellung in Graphs

Öffne eine Seite mit Graphs und gebe in der Eingabezeile die Zuordnungsvorschrift ein, also $f1(x) = x^3 – 6x^2 + 9x$.
Beachte dabei, dass Du nach der Eingabe der Hochzahl, einmal die Pfeiltaste ▸ drücken musst, um wieder auf der normalen „Höhe“ zu schreiben. Bestätige mit (enter).
Die Achseneinstellungen kannst Du mit (menu)(4)(1) verändern.
Wähle z.B: XMin=-2; XMax=6; YMin=-6 und YMax = 8.

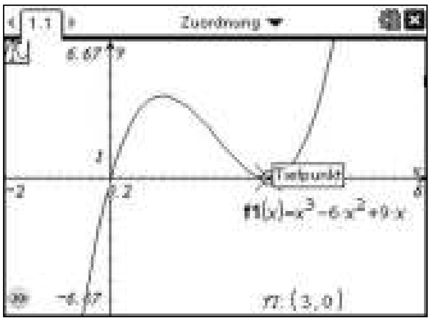


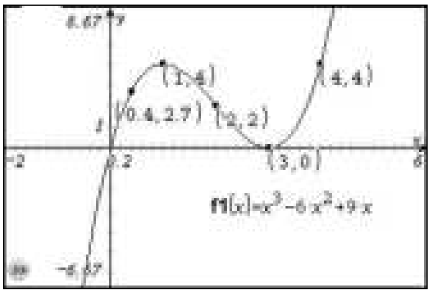
Übertragung ins Heft

Zeichne ein passendes Koordinatensystem in dein Heft. Beschrifte die Achsen, wähle 1 cm für eine Längeneinheit. Um die Punkte im Schaubild ablesen zu können und zu übertragen nutzen wir die „Spur“. Wähle dazu (menu)(5) und dort (1): Grafikspur.

Der Graph hat markante Punkte, die Du als erstes ablesen und in deine Skizze übernehmen kannst.
An welche Stellen schneidet der Graph die x-Achse?
Welche Koordinaten hat der so genannte „Tiefpunkt“ und der so genannte „Hochpunkt“?

Diese Punkte sind für den Verlauf des Graphen wichtig.
Um eine gute Skizze zu erstellen, solltest Du noch weitere Punkte des Graphen ablesen, die dazwischen liegen, (wie z.B. rechts eingezeichnet). Die abgelesenen Punkte überträgst Du ebenfalls in deine Skizze.



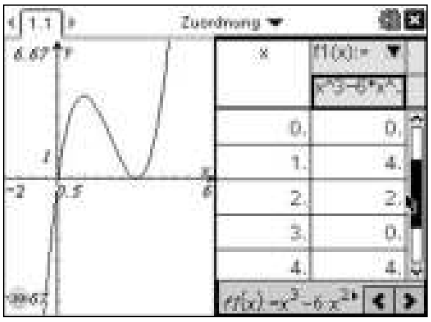


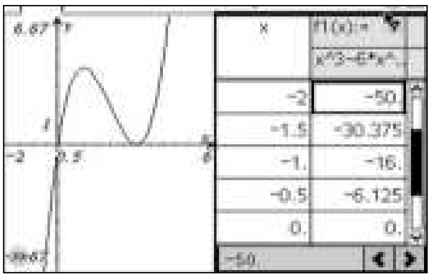
Wertetabelle anlegen

Als weitere Möglichkeit Punkte des Graphen zu erhalten und in die eigene Skizze zu übertragen, kannst Du auch eine Wertetabelle anlegen.

Mit (menu)(2)(9) kannst Du die Funktionstabelle hinzufügen und neben dem Graphen anzeigen lassen. Mit (ctrl)(tab) wechselst Du zwischen Wertetabelle und Zeichenfenster.
Um die Einstellungen in der Wertetabelle zu verändern, wählst Du (menu)(5)(5). Hier lässt sich sowohl der „Tabellenanfang“, als auch die „Schrittweite“ ändern und der Bereich auswählen, der gerade interessiert.

Es bietet sich als Startwert für die x-Werte z.B. -2 an, für die Schrittweite 0,5. Die entsprechenden y-Werte werden in der rechten Spalte angezeigt.
Mit ▾ kann man ohne Ändern des Startwertes nach unten durch die Anzeige scrollen.
Die zugehörigen Punkte kannst Du in deine Skizze übernehmen.





Parameter in der Scheitelform

Aufgabe

Zeichne den Graphen der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$.

a) Wie ändert sich der Funktionsterm, wenn Du die Öffnung der Parabel änderst? Beschreibe.

b) Wie ändert sich der Funktionsterm, wenn Du die Normalparabel nach oben und unten verschiebst?

c) Wie ändert sich der Funktionsterm, wenn Du die Normalparabel nach rechts und links verschiebst?

d) Kombiniere die Veränderungen von a) – c) und beschreibe.

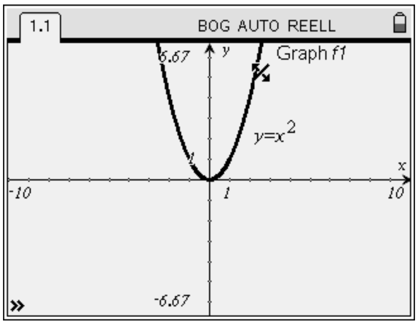
a) Öffnung der Parabel

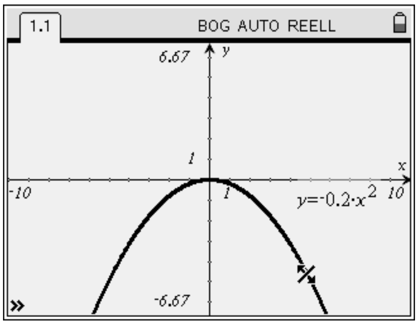
Öffne eine Seite mit Graphs & Geometry und gib in der Eingabezeile die Zuordnungsvorschrift $f1(x) = x^2$ ein und beschrifte den Graphen mit ctrl menu 2. Um die Öffnung der Parabel zu verändern, bewegst Du den Zeiger in die Nähe eines der beiden „Äste“ bis der „Pfeil“ (siehe Abbildung) erscheint.
Mit ctrl kannst Du sie packen und die Öffnung mit ◀ oder ▶ variieren.

Mit der Änderung der Parabel, ändert sich passend dazu auch die Beschriftung und zeigt die zur Parabel gehörige Funktionsgleichung an.
Alle Funktionsgleichungen haben die Form $\mathbf{y = a \cdot x^2}$.

Untersuche noch:

Für welche Werte von a ist die Öffnung der Parabel weiter oder enger als die der Normalparabel?
Für welche Werte von a ist die Parabel nach oben bzw. nach unten geöffnet?





b) Verschiebung nach oben oder unten

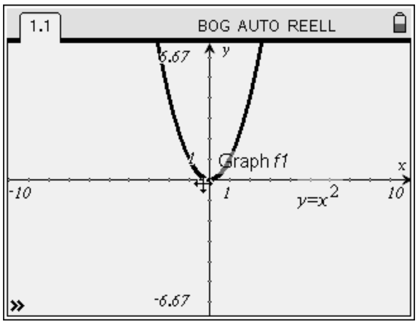
Wenn Du zweimal auf die angezeigte Funktionsgleichung klickst ( ), kannst Du durch Löschen des Vorfaktors wieder die Normalparabel erhalten. Eine weitere Möglichkeit ist die Eingabezeile anzuzeigen und den Term dort zu ändern.

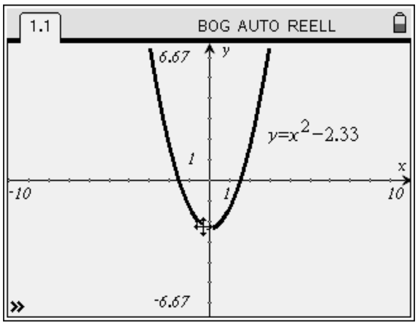
Um die Parabel zu verschieben, bewegst Du den Zeiger in die Nähe des Scheitelpunktes bis das „Kreuz“ (siehe Abbildung) erscheint.
Mit ctrl kannst Du sie packen und mit ⇧ und ▲ oder ▼ nach oben oder unten verschieben. Dabei muss ⇧ die ganze Zeit gedrückt sein, damit die Bewegung senkrecht nach oben, bzw. unten verläuft.

Wie ändert sich der Funktionsterm mit der Verschiebung?

Alle Funktionsgleichungen haben die Form $\mathbf{y = x^2 + c}$.

Für welche Parabeln (im Vergleich zur Normalparabel) ist c positiv, für welche negativ?





Aufgabe

Zeichne den Graphen der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$.

a) Wie ändert sich der Funktionsterm, wenn Du die Öffnung der Parabel änderst? Beschreibe.

b) Wie ändert sich der Funktionsterm, wenn Du die Normalparabel nach oben und unten verschiebst?

c) Wie ändert sich der Funktionsterm, wenn Du die Normalparabel nach rechts und links verschiebst?

d) Kombiniere die Veränderungen von a) – c) und beschreibe.

a) Öffnung der Parabel

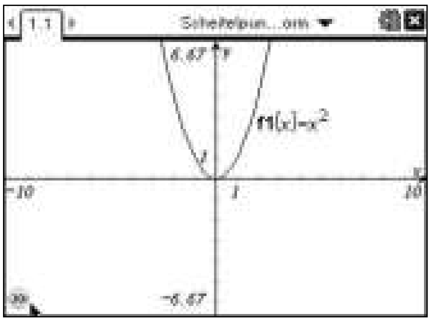
Öffne eine Seite mit Graphs und gib in der Eingabezeile die Zuordnungsvorschrift $f1(x) = x^2$ ein. Um die Öffnung der Parabel zu verändern, bewegst Du den Zeiger in die Nähe eines der beiden „Äste“ bis der „Pfeil“ (siehe Abbildung) erscheint.
Mit ctrl kannst Du sie packen und die Öffnung mit ◀ oder ▶ bzw. dem Touchpad variieren.

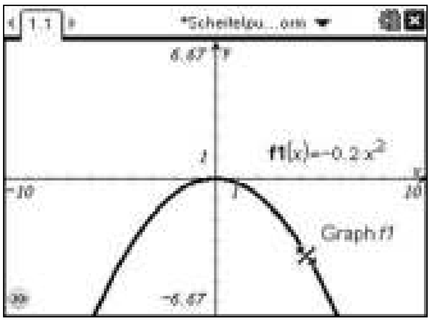
Mit der Änderung der Parabel, ändert sich passend dazu auch die Beschriftung und zeigt die zur Parabel gehörige Funktionsgleichung an.

Die Gleichungen aller Graphen haben die Form $\mathbf{y = a \cdot x^2}$.

Untersuche noch:

Für welche Werte von a ist die Öffnung der Parabel weiter oder enger als die der Normalparabel?
Für welche Werte von a ist die Parabel nach oben bzw. nach unten geöffnet?





b) Verschiebung nach oben oder unten

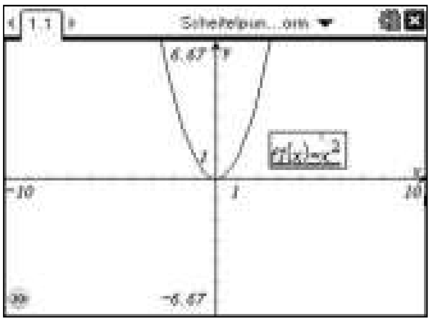
Wenn Du zweimal auf die angezeigte Funktionsgleichung klickst, kannst Du durch Löschen des Vorfaktors wieder die Normalparabel erhalten. Eine weitere Möglichkeit ist die Eingabezeile anzuzeigen und den Term dort zu ändern.

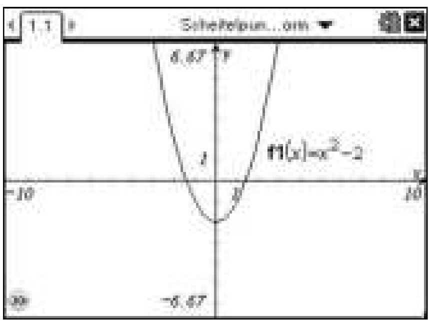
Um die Parabel zu verschieben, bewegst Du den Zeiger in die Nähe des Scheitelpunktes bis das „Kreuz“ (siehe Abbildung) erscheint.
Mit ctrl kannst Du sie packen und mit shift und ▲ oder ▼ bzw. dem Touchpad nach oben oder unten verschieben.
Dabei muss shift die ganze Zeit gedrückt sein, damit die Bewegung senkrecht nach oben, bzw. unten verläuft.
.

Wie ändert sich der Funktionsterm mit der Verschiebung?

Die Gleichungen aller Graphen haben die Form $\mathbf{y = x^2 + c}$.

Für welche Parabeln (im Vergleich zur Normalparabel) ist c positiv, für welche negativ?





Parameter in der Scheitelform

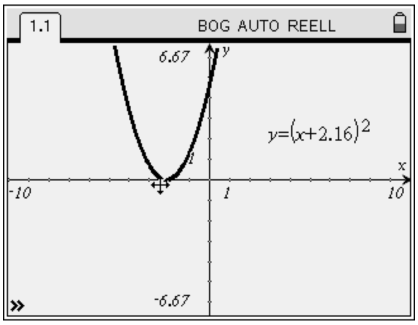
c) Verschiebung nach links oder rechts

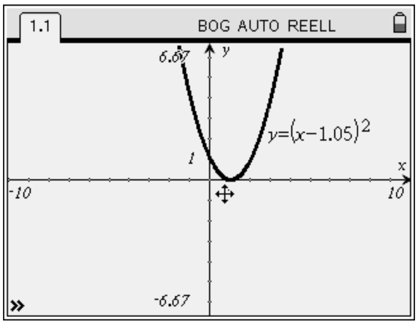
Stelle wieder den Graphen der Normalparabel $y = x^2$ her. „Packe“ ihn wie oben beschrieben am Scheitel. Sobald das Kreuz erscheint, mit ctrl ✋. Mit ⇧ und ◄ oder ► kannst Du sie nach links oder rechts verschieben. Dabei muss ⇧ die ganze Zeit gedrückt sein, damit die Bewegung waagrecht nach links, bzw. rechts verläuft.

An welcher Stelle ändert sich der Funktionsterm mit der Verschiebung?

Beachte genau den Unterschied zur Verschiebung nach oben bzw. unten.
Alle Funktionsgleichungen haben die Form $\mathbf{y = (x - d)^2}$.

Welches Vorzeichen hat d, wenn die Parabel nach rechts vorschoben wird?
Welches Vorzeichen hat d, wenn sie nach links verschoben wird?





d) Kombination der Verschiebungen

Stelle wieder den Graphen der Normalparabel $y = x^2$ her. „Packe“ sie wie oben beschrieben, sobald das Kreuz erscheint, mit ctrl ✋. Mit ⇧ und ◄ oder ► kannst Du sie nach links bzw. rechts verschieben, mit ⇧ und ▲ oder ▼ nach oben bzw. unten.

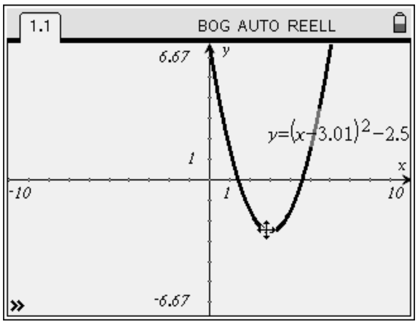
An welcher Stelle ändert sich der Funktionsterm mit der Verschiebung?

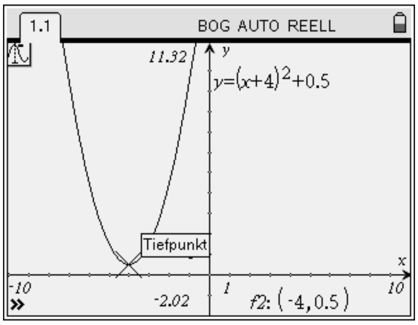
Alle Funktionsgleichungen haben die Form $\mathbf{y = (x - d)^2 + c}$.

Kannst Du die Änderung des Funktionsterms vorhersagen, wenn Du beginnst die Parabel zu verschieben?

Denke dir einen Term aus z.B. $y = (x + 4)^2 + 0{,}5$ und stelle die zugehörige Parabel durch Verschiebung der Parabel her.

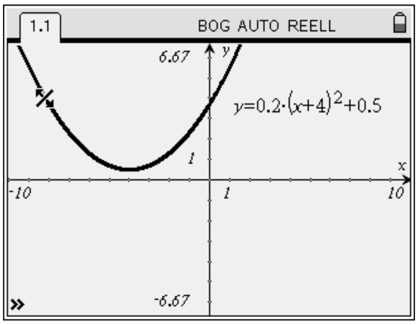
Welche Koordinaten hat dann der Scheitelpunkt der Parabel?





Kombination der Verschiebungen mit Änderung der Öffnung

Wenn Du bei der verschobenen Parabel nun an den \`Ästen´ die Öffnung veränderst, kannst Du sehen, dass der Funktionsterm zusätzlich noch einen Faktor vor der Klammer erhält. Die Gleichungen aller Funktionsgleichungen haben die Form $\mathbf{y = a \cdot (x - d)^2 + c}$.
Der Faktor a hat dabei die gleiche Bedeutung für die Öffnung, wie sie bei a) untersucht wurde.



c) Verschiebung nach links oder rechts

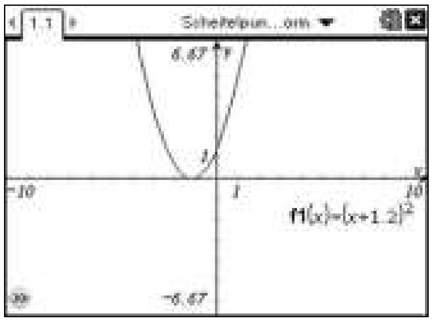
Stelle wieder den Graphen der Normalparabel $y = x^2$ her. „Packe“ ihn wie oben beschrieben am Scheitel. Sobald das Kreuz erscheint, mit ctrl ☟. Mit ⇧shift und ◀ oder ▶ bzw. dem Touchpad kannst Du sie nach links oder rechts verschieben. Dabei muss ⇧shift die ganze Zeit gedrückt sein, damit die Bewegung waagrecht nach links, bzw. rechts verläuft.

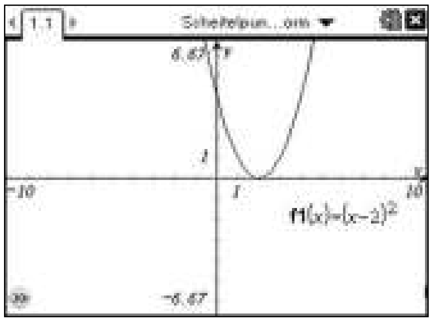
An welcher Stelle ändert sich der Funktionsterm mit der Verschiebung?

Beachte genau den Unterschied zur Verschiebung nach oben bzw. unten.

Die Gleichungen aller Graphen haben die Form
$y = (x – d)^2$.

Welches Vorzeichen hat d, wenn die Parabel nach rechts vorschoben wird?
Welches Vorzeichen hat d, wenn sie nach links verschoben wird?





d) Kombination der Verschiebungen

Stelle wieder den Graphen der Normalparabel $y = x^2$ her. „Packe“ sie wie oben beschrieben, sobald das Kreuz erscheint, mit ctrl ☟. Mit ◀ oder ▶ bzw. dem Touchpad kannst Du sie nach links und rechts verschieben, mit ⇧shift und ▲ oder ▼ bzw. dem Touchpad nach und unten.

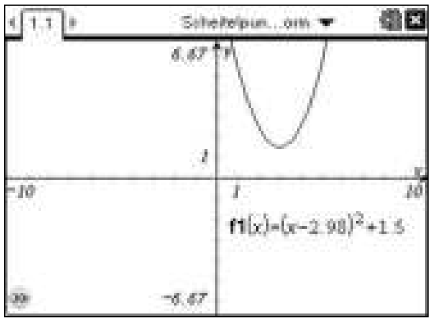
An welcher Stelle ändert sich der Funktionsterm mit der Verschiebung?

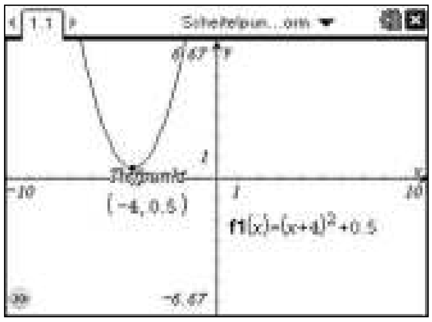
Die Gleichungen aller Graphen haben die Form
$y = (x – d)^2 + c$.

Kannst Du die Änderung des Funktionsterms vorhersagen, wenn Du beginnst die Parabel zu verschieben?

Denke dir einen Term aus z.B. $y = (x + 4)^2 + 0{,}5$ und stelle die zugehörige Parabel durch Verschiebung der Parabel her.

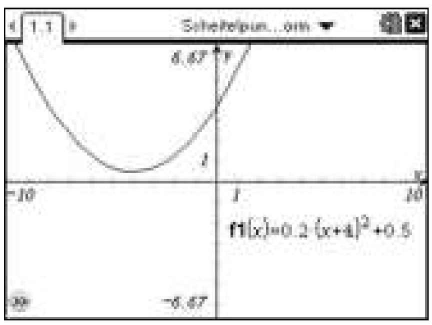
Welche Koordinaten hat dann der Scheitelpunkt der Parabel?





Kombination der Verschiebungen mit Änderung der Öffnung

Wenn Du bei der verschobenen Parabel nun an den „Ästen“ die Öffnung veränderst, kannst Du sehen, dass der Funktionsterm zusätzlich noch einen Faktor vor der Klammer erhält.
Die Gleichungen aller Graphen haben die Form
$y = a \cdot (x – d)^2 + c$.
Der Faktor a hat dabei die gleiche Bedeutung für die Öffnung, wie sie bei a) untersucht wurde.



Anwendungsaufgabe zu linearen Zuordnungen

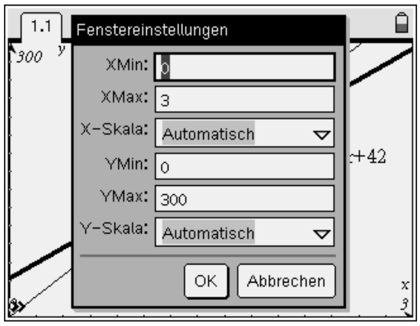
Aufgabe

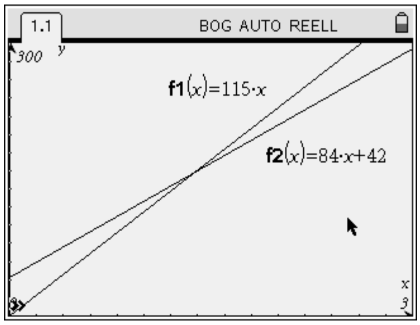
In Stuttgart startet morgens um 8:00 Uhr ein ICE, der mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 115 km/h ohne Halt nach München fährt. 30 Minuten vorher ist ein Güterzug in dieselbe Richtung gestartet. Er fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 84 km/h. In welcher Entfernung und um welche Uhrzeit holt der ICE den Güterzug ein?
Löse graphisch und rechnerisch.
Betrachte dazu jeweils die Zuordnung *Zeit (in h) → Entfernung von Stuttgart (in km)*

Darstellung in Graphs & Geometry

Öffne eine Seite mit Graphs & Geometry.
Die Zuordnungsvorschrift für den ICE lautet $y = 115 \cdot x$.
Der Güterzug ist um 8:00 h schon 30 Minuten unterwegs, deshalb hat er bei 84 km/h schon 42 km zurückgelegt. Die Zuordnungsvorschrift für den Güterzug ist $y = 84 \cdot x + 42$.
Um eine sinnvolle Darstellung zu erhalten, wählst Du eine passende Achseneinteilung mit menu 4: Fenster, dort 1.
Für die Zeitachse (x-Achse) z.B. $0 < x < 3$ und für die Entfernung (y-Achse) z.B. $0 < y < 300$.
Gib nun die Zuordnungsvorschriften für ICE und Güterzug in die Eingabezeile ein, d.h.
$f1(x) = 115 \cdot x$ und $f2(x) = 84 \cdot x + 42$.
Um die Beschriftung der Graphen anzuzeigen, gehst Du mit dem Pfeil auf die Gerade. Wenn sie \`fett´ markiert ist, wählst Du ctrl menu: dort 2: Beschriftung. Bestätige mit Klick, die Zuordnungsvorschrift erscheint. Sie lässt sich mit ctrl Klick „packen“ und an den gewünschten Platz verschieben.
Mit der zweiten Gerade ebenso verfahren.

Hinweis:
Die Eingabezeile lässt sich mit ctrl G ein- und ausblenden.

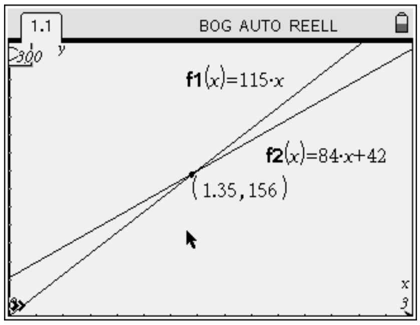




Bestimmung des Schnittpunktes

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, wählst Du menu 6 3: Schnittpunkt(e). Gehe mit der Pfeiltaste nacheinander zu den Graphen und „klicke“ (Klick) sie nacheinander an, wenn sie „fett“ markiert sind. Der Schnittpunkt und seine Koordinaten werden angezeigt. Man kann ablesen: (1,35 / 156).

Nach 1,35 Stunden, also nach ca. 1 Stunde und 21 Minuten überholt der ICE den Güterzug.
Die beiden Züge sind dann 156 km von Stuttgart entfernt.



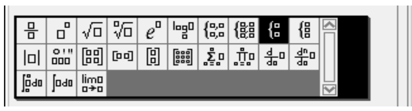
Rechnerische Lösung

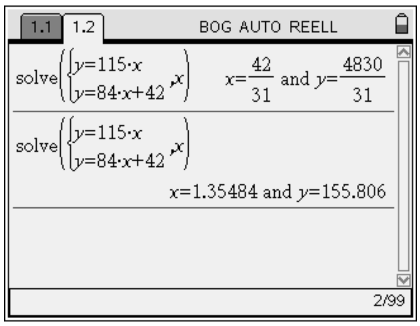
Öffne eine Seite mit dem Calculator. Wenn Du die Zuordnungsvorschriften aufgestellt hast, kannst Du die Lösung mit dem solve-Befehl erhalten.

Wähle menu 3 1. Gehe mit ctrl Vorlagen zu den Formatvorlagen und wähle die geschweifte Klammer mit zwei Zeilen. Gib beide Gleichungen ein, dahinter noch die Variable x, durch Komma abgetrennt.

Mit enter erhältst Du exakte Lösung für x und y, d.h. Brüche.

Um Dezimalzahlen zu erhalten, löse mit ctrl enter. Gerundet ergeben sich die Werte, die Du auch bei der graphischen Lösung erhalten hast.



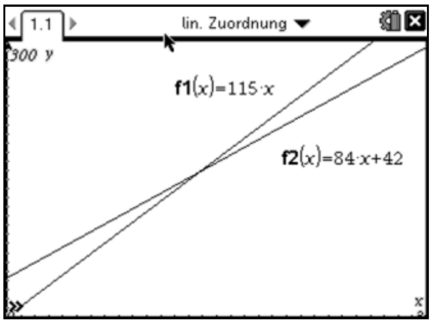


Aufgabe
In Stuttgart startet morgens um 8:00 Uhr ein ICE, der mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 115 km/h ohne Halt nach München fährt. 30 Minuten vorher ist ein Güterzug in dieselbe Richtung gestartet. Er fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 84 km/h.
In welcher Entfernung und um welche Uhrzeit holt der ICE den Güterzug ein?
Löse graphisch und rechnerisch.
Betrachte dazu jeweils die Zuordnung *Zeit (in h)* $\rightarrow$ *Entfernung von Stuttgart (in km)*

Darstellung in Graphs

Öffne eine Seite mit Graphs.
Die Zuordnungsvorschrift für den ICE lautet y = 115·x.
Der Güterzug ist um 8:00 h schon 30 Minuten unterwegs, deshalb hat er bei 84 km/h schon 42 km zurückgelegt. Die Zuordnungsvorschrift für den Güterzug ist y = 84·x +42.
Um eine sinnvolle Darstellung zu erhalten, wählst Du eine passende Achseneinteilung mit (menu)(4): Fenster, dort (1).
Für die Zeitachse (x-Achse) z.B. 0 < x < 3 und für die Entfernung (y-Achse) z.B. 0 < y < 300.
Gib nun die Zuordnungsvorschriften für ICE und Güterzug in die Eingabezeile ein, d.h.
f1(x) = 115·x und f2(x) =84·x + 42.
Die Beschriftung der Graphen lässt sich mit (ctrl) „packen“ und an den gewünschten Platz verschieben.
Um die Beschriftung auszublenden, gehst Du mit dem Pfeil auf die Gerade. Wenn sie „fett“ markiert ist, wählst Du (ctrl)(menu): dort (2): Beschriftung. Bestätige mit , die Zuordnungsvorschrift verschwindet.

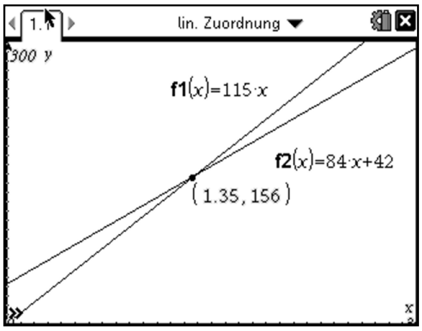
Hinweis:
Die Eingabezeile lässt sich mit (ctrl)(G) ein- und ausblenden.



Bestimmung des Schnittpunktes

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, wählst Du (menu)(6)(4): Schnittpunkt(e). Lege mit eine untere und eine obere Schranke fest in der die Schnittpunkte bestimmt werden sollen. Der Schnittpunkt und seine Koordinaten werden angezeigt. Man kann ablesen: (1,35 / 156).

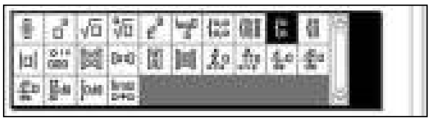
Nach 1,35 Stunden, also nach ca. 1 Stunde und 21 Minuten überholt der ICE den Güterzug.
Die beiden Züge sind dann 156 km von Stuttgart entfernt.

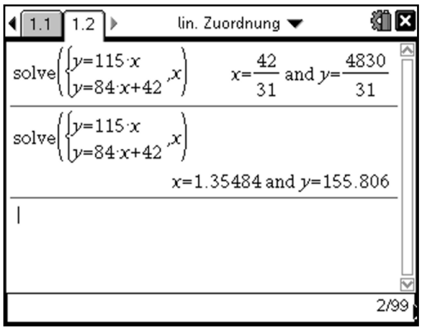


Rechnerische Lösung

Öffne eine Seite mit dem Calculator. Wenn Du die Zuordnungsvorschriften aufgestellt hast, kannst Du die Lösung mit dem solve-Befehl erhalten.
Wähle (menu)(3)(1). Gehe mit zu den Formatvorlagen und wähle die geschweifte Klammer mit zwei Zeilen. Gib beide Gleichungen ein, dahinter noch die Variable x, durch Komma abgetrennt.

Mit (enter) erhältst Du exakte Lösung für x und y, d.h. Brüche.
Um Dezimalzahlen zu erhalten, löse mit (ctrl)(enter). Gerundet ergeben sich die Werte, die Du auch bei der graphischen Lösung erhalten hast.



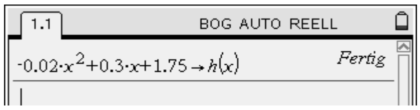
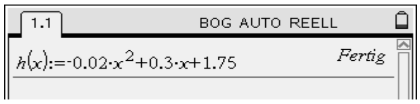
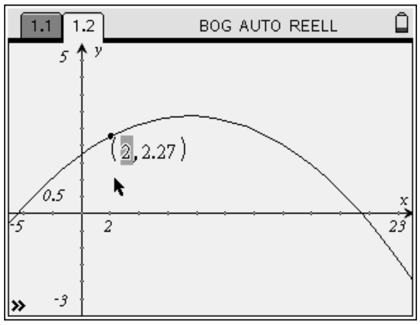
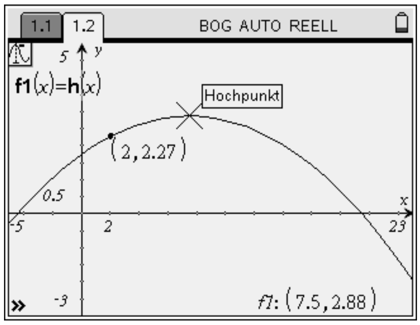
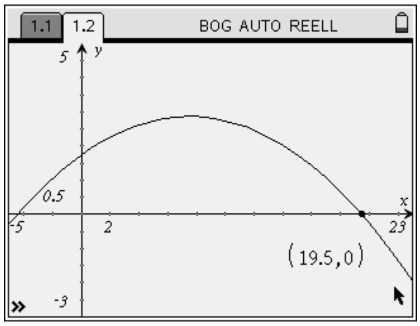


Anwendungsaufgabe zu quadratischen Funktionen

Aufgabe

Die Flugbahn eines Balles ist annähernd parabelförmig und wird mit der Funktionsgleichung $h(x) = -0{,}02 \cdot x^2 + 0{,}3 \cdot x + 1{,}75$ beschrieben.
Dabei ist x die horizontale Entfernung von der Abwurfstelle und h die Höhe des Balles (in m).

a) Wie hoch ist der Ball 2 Meter von der Abwurfstelle?
b) Nach welcher horizontalen Strecke erreicht er die größte Höhe? Wie hoch ist da der Ball?
c) Wie weit entfernt von der Abwurfstelle trifft er Ball am Boden auf?
d) Wie weit entfernt von der Abwurfstelle erreicht der Ball die Höhe von 1,9 m?

Definition im Calulator Öffne eine Seite mit dem Calculator und definiere die Funktion $h(x) = -0{,}02 \cdot x^2 + 0{,}3 \cdot x + 1{,}75$. Dazu gibst Du den Funktionsterm ein und speicherst ihn mit ctrl sto→ nach h(x). Eine weitere Möglichkeit ist die Definition mit **`: =`,** d.h. h(x) := …. Hinweis: Die Eingabezeile lässt sich mit ctrl G ein- und ausblenden.	 
Lösung mit Graphs & Geometry Öffne eine Seite mit Graphs & Geometry und gib in der Eingabezeile f1(x) = h(x) ein. Wähle in menu 4 1 die geeigneten Fenstereinstellungen, um die Flugbahn vollständig darzustellen (siehe rechts) Um die Höhe 2 Meter nach dem Abwurf zu bestimmen wähle Mit menu 6 2: Punkt auf und setze einen Punkt mit auf die Kurve. Klicke zweimal auf das Textfeld des x-Wertes und überschreibe mit 2. Der y-Wert liefert das Ergebnis: *a) Nach 2 Metern ist der Ball 2,27 m hoch.*	
Bestimmung des höchsten Punktes Mit menu 5 1: Spur und der Pfeiltaste ▶ kannst Du die Kurve bis zum Hochpunkt entlang fahren. Rechts unten werde die Koordinaten angezeigt. *b) Nach 7,5 Metern wird die höchste Höhe erreicht. Sie beträgt 2,88 m.* **Nullstelle** Um zu bestimmen wo der Ball am Boden auftrifft, ist die Nullstelle von h zu bestimmen. Dazu gehst Du wie gerade beschrieben vor oder ziehst den Punkt auf der Kurve in die Nähe des Schnittpunktes mit der x-Achse und gibst im Textfeld für den y-Wert 0 ein. *c) Nach 19,5 Metern kommt der Ball am Boden auf.*	 

Aufgabe

Die Flugbahn eines Balles ist annähernd parabelförmig und wird mit der Funktionsgleichung $h(x) = -0{,}02 \cdot x^2 + 0{,}3 \cdot x + 1{,}75$ beschrieben.

Dabei ist x die horizontale Entfernung von der Abwurfstelle und h die Höhe des Balles (in m).

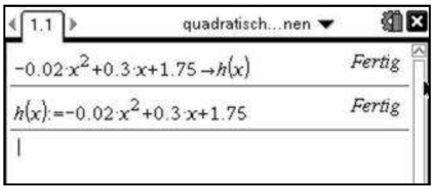
a) Wie hoch ist der Ball 2 Meter von der Abwurfstelle?
b) Nach welcher horizontalen Strecke erreicht er die größte Höhe? Wie hoch ist da der Ball?
c) Wie weit entfernt von der Abwurfstelle trifft er Ball am Boden auf?
d) Wie weit entfernt von der Abwurfstelle erreicht der Ball die Höhe von 1,9 m?

Definition im Calulator

Öffne eine Seite mit dem Calculator und definiere die Funktion $h(x) = -0{,}02 \cdot x^2 + 0{,}3 \cdot x + 1{,}75$.

Dazu gibst du den Funktionsterm ein und speicherst ihn mit (ctrl)(var) nach h(x). Eine weitere Möglichkeit ist die Definition mit **`: =`,**

d.h. h(x) := ….



Lösung mit Graphs

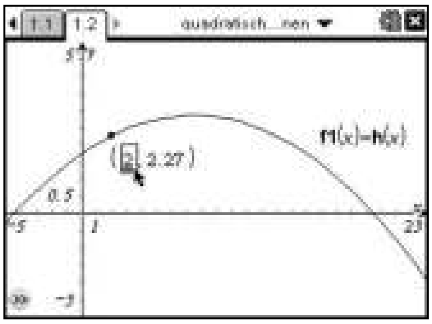
Öffne eine Seite mit Graphs und gib in der Eingabezeile

f1(x) = h(x) ein.

Wähle in (menu)(4)(1) die geeigneten Fenstereinstellungen, um die Flugbahn vollständig darzustellen (siehe rechts)

Um die Höhe 2 Meter nach dem Abwurf zu bestimmen wähle Mit (menu)(7)(2): Punkt auf und setze einen Punkt mit (click) auf die Kurve. Klicke zweimal auf das Textfeld des x-Wertes und überschreibe mit 2. Der y-Wert liefert das Ergebnis:

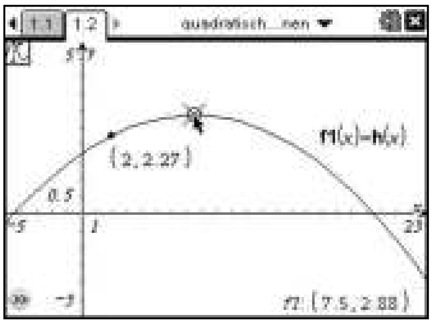
a) Nach 2 Metern ist der Ball 2,27 m hoch.



Bestimmung des höchsten Punktes

Mit (menu)(5)(1): Spur und dem Touchpad kannst du die Kurve bis zum Hochpunkt entlang fahren. Rechts unten werde die Koordinaten angezeigt.

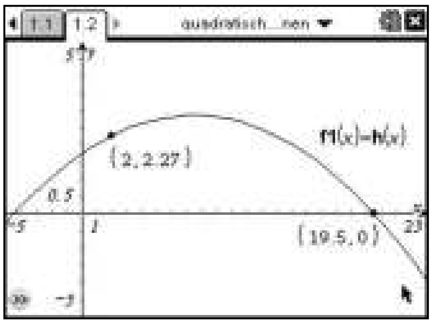
b) Nach 7,5 Metern wird die höchste Höhe erreicht. Sie beträgt 2,88 m.



Nullstelle

Um zu bestimmen wo der Ball am Boden auftrifft, ist die Nullstelle von h zu bestimmen. Dazu gehst du wie gerade beschrieben vor oder ziehst den Punkt auf der Kurve in die Nähe des Schnittpunktes mit der x-Achse und gibst im Textfeld für den y-Wert 0 ein.

c) Nach 19,5 Metern kommt der Ball am Boden auf.

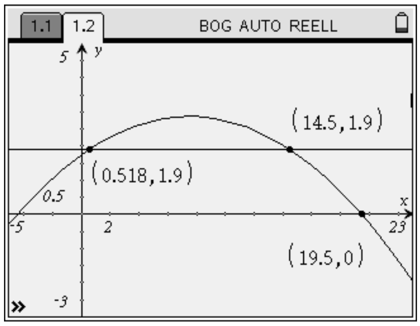


Anwendungsaufgabe zu quadratischen Funktionen

Entfernung in 1,9 m Höhe

Gib in der Eingabezeile f2(x) = 1,9 ein. Um die Schnittpunkte der Gerade mit der Kurve zu bestimmen, wählst Du menu 6 3: Schnittpunkt(e). Gehe mit der Pfeiltaste nacheinander zu den Graphen und „klicke“ ( ) sie nacheinander an, wenn sie „fett“ markiert sind. Die Schnittpunkte und ihre Koordinaten werden angezeigt.

d) Nach 0,52 Metern und noch mal nach 19,5 Metern hat der Ball eine Höhe von 1,9 Metern.



Algebraische Lösung im Calculator

Alternativ zur graphischen Lösung kannst Du die Aufgabe auch im mit dem Calculator lösen.

Gehe dazu zurück auf die Calculatorseite .

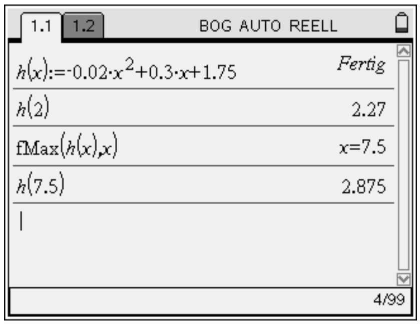
a) Um die Höhe nach 2 m zu bestimmen muss h an der Stelle 2 berechnet werden: h(2) = 2,27

Nach 2 Metern ist der Ball 2,27 m hoch

b) Zur Ermittlung der des Maximums der Höhe, gibt es den in menu 4 7 den Befehl `Funktionsmaximum´ fMax(Funktion,Variable): hier fMax(h(x),x) (siehe rechts)

Das Ergebnis x = 7,5 muss jetzt noch in h eingesetzt werden, um die zugehörige Höhe zu bestimmen. Dazu kannst Du die Lösung aus der oberen Zeile mit ◄ und dann auch in die Klammer kopieren (lohnt sich vor allem bei vielen Ziffern): h(7,5) = 2,875.

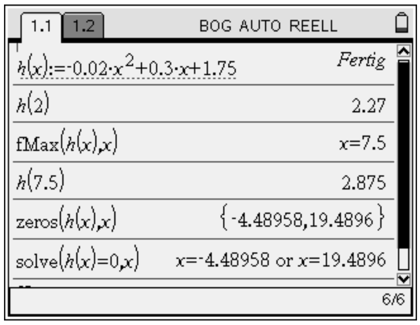
Nach 7,5 Metern wurde ein Höhe von 2,88 m erreicht.



Bestimmung der Nullstelle

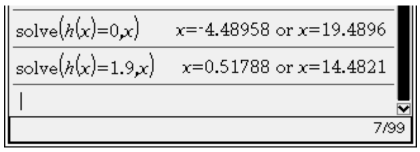
c) Hier wieder zwei Möglichkeiten. 1. Du gehst mit menu 3 4 zu Nullstellen zum Befehl `zeros´. Hier gibst Du wie oben zeros(Funktion,Variable): hier zeros(h(x),x) ein.
Du erhältst zwei Lösungen {-4,48958; 19,4896}.
2. Möglichkeit ist die Benutzung des `solve´-Befehls.
Es ist die Gleichung h(x) = 0 zu lösen, also solve(h(x)=0,x).
Man erhält die gleichen Lösungen, wobei die erste negativ ist und für die Aufgabenstellung keinen Sinn macht.

Nach ungefähr 19,5 Metern kommt der Ball am Boden auf.



d) Zur Bestimmung der Entfernung von der Abwurfstelle bei einer Ballhöhe von 1,9 m lässt sich wieder der `solve´-Befehl verwenden. Hier solve(h(x)=1,9,x)
Es ergeben sich die beiden Lösungen rechts.

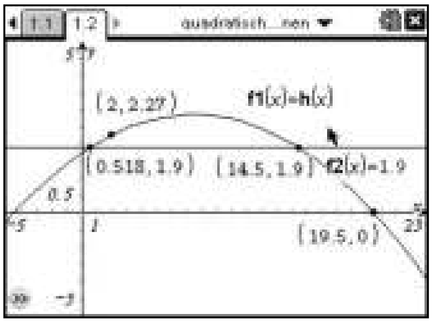
Nach 0,52 Metern und noch mal nach 19,5 Metern hat der Ball eine Höhe von 1,9 Metern.



Entfernung in 1,9 m Höhe

Gib in der Eingabezeile f2(x) = 1,9 ein. Um die Schnittpunkte der Gerade mit der Kurve zu bestimmen, wählst du (menu)(7)(3): Schnittpunkt(e). Die Koordinaten der Punkte werden automatisch mit angegeben. Du kannst die Koordinaten ausblenden indem du den Text markierst und dann (ctrl)(menu)(3): Anzeigen auswählst.

d) Nach 0,52 Metern und noch mal nach 19,5 Metern hat der Ball eine Höhe von 1,9 Metern.



Algebraische Lösung im Calculator

Alternativ zur graphischen Lösung kannst du die Aufgabe auch im mit dem Calculator lösen.

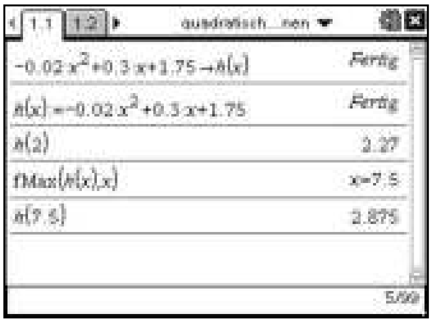
Gehe dazu zurück auf die Calculatorseite.

a) Um die Höhe nach 2 m zu bestimmen muss h an der Stelle 2 berechnet werden: h(2) = 2,27

Nach 2 Metern ist der Ball 2,27 m hoch

b) Zur Ermittlung der des Maximums der Höhe, gibt es den in (menu)(4)(8) den Befehl \`Funktionsmaximum´
fMax(Funktion,Variable): hier fMax(h(x),x) (siehe rechts)
Das Ergebnis x = 7,5 muss jetzt noch in h eingesetzt werden, um die zugehörige Höhe zu bestimmen. Dazu kannst du die Lösung aus der oberen Zeile mit (shift) ◀ und dann (enter) auch in die Klammer kopieren (lohnt sich vor allem bei vielen Ziffern): h(7,5) = 2,875.

Nach 7,5 Metern wurde ein Höhe von 2,88 m erreicht.



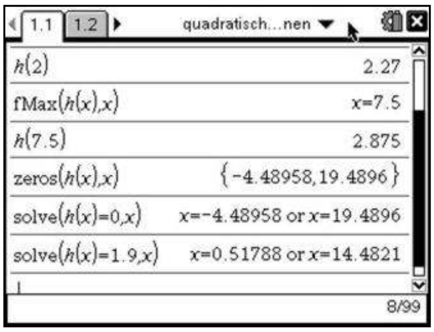
Bestimmung der Nullstelle

c) Hier wieder zwei Möglichkeiten. 1. Du gehst mit (menu)(3)(4) zu Nullstellen zum Befehl \`zeros´. Hier gibst du wie oben *zeros(Funktion,Variable): hier zeros(h(x),x) ein.*
Du erhältst zwei Lösungen {-4,48958; 19,4896}.
2. Möglichkeit ist mit (menu)(3)(1) dem \`solve´ -Befehl.
Es ist die Gleichung h(x) = 0 zu lösen, also *solve(h(x)=0,x)*.
Man erhält die gleichen Lösungen, wobei die erste negativ ist und für die Aufgabenstellung keinen Sinn macht.

Nach ungefähr 19,5 Metern kommt der Ball am Boden auf.

d) Zur Bestimmung der Entfernung von der Abwurfstelle bei einer Ballhöhe von 1,9 m lässt sich wieder der \`solve´-Befehl verwenden. Hier *solve(h(x)=1,9,x)*
Es ergeben sich die beiden Lösungen rechts.

Nach 0,52 Metern und noch mal nach 19,5 Metern hat der Ball eine Höhe von 1,9 Metern.



Berechnen und Vereinfachen von Termen

Aufgabe

a) Berechne die Werte des Terms $-a^2 + 7 \cdot a - 4$ für a = 3; 15; –5; –7

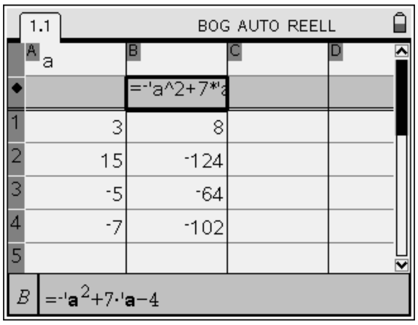
b) Vereinfache die Terme soweit wie möglich: (2x + 7) 3 − (11x + 11) + x und $\frac{5}{2} \cdot (2x + 10)$.

c) Klammere vollständig aus: 420·k + 1092

a) Berechnung in Lists & Spreadsheet

Öffne die Anwendung Lists & Spreadsheet**.**
Nenne die erste Spalte a und gib die Werte ein. Die zweite Zeile ist nur für Spaltenformeln reserviert.
In der zweiten Spalte kannst Du in der zweiten Zeile den zu berechnenden Term eingeben. Es erscheint eine Abfrage nach „Spalten- bzw. Variablenverweis". Hier wählst Du „Variablenverweise". Bei Bedarf kannst Du weitere Termwerte für a berechnen bzw. auch die berechneten Werte abändern.

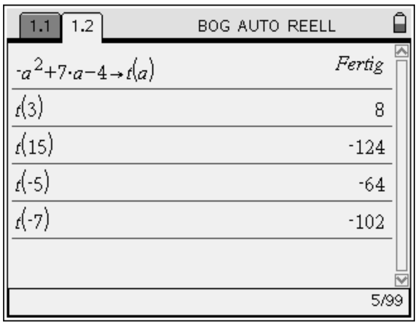
Hinweis: Die Spalten werden in alphabetischer Reihenfolge benannt. Da die Variablen auch meistens mit einem Buchstaben benannt werden (hier a) entsteht der Konflikt und man muss die Entscheidung treffen, ob Spalte a oder Variable a gemeint ist.



Berechnung im Calculator

Öffne in einer weiteren Seite mit (home)(1) den Calculator.
Gib den Term ein und speichere ihn mit (ctrl)(sto→ var) unter dem Namen t(a) (sprich „t von a") ab und schließe mit (enter).

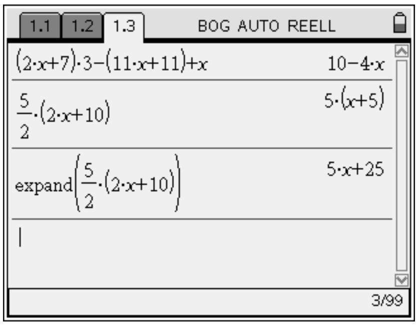
Um die Werte des Terms für a = 3, 15, –5 und –7 zu erhalten, gibst Du nun in t(a) die Werte für a ein, also t(3), t(15), t(-5) und t(–7).



b) Ausmultiplizieren / Vereinfachen

Gib den ersten Term „(2x + 7)·3 − (11x + 11) + x" im Calculator ein und bestätige mit (enter).
Der Term wird automatisch soweit wie möglich zusammengefasst. Dies geht aber nicht bei allen bzw. komplizierten Termen. Wenn Du nun den zweiten Term „$\frac{5}{2} \cdot (2x + 10)$" ebenso eingibst und (enter) drückst, erkennst Du, dass er nicht ausmultipliziert wird.

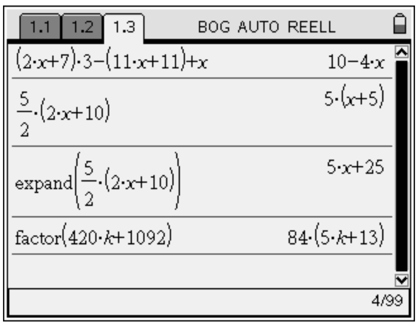
Hier hilft der \`expand´-Befehl (deutsch: \`entwickle´) im Menü (3)(3). Nach dem Aufrufen dieses Befehls erscheint \`expand()´ im Bildschirm. Gib den Term ein und bestätige mit (enter).



c) Ausklammern

Willst Du den Term 420·k + 1092 ausklammern, brauchst Du den „factor" – Befehl.
Du findest in (menu)(3)(2): Faktorisiere.

Nach dem Aufrufen dieses Befehls erscheint „factor()" im Bildschirm. An dieser Stelle muss der Term eingegeben werden und am Ende die Klammer geschlossen werden. Mit (enter) wird der Vorgang gestartet.



Aufgabe

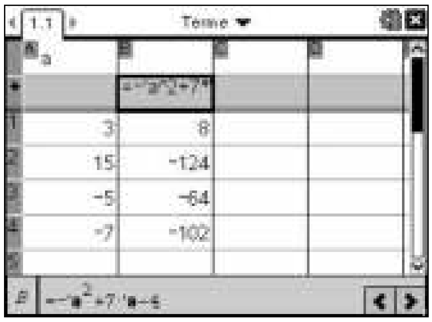
a) Berechne die Werte des Terms $-a^2 + 7 \cdot a - 4$ für a = 3; 15; –5; –7

b) Vereinfache die Terme soweit wie möglich: (2x + 7) 3 − (11x + 11) + x und $\frac{5}{2} \cdot (2x + 10)$.

c) Klammere vollständig aus: $420 \cdot k + 1092$

a) Berechnung in Lists & Spreadsheet

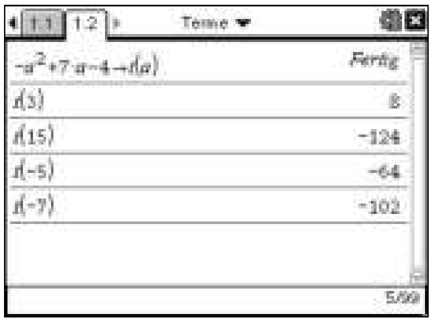
Öffne die Anwendung Lists & Spreadsheet**.**
Nenne die erste Spalte a und gib die Werte ein. Die zweite Zeile ist nur für Spaltenformeln reserviert.
In der zweiten Spalte kannst Du in der zweiten Zeile den zu berechnenden Term eingeben. Es erscheint eine Abfrage nach „Spalten- bzw. Variablenverweis". Hier wählst Du „Alle Variablenverweise". Bei Bedarf kannst Du weitere Termwerte für a berechnen bzw. auch die berechneten Werte abändern.
Hinweis: Die Spalten werden in alphabetischer Reihenfolge benannt. Da die Variablen auch meistens mit einem Buchstaben benannt werden (hier a) entsteht der Konflikt und man muss die Entscheidung treffen, ob Spalte a oder Variable a gemeint ist.



Berechnung im Calculator

Öffne in einer weiteren Seite mit (doc▾)(4)(3) den Calculator. Gib den Term ein und speichere ihn mit (ctrl)(var) unter dem Namen t(a) (sprich „t von a") ab und schließe mit (enter).

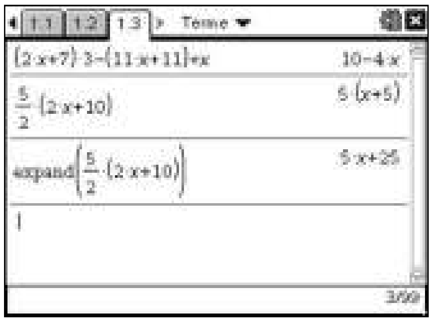
Um die Werte des Terms für a = 3, 15, –5 und –7 zu erhalten, gibst Du nun in t(a) die Werte für a ein, also t(3), t(15), t(-5) und t(–7).



b) Ausmultiplizieren / Vereinfachen

Gib den ersten Term „(2x + 7)·3 − (11x + 11) + x" im Calculator ein und bestätige mit (enter).
Der Term wird automatisch soweit wie möglich zusammengefasst. Dies geht aber nicht bei allen bzw. komplizierten Termen. Wenn Du nun den zweiten Term „$\frac{5}{2} \cdot (2x + 10)$" ebenso eingibst und (enter) drückst, erkennst Du, dass er nicht ausmultipliziert wird.

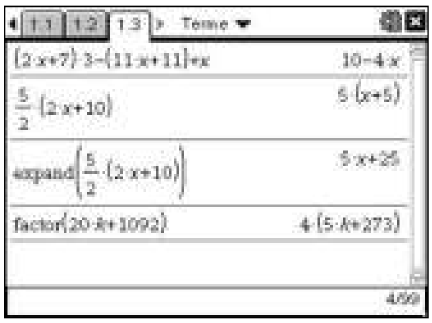
Zur Lösung solcher Probleme existiert der \`expand´-Befehl (deutsch: „entwickle") im (menu)(3)(3). Nach dem Aufrufen dieses Befehls erscheint \`expand()´ im Bildschirm. Gib den Term ein und bestätige mit (enter).



c) Ausklammern

Willst Du den Term $420 \cdot k + 1092$ ausklammern, brauchst Du den „factor" – Befehl.
Du findest in (menu)(3)(2): Faktorisiere.

Nach dem Aufrufen dieses Befehls erscheint „factor()" im Bildschirm. An dieser Stelle muss der Term eingegeben werden und am Ende die Klammer geschlossen werden. Mit (enter) wird der Vorgang gestartet.



Äquivalenzumformungen Schritt für Schritt

Aufgabe

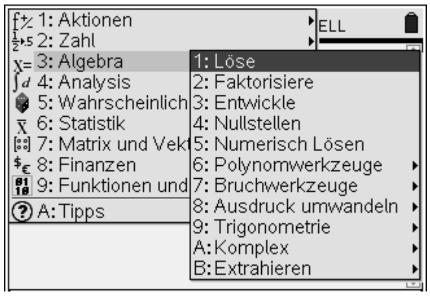
Alina hat einen Fehler in ihren Äquivalenzumformungen gemacht.
Finde und korrigiere ihn.

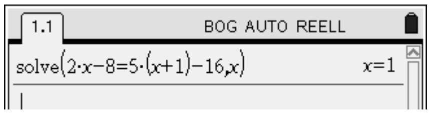
$2x - 8 = 5(x + 1) - 16$	| ausmultiplizieren
$2x - 8 = 5x + 5 - 16$	| zusammenfassen
$2x - 8 = 5x - 11$	| $-5x$ | $+8$
$-3x = -3$	| $+3$
$x = 0$	

Lösung der Gleichung mit dem solve – Befehl

Wähle in der Anwendung Calculator über menu 3 1: „Löse“ den Solve-Befehl aus.

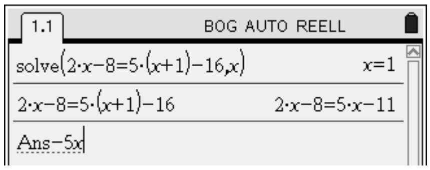
Gebe die zu lösende Gleichung in der Klammer ein. Dahinter, durch ein Komma abgetrennt, muss die Variable eingeben werden, nach der aufgelöst werden soll.

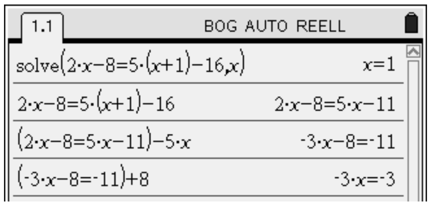




Überprüfung Schritt für Schritt

Dazu gibst Du die Gleichung im Calculator ein und bestätigst mit enter. Auf der rechten Seite erscheint die vereinfachte Gleichung.
Um die Äquivalenzumformungen vorzunehmen, gibst Du den Rechenschritt einfach ein, z.B. **–5x**, dann enter. Es erscheint automatisch der Ans – Befehl, der das zuletzt gespeicherte Ergebnis beinhaltet (in diesem Fall die gesamte Gleichung). Die Äquivalenzumformung wird vorgenommen und auf der rechten Seite erscheint die umgeformte Gleichung. Im nächsten Schritt das Gleiche noch mal, d.h. auf beiden Seiten +8.
Du kannst somit erkennen, ob und in welchem Schritt Du bei der Rechnung von Hand einen Fehler gemacht hast.

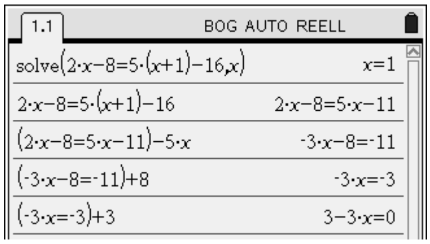




Fehler finden

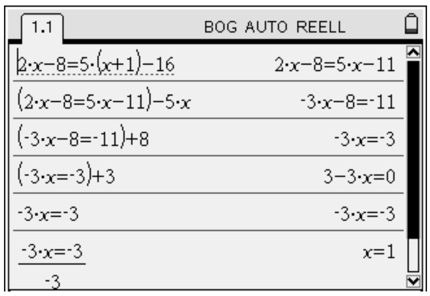
Hast Du einmal eine falsche Umformung gewählt, so erkennst Du es sofort an der umgeformten Gleichung, dass sie dich nicht zum Ziel führt.

In der Aufgabe wurde **„| + 3“** statt **„|: (- 3)“** gerechnet.



Neuer Versuch

Um eine neue Umformung zu wählen, gehst Du mit der Pfeiltaste ▲ zurück zur Gleichung vor der falschen Umformung.
Sie wird markiert und Du kannst sie mit zwei Mal enter in die untere Zeile kopieren und wieder neu probieren.
In diesem Fall ist der letzte richtige Schritt **„| : (- 3)“**, damit x auf der linken Seite alleine steht.
Nun kannst Du die Lösung rechts ablesen.



Äquivalenzumformungen Schritt für Schritt

Aufgabe

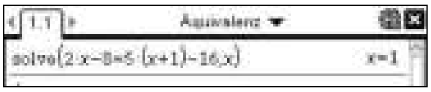
Alina hat einen Fehler in ihren Äquivalenzumformungen gemacht.
Finde und korrigiere ihn.

$$
\begin{aligned}
2x-8 &= 5(x+1)-16 && |\ \text{ausmultiplizieren}\\
2x-8 &= 5x+5\ -16 && |\ \text{zusammenfassen}\\
2x-8 &= 5x-\ 11 && |\ -5x \quad |+8\\
-3x &= -3 && |+3\\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Lösung der Gleichung mit dem solve – Befehl

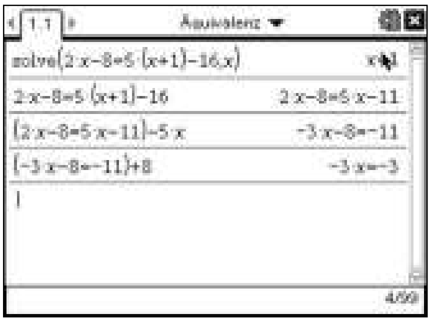
Wähle in der Anwendung Calculator über (menu)(3)(1): „Löse“ den Solve-Befehl aus.

Gebe die zu lösende Gleichung in der Klammer ein. Dahinter, durch ein Komma abgetrennt, muss die Variable eingeben werden, nach der aufgelöst werden soll.



Überprüfung Schritt für Schritt

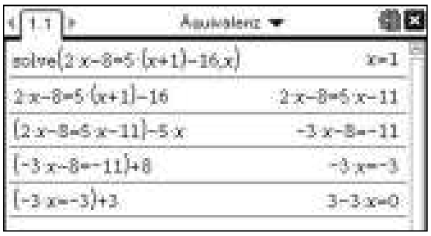
Dazu gibst Du die Gleichung im Calculator ein und bestätigst mit (enter). Auf der rechten Seite erscheint die vereinfachte Gleichung.
Um die Äquivalenzumformungen vorzunehmen, gibst Du den Rechenschritt einfach ein, z.B. **–5x**, dann (enter). Es erscheint automatisch der Ans – Befehl, der das zuletzt gespeicherte Ergebnis beinhaltet (in diesem Fall die gesamte Gleichung). Die Äquivalenzumformung wird vorgenommen und auf der rechten Seite erscheint die umgeformte Gleichung. Im nächsten Schritt das Gleiche noch mal, d.h. auf beiden Seiten +8.
Du kannst somit erkennen, ob und in welchem Schritt Du bei der Rechnung von Hand einen Fehler gemacht hast.



Fehler finden

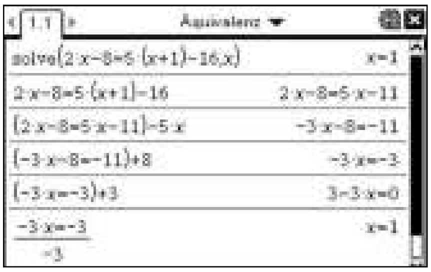
Hast Du einmal eine falsche Umformung gewählt, so erkennst Du es sofort an der umgeformten Gleichung, dass sie dich nicht zum Ziel führt.

In der Aufgabe wurde **„| + 3“** statt **„|: (- 3)“** gerechnet.



Neuer Versuch

Um eine neue Umformung zu wählen, gehst Du mit der Pfeiltaste ▲ zurück zur Gleichung vor der falschen Umformung.
Sie ist markiert und Du kannst sie mit (enter) in die untere Zeile kopieren, sodass Du wieder neu probieren kannst.
In diesem Fall ist der letzte richtige Schritt **„| : (- 3)**“, damit x auf der linken Seite alleine steht.
Nun kannst Du die Lösung rechts ablesen.



Lösen linearer Gleichungssysteme

Aufgabe:
Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS).

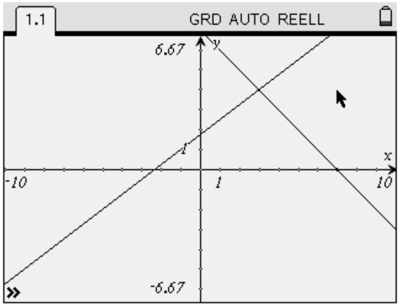
$$\frac{3}{4}x + \frac{7}{4} = y$$
$$y = -x + 7$$

Zeichnerische Lösung

Um das LGS zeichnerisch lösen zu können, müssen die beiden Gleichungen, falls noch nicht geschehen, zuerst nach y aufgelöst werden.

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$
$$y = -x + 7$$

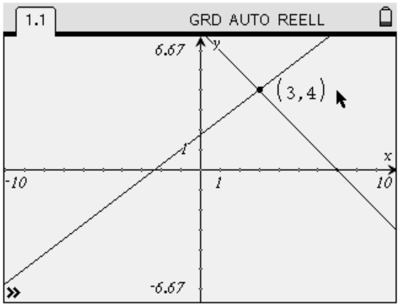
Nun werden beide Geraden in dasselbe Koordinatensystem eingezeichnet.



Bestimmung des Schnittpunktes

Die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden sind die Lösung des LGS.
Mit menu 6 3 lassen sich diese Koordinaten bestimmen, in dem man den Zeiger zuerst über die eine Gerade bewegt, klickt und dies dann bei der anderen Geraden wiederholt.

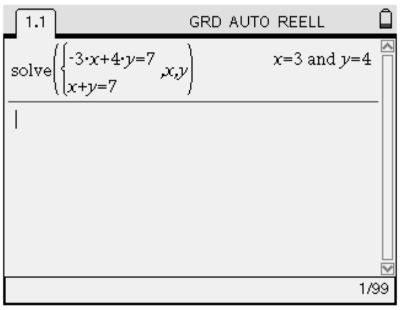
Die Anzeige der Schnittpunktskoordinaten lässt sich verschieben. Beende dazu den Modus „Schnittpunkt“ mit esc, fahre mit dem Zeiger zu den Koordinaten, drücke ctrl und verschiebe sie.



Rechnerische Lösung – Solve - Befehl

Öffne ein Calculator-Fenster und rufe den „solve“-Befehl auf (menu 3 1).
Mit ctrl öffnet sich ein Menu. Wähle das vorletzte Symbol in der ersten Zeile aus.

Gib nun in die beiden Felder die Gleichungen des LGS ein. Abgetrennt durch Kommata müssen noch die Variablen angegeben werden. Mit enter erhält man die Lösung.



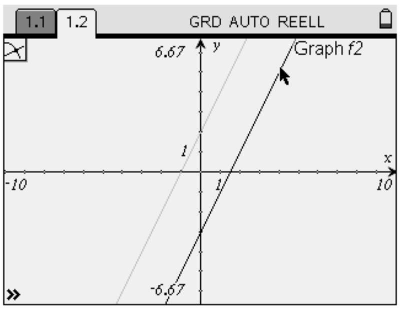
Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung

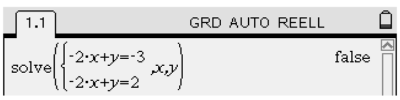
Ein LGS hat keine Lösung, wenn kein Schnittpunkt der Geraden existiert, d.h. wenn die Geraden parallel verlaufen. In diesem Fall lässt sich bei der zeichnerischen Lösung der zweite Graph nicht anklicken, es wird also auch kein Schnittpunkt angezeigt.

Bsp.:

$$-2x + y = -3$$
$$-2x + y = 2$$

Versucht man ein LGS, das keine Lösung besitzt, mit dem „solve“-Befehl zu lösen, erscheint „false“.

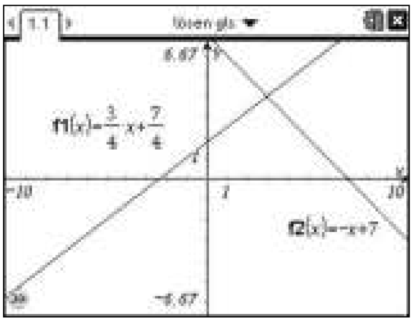
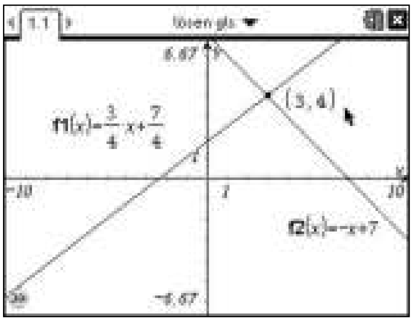
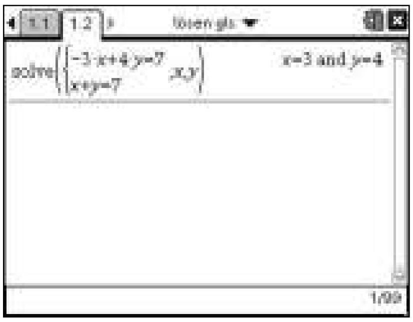
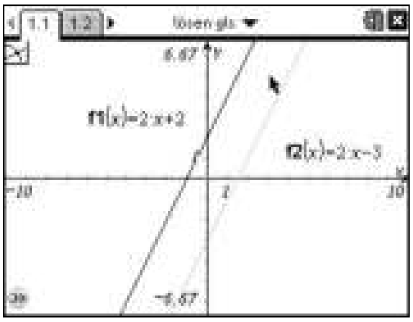




Aufgabe:
Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS).

$$\frac{3}{4}x + \frac{7}{4} = y$$

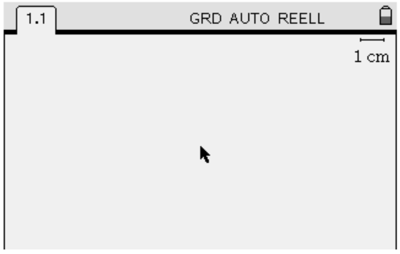
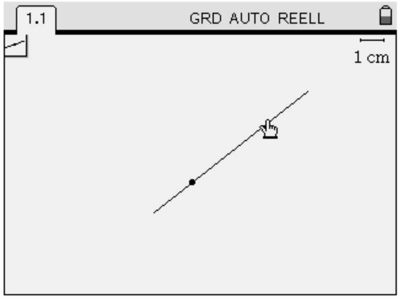
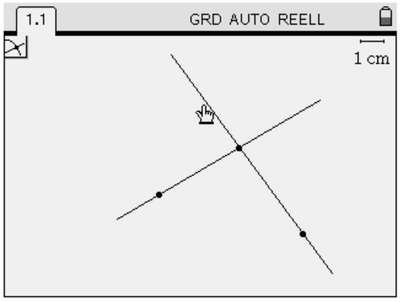
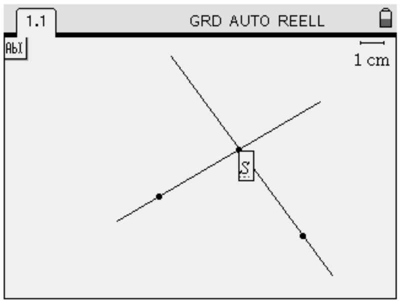
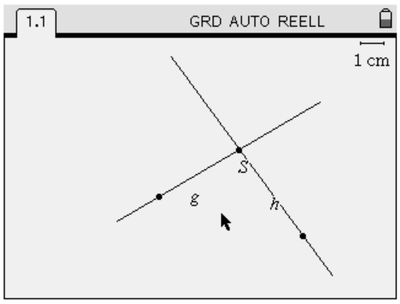
$$y = -x + 7$$

Zeichnerische Lösung Um das LGS zeichnerisch lösen zu können, müssen die beiden Gleichungen, falls noch nicht geschehen, zuerst nach y aufgelöst werden. $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ $y = -x + 7$ Nun werden beide Geraden in dasselbe Koordinatensystem eingezeichnet.	
Bestimmung des Schnittpunktes Die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden sind die Lösung des LGS. Mit (menu)(6)(4) lassen sich diese Koordinaten anzeigen, indem Du mit eine untere und eine obere Schranke festlegst in der der Schnittpunkt bestimmt werden soll. Die Anzeige der Schnittpunktskoordinaten lässt sich verschieben. Beende dazu den Modus „Schnittpunkt“ mit (esc), fahre mit dem Zeiger zu den Koordinaten, drücke (ctrl) und verschiebe sie.	
Rechnerische Lösung – Solve - Befehl Öffne ein Calculator-Fenster und rufe den „solve“-Befehl auf ((menu)(3)(1)). Mit öffnet sich ein Menu. Wähle das vorletzte Symbol in der ersten Zeile aus. Gib nun in die beiden Felder die Gleichungen des LGS ein. Abgetrennt durch Kommata müssen noch die Variablen angegeben werden. Mit (enter) erhält man die Lösung.	
Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung Ein LGS hat keine Lösung, wenn kein Schnittpunkt der Geraden existiert, d.h. wenn die Geraden parallel verlaufen. Über (menu)(7)(3) wird nun wieder nach dem Schnittpunkt gesucht, nach dem anklicken der ersten Graden lässt sich die zweite jedoch nicht mehr auswählen. Bsp.: $-2x + y = -3$ $-2x + y = 2$ Versucht man ein LGS, das keine Lösung besitzt, mit dem „solve“-Befehl zu lösen, erscheint „false“.	

Grundkonstruktionen, Bezeichnen und Bemaßen

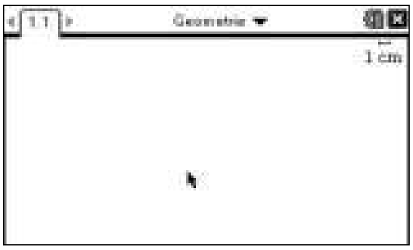
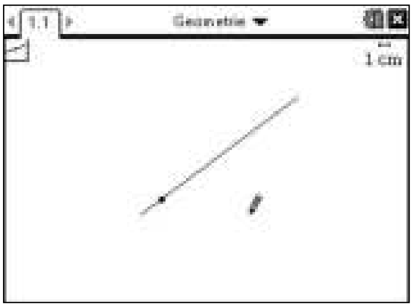
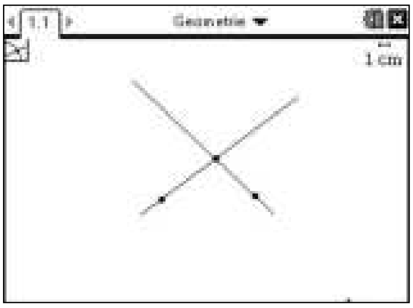
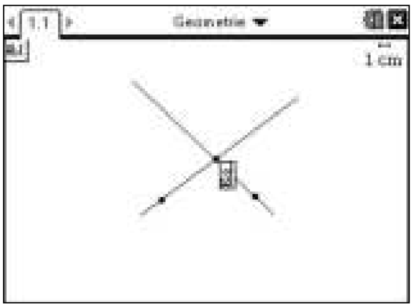
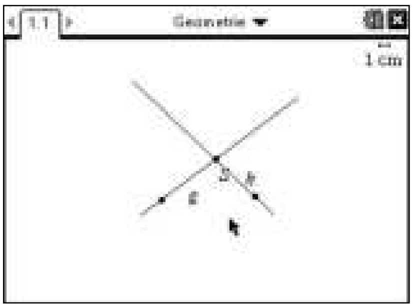
Aufgabe

a) Konstruiere die Winkelhalbierenden zu zwei sich schneidenden Geraden.
b) Konstruiere ein Dreieck mit den Seitenlängen a = 5 cm, b = 4 cm und c = 7 cm

Zeichenebene vorbereiten Wähle die Anwendung Graphs & Geometry. Wechsle zunächst in die Ebenengeometrie-Ansicht (menu 2 2). Eingabezeile und Achsen werden hier ausgeblendet. Rechts oben im ansonsten leeren Fenster erscheint eine cm-Skala. Die Skala lässt sich mit menu 2 7 ein- bzw. ausblenden. Alle Längenmaße in der Ebenengeometrie-Ansicht haben die Einheit Zentimeter.	
Zeichnen von Geraden Mit menu 6 4 kommst Du in den Geraden-Modus. Bewege den Pfeil an eine beliebige Stelle des Bildschirms. Mit einem „Klick“ (Klick) legst Du einen Punkt der Geraden fest. Anschließend kannst Du durch Bewegen des Pfeils die Richtung der Geraden festlegen und mit einem weiteren „Klick“ (Klick) fixieren. Der Geraden-Modus kann mit esc beendet werden.	
Schnittpunkt zweier Geraden Der Schnittpunkt zweier sich schneidender Geraden kann mit menu 6 3 bestimmt werden, indem Du nacheinander auf die sich schneidenden Geraden klickst. Wenn Du beim Konstruieren der zweiten Geraden den ersten „Klick“ (Klick) auf den bereits für die erste Gerade gezeichneten Punkt (wird fett dargestellt, wenn Du darüber fährst) machst erkennt der Nspire diesen Punkt bereits als Schnittpunkt.	
Bezeichnen von geometrischen Objekten Damit sich die Bezeichnungen beim späteren Verändern der Konstruktion automatisch mit bewegen, gehe vor, wie folgt: Mit menu 1 6 wird der Text-Modus aufgerufen. Anschließend bewegst Du den Cursor über das Objekt, das Du beschriften möchtest, z.B. den Schnittpunkt der Geraden, bis das Objekt fett dargestellt wird. Mit (Klick) erscheint ein Textfeld, in dem Du die Bezeichnung eingeben kannst, z.B. „S“ (für Großbuchstaben zuerst caps drücken), dann mit enter beenden. Entsprechend bezeichnest Du die beiden Geraden mit „g“ und „h“. Mit der esc-Taste verlässt Du den Text-Modus. Die Position einer Bezeichnung lässt sich verändern (fangen mit ctrl (Klick), verschieben und dann (Klick)). Kontrolliere nun, ob Du alles richtig gemacht hast, indem Du eine Gerade veränderst (fange die Gerade mit ctrl (Klick), verschiebe sie und lasse sie am Zielort mit (Klick) los). Die Bezeichnungen müssen sich mit bewegen.	 

Aufgabe

a) Konstruiere die Winkelhalbierenden zu zwei sich schneidenden Geraden.
b) Konstruiere ein Dreieck mit den Seitenlängen a = 5 cm, b = 4 cm und c = 7 cm

Zeichenebene vorbereiten Wähle die Anwendung Geometry. Diese Applikation ist in der Ebenengeometrie-Ansicht. Eingabezeile und Achsen werden hier ausgeblendet. Rechts oben ist eine cm-Skala angegeben. Die Skala lässt sich mit menu 2 7 ein- bzw. ausblenden. Alle Längenmaße in der Ebenengeometrie-Ansicht haben die Einheit Zentimeter.	
Zeichnen von Geraden Mit menu 7 4 kommst Du in den Geraden-Modus. Bewege den Pfeil an eine beliebige Stelle des Bildschirms. Mit einem „Klick“ legst Du einen Punkt der Geraden fest. Anschließend kannst Du durch Bewegen des Pfeils die Richtung der Geraden festlegen und mit einem weiteren „Klick“ fixieren. Der Geraden-Modus kann mit esc beendet werden.	
Schnittpunkt zweier Geraden Der Schnittpunkt zweier sich schneidender Geraden kann mit menu 7 3 bestimmt werden, indem Du nacheinander auf die sich schneidenden Geraden klickst. Wenn Du beim Konstruieren der zweiten Geraden den ersten „Klick“ auf den bereits für die erste Gerade gezeichneten Punkt (wird fett dargestellt, wenn Du darüber fährst) machst erkennt der Nspire diesen Punkt bereits als Schnittpunkt.	
Bezeichnen von geometrischen Objekten Damit sich die Bezeichnungen beim späteren Verändern der Konstruktion automatisch mit bewegen, gehe vor, wie folgt: Mit menu 1 6 wird der Text-Modus aufgerufen. Anschließend bewegst Du den Cursor über das Objekt, das Du beschriften möchtest, z.B. den Schnittpunkt der Geraden, bis das Objekt fett dargestellt wird. Mit erscheint ein Textfeld, in dem Du die Bezeichnung eingeben kannst, z.B. „S“ (für Großbuchstaben zuerst shift drücken), dann mit enter beenden. Entsprechend bezeichnest Du die beiden Geraden mit „g“ und „h“. Mit der esc-Taste verlässt Du den Text-Modus. Die Position einer Bezeichnung lässt sich verändern (fangen mit ctrl, verschieben und dann). Kontrolliere nun, ob Du alles richtig gemacht hast, indem Du eine Gerade veränderst (fange die Gerade mit ctrl, verschiebe sie und lasse sie am Zielort mit los). Die Bezeichnungen müssen sich mit bewegen.	

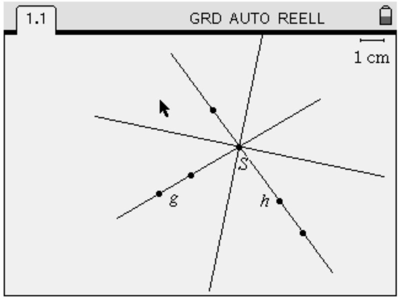
Grundkonstruktionen, Bezeichnen und Bemaßen

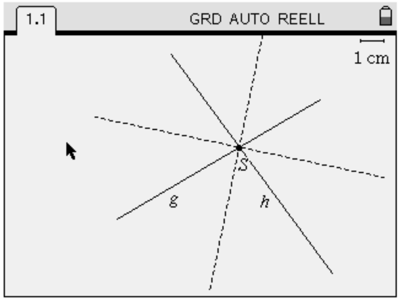
Konstruktion der Winkelhalbierenden

Wähle menu 9 4. Für eine Winkelhalbierende müssen drei den Winkel festlegende Punkte angegeben werden:
Den Zeiger zuerst genau über einen Schenkel des Winkels bringen (Gerade erscheint gestrichelt), dann , anschließend über den Schnittpunkt S der Geraden (Punkt wird fett), dann und zuletzt den Zeiger über den anderen Schenkel bringen und .
Die andere Winkelhalbierende erhältst Du entsprechend.

Alle erzeugten Hilfspunkte können mit menu 1 3 (Ausblenden/anzeigen) und Anklicken der Punkte ausgeblendet werden.

Du kannst über menu 1 4 (Attribute) und Anklicken der Winkelhalbierenden deren Aussehen verändern, z.B. gestrichelt.

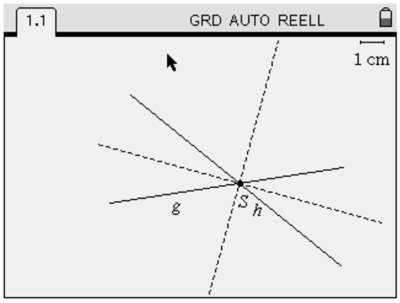




Aufgabe zum Experimentieren und Überlegen

Fange jetzt mit ctrl eine der beiden Geraden und verändere deren Richtung.

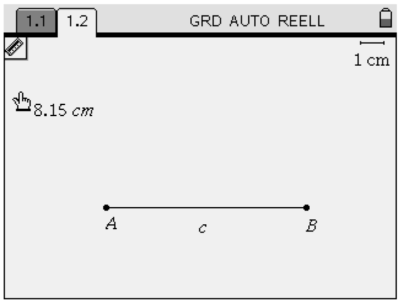
Was fällt dir auf, wenn Du dabei die Anordnung der beiden Winkelhalbierenden zueinander beobachtest?
Wie kann man diese Beobachtung erklären?

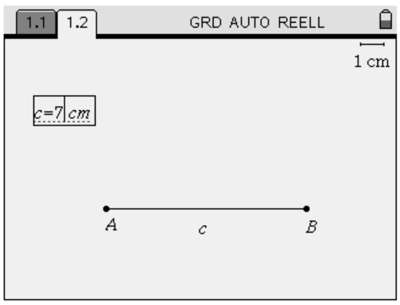


Zeichnen von Strecken mit vorgegebener Länge

Neue Seite mit 2 anlegen. Wechsel in die Ebenengeometrie-Ansicht mit menu 2 2.

Zeichne mit menu 6 5 eine Strecke AB mit beliebiger Länge. Ergänze die Bezeichnungen (Endpunkte mit „A“ bzw. „B“; Strecke mit „c“).
Bestimme nun die Länge der Strecke. Aktiviere dazu mit menu 7 1 die Längenmessung und klicke auf die Strecke c. Mit einem weiteren Klick lässt sich der Text mit der gemessenen Länge (z.B. „8,15 cm“) irgendwo im Fenster platzieren.
Die Länge der Strecke lässt sich nun über das Längen-Textfeld verändern. Doppelklick auf das Textfeld mit der Länge von c liefert die Möglichkeit beliebige Längen einzugeben, z.B. „c=7 cm“. Beenden der Eingabe mit enter. Die Länge der Strecke c passt sich nun in der Zeichnung automatisch an. Die Länge ist damit aber nicht „eingefroren“. Du kannst weiterhin die Punkte A und B beliebig verschieben. Die Längenanzeige wird dann wieder automatisch angepasst.

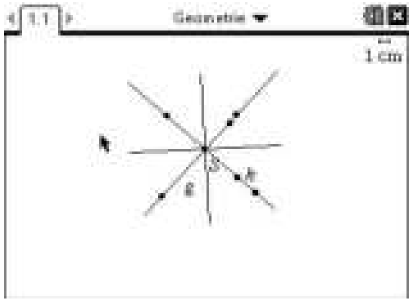


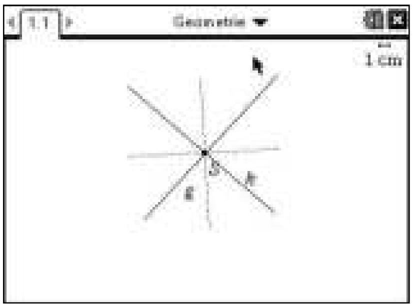


Konstruktion der Winkelhalbierenden
Wähle menu A 4. Für eine Winkelhalbierende müssen drei den Winkel festlegende Punkte angegeben werden:
Den Zeiger zuerst genau über einen Schenkel des Winkels bringen (Gerade erscheint gestrichelt), dann , anschließend über den Schnittpunkt S der Geraden (Punkt wird fett), dann und zuletzt den Zeiger über den anderen Schenkel bringen und .
Die andere Winkelhalbierende erhältst Du entsprechend.

Alle erzeugten Hilfspunkte können mit menu 1 3 (Ausblenden/anzeigen) und Anklicken der Punkte ausgeblendet werden.

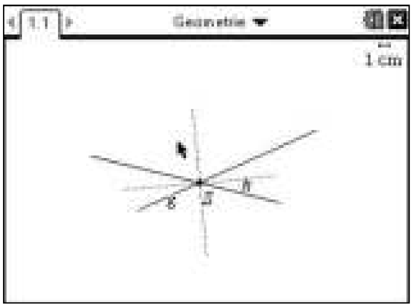
Du kannst über menu 1 4 (Attribute) und Anklicken der Winkelhalbierenden deren Aussehen verändern, z.B. gestrichelt.





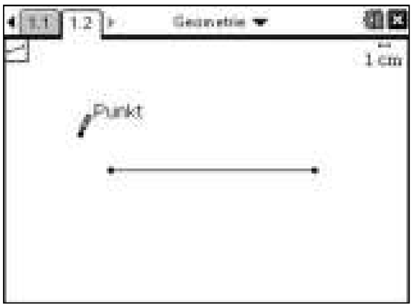
Aufgabe zum Experimentieren und Überlegen
Fange jetzt mit ctrl eine der beiden Geraden und verändere deren Richtung.

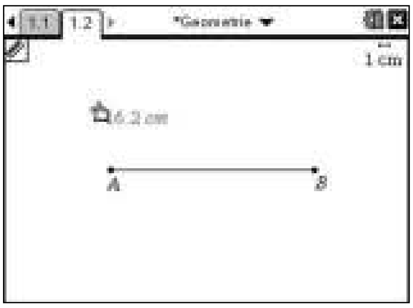
Was fällt dir auf, wenn Du dabei die Anordnung der beiden Winkelhalbierenden zueinander beobachtest?
Wie kann man diese Beobachtung erklären?



Zeichnen von Strecken mit vorgegebener Länge
Neue Seite mit ~ 4 5 einrichten.

Zeichne mit menu 7 5 eine Strecke AB mit beliebiger Länge. Ergänze die Bezeichnungen (Endpunkte mit „A“ bzw. „B“; Strecke mit „c“).
Bestimme nun die Länge der Strecke. Aktiviere dazu mit menu 8 1 die Längenmessung und klicke auf die Strecke c. Mit einem weiteren Klick lässt sich der Text mit der gemessenen Länge (z.B. „16,2 cm“) irgendwo im Fenster platzieren.
Die Länge der Strecke lässt sich nun über das Längen-Textfeld verändern. Doppelklick auf das Textfeld mit der Länge von c liefert die Möglichkeit beliebige Längen einzugeben, z.B. „c=7 cm“. Beenden der Eingabe mit enter.
Die Länge der Strecke c passt sich nun in der Zeichnung automatisch an. Die Länge ist damit aber nicht „eingefroren“. Du kannst weiterhin die Punkte A und B beliebig verschieben. Die Längenanzeige wird dann wieder automatisch angepasst.

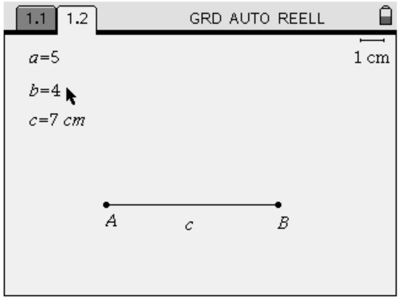




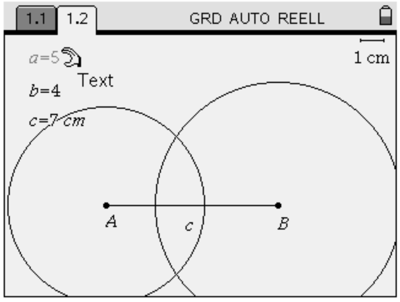
Grundkonstruktionen, Bezeichnen und Bemaßen

Zeichnen von Kreisen mit vorgegebenem Radius

Wechsle mit menu 1 6 in den Textmodus. Klicke anschließend auf einen freien Platz im Fenster, gib „a = 5“ ein, dann enter. Lege darunter ein weiteres Textfeld „b = 4“ an.

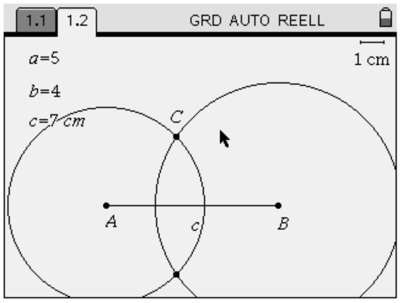


Um nun einen Kreis mit Radius b um den Punkt A zu konstruieren, wähle menu 8 1 (Kreis). Gehe nun mit dem erscheinenden Stift über den Punkt A (wird fett), lege ihn mit als Mittelpunkt fest und ziehe anschließend den Cursor über das Textfeld mit „b=4“, bis das Feld blinkt. Jetzt .
Es erscheint ein Kreis mit Radius 4 cm.
Zeichne nun auf die gleiche Weise einen Kreis um B mit dem Radius „a = 5“.

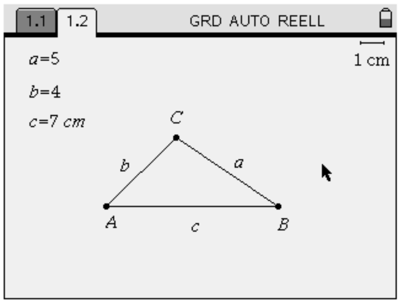


Dreieckskonstruktion mit vorgegebenen Maßen

Mit den Vorarbeiten aus den letzten beiden Abschnitten kann das in der Aufgabe geforderte Dreieck nun leicht konstruiert werden.
Dazu benötigt man einen Schnittpunkt der Kreise. Wähle also menu 6 3 (Schnittpunkte) und klicke die beiden Kreise an. Bezeichne anschließend einen der angezeigten Schnittpunkte mit „C“.



Die beiden Kreise und den weiteren Schnittpunkt verstecken: menu 1 3 und dann die beiden Kreise und den Schnittpunkt anklicken.
Nun die Strecken b und a zeichnen (Wechsel in den Streckenmodus mit menu 6 5) und beschriften.

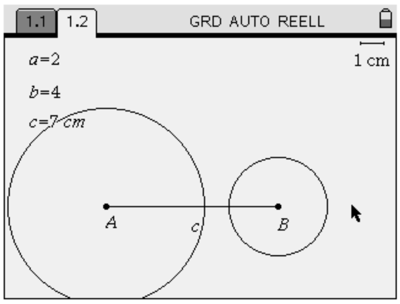


Aufgabe zum Experimentieren und Überlegen

Fange jetzt mit ctrl den Punkt B und verschiebe ihn so, dass sich die Länge c verändert. Beobachte dabei das Textfeld mit dem Messwert für c.

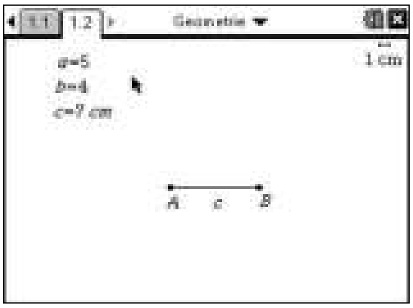
Für welche Werte von c verschwindet das Dreieck?

Überlege dir, wie man diese Beobachtung erklären kann. Kontrolliere deine Erklärung mit einem anderen Wert für die Länge a. Gehe dazu mit dem Zeiger über das Textfeld „a=5“. Zweimal erlaubt das Ändern des Textes, z.B. in „a=2“, dann enter·. Der zugehörige Kreis und damit auch das Dreieck passen sich automatisch an den neuen Wert an! Du kannst zum Überprüfen deiner Vermutung auch die Kreise wieder einblenden (menu 1 3).

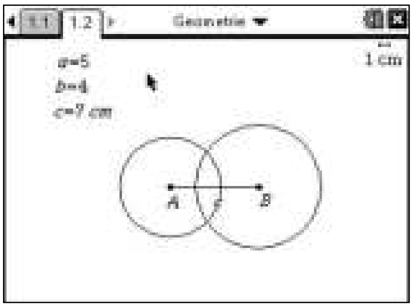


Zeichnen von Kreisen mit vorgegebenem Radius

Wechsle mit menu 1 6 in den Textmodus. Klicke anschließend auf einen freien Platz im Fenster, gib „a = 5“ ein, dann enter. Lege darunter ein weiteres Textfeld „b = 4“ an.

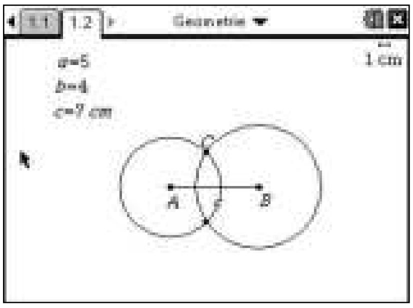


Um nun einen Kreis mit Radius b um den Punkt A zu konstruieren, wähle menu 9 1 (Kreis). Gehe nun mit dem erscheinenden Stift über den Punkt A (wird fett), lege ihn mit als Mittelpunkt fest und ziehe anschließend den Cursor über das Textfeld mit „b=4“, bis das Feld blinkt. Jetzt .
Es erscheint ein Kreis mit Radius 4 cm.
Zeichne nun auf die gleiche Weise einen Kreis um B mit dem Radius „a = 5“.

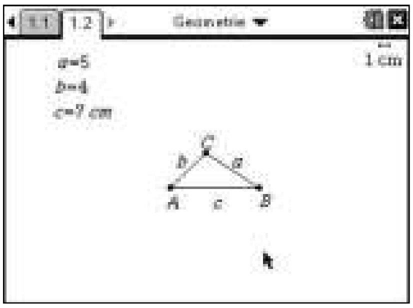


Dreieckskonstruktion mit vorgegebenen Maßen

Mit den Vorarbeiten aus den letzten beiden Abschnitten kann das in der Aufgabe geforderte Dreieck nun leicht konstruiert werden.
Dazu benötigt man einen Schnittpunkt der Kreise. Wähle also menu 7 3 (Schnittpunkte) und klicke die beiden Kreise an. Bezeichne anschließend einen der angezeigten Schnittpunkte mit „C“.



Die beiden Kreise und den weiteren Schnittpunkt verstecken: menu 1 3 und dann die beiden Kreise und den Schnittpunkt anklicken.
Nun die Strecken b und a zeichnen (Wechsel in den Streckenmodus mit menu 7 5) und beschriften.

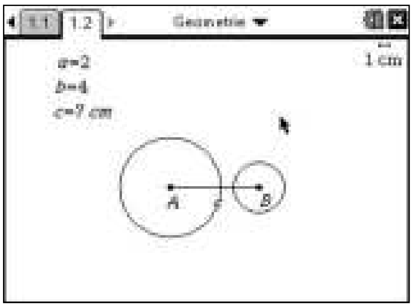


Aufgabe zum Experimentieren und Überlegen

Fange jetzt mit ctrl den Punkt B und verschiebe ihn so, dass sich die Länge c verändert. Beobachte dabei das Textfeld mit dem Messwert für c.

Für welche Werte von c verschwindet das Dreieck?

Überlege dir, wie man diese Beobachtung erklären kann. Kontrolliere deine Erklärung mit einem anderen Wert für die Länge a. Gehe dazu mit dem Zeiger über das Textfeld „a=5“. Zweimal erlaubt das Ändern des Textes, z.B. in „a=2“, dann enter. Der zugehörige Kreis und damit auch das Dreieck passen sich automatisch an den neuen Wert an! Du kannst zum Überprüfen deiner Vermutung auch die Kreise wieder einblenden (menu 1 3).



Satz des Thales

Aufgabe

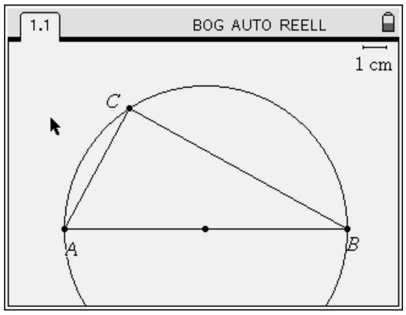
a) Zeichne eine Strecke AB und den Thaleskreis über AB. Markiere einen Punkt C auf dem Thaleskreis und untersuche was für den Winkel bei C gilt.

b) Konstruiere über einer Strecke AB ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C. Überprüfe mit der Geometriespur, wo alle möglichen Ecken C liegen können.

a) Thaleskreisfigur

Wähle die Anwendung Graphs & Geometry und wechsle in die Ebenengeometrie-Ansicht (menu 2 2).
Zeichne mit menu 6 5 eine Strecke. Mit einem „Klick" legst Du Anfangs- und Endpunkt an dem gewünschten Ort fest.
Beschriften kannst Du mit menu 1 6: Text. Gehe dazu zum jeweiligen Punkt. Bestätige die Eingabe mit enter.
Den Mittelpunkt der Strecke erhältst Du mit menu 9 5. Dazu werden Anfangs- und Endpunkt nacheinander mit „Klick" gewählt.

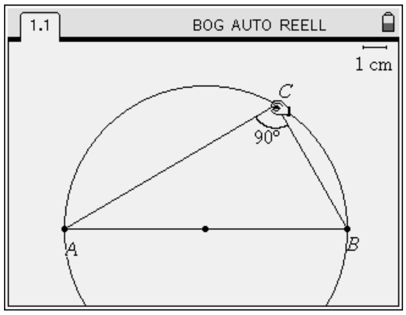
Mit menu 8 1 kannst Du einen Kreis um den Mittelpunkt durch A und B konstruieren, indem Du mit den Mittelpunkt wählst, anschließend mit auf einen der Punkte A oder B, den Radius festlegst.
Danach setzt Du mit menu 6 2, den Punkt C auf die Kreislinie. Jetzt noch beschriften.
Verbinde mit menu 6 5 (Strecke) die Punkte A, B und C.



Winkel bei C

Um den Winkel bei C zu messen, wählst Du menu 7 4: Winkel. Die Größe des Winkels wird angezeigt, wenn Du nacheinander die Punkte A, C und B anklickst.
Mit esc beendest Du die Winkelmessung, der Pfeil erscheint.
Beobachte die Größe des Winkels, wenn Du mit ctrl den Punkt C „packst" und ihn anschließend auf der Kreislinie entlang ziehst.

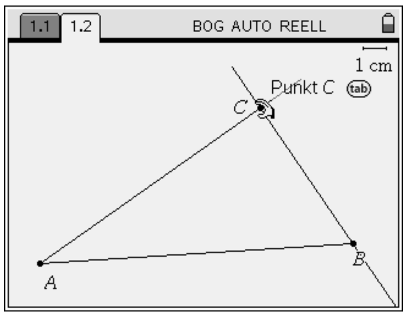
Was stellst Du fest?



b) Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks

Zeichne die Strecke AB wie in a) beschrieben und beschrifte sie. Konstruiere mit menu 6 6 einen Strahl von einem der Punkte ausgehend. Nun konstruierst Du mit menu 9 1 die Orthogonale zur Halbgeraden durch den anderen Endpunkt.
Mit menu 6 3 legst den Punkt C als Schnittpunkt der Halbgeraden mit der Orthogonalen fest. Beschrifte.

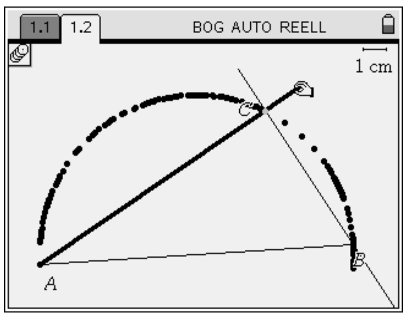
Um welches besondere Dreieck handelt es sich beim Dreieck ABC?



Geometriespur

Um zu prüfen, wo die Ecken C der rechtwinkligen Dreiecke „über AB" liegen, wählst Du menu 5 4: Geometriespur.
Dazu klickst Du zuerst auf den Punkt C um den Punkt auszuwählen. Mit ctrl „packst" Du ihn und ziehst in beide Richtungen.

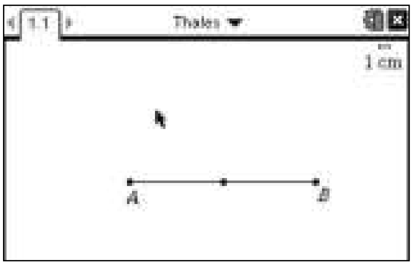
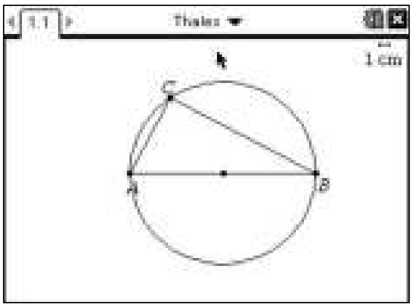
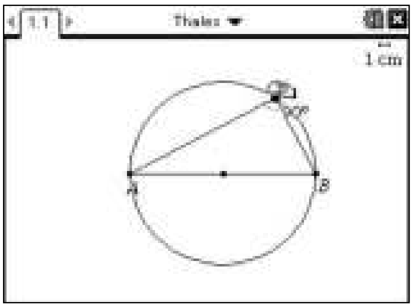
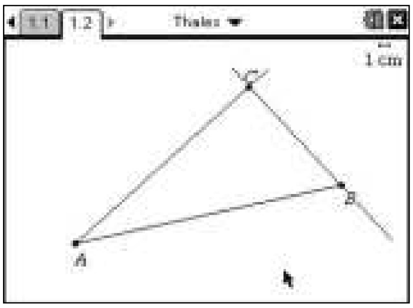
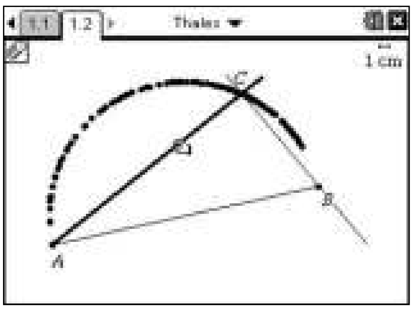
Auf welcher Linie bewegt sich der Punkt C?



Aufgabe

a) Zeichne eine Strecke AB und den Thaleskreis über AB. Markiere einen Punkt C auf dem Thaleskreis und untersuche was für den Winkel bei C gilt.

b) Konstruiere über einer Strecke AB ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C. Überprüfe mit der Geometriespur, wo alle möglichen Ecken C liegen können.

a) Thaleskreisfigur Wähle die Anwendung Geometry. Zeichne mit menu 6 5 eine Strecke. Mit einem „Klick“ legst Du Anfangs- und Endpunkt an dem gewünschten Ort fest. Beschriften kannst Du mit menu 1 6: Text. Gehe dazu zum jeweiligen Punkt. Bestätige die Eingabe mit enter. Den Mittelpunkt der Strecke erhältst Du mit menu A 5. Dazu werden Anfangs- und Endpunkt nacheinander mit „Klick“ gewählt. Mit menu 9 1 kannst Du einen Kreis um den Mittelpunkt durch A und B konstruieren, indem Du mit den Mittelpunkt wählst, anschließend mit auf einen der Punkte A oder B, den Radius festlegst. Danach setzt Du mit menu 7 2, den Punkt C auf die Kreislinie. Jetzt noch beschriften. Verbinde mit menu 7 5 (Strecke) die Punkte A, B und C.	 
Winkel bei C Um den Winkel bei C zu messen, wählst Du menu 8 4: Winkel. Die Größe des Winkels wird angezeigt, wenn Du nacheinander die Punkte A, C und B anklickst. Mit esc beendest Du die Winkelmessung, der Pfeil erscheint. Beobachte die Größe des Winkels, wenn Du mit ctrl den Punkt C „packst“ und ihn anschließend auf der Kreislinie entlang ziehst. *Was stellst Du fest?*	
b) Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks Zeichne die Strecke AB wie in a) beschrieben und beschrifte sie. Konstruiere mit menu 7 6 eine Halbgrade von einem der Punkte ausgehend. Nun konstruierst Du mit menu A 1 die Orthogonale zur Halbgeraden durch den anderen Endpunkt. Mit menu 7 3 legst den Punkt C als Schnittpunkt der Halbgeraden mit der Orthogonalen fest. Beschrifte. *Um welches besondere Dreieck handelt es sich beim Dreieck ABC?*	
Geometriespur Um zu prüfen, wo die Ecken C der rechtwinkligen Dreiecke „über AB“ liegen, wählst Du menu 5 4: Geometriespur und wählst Punkt C aus. Mit ctrl „packst“ Du nun die Halbgrade und ziehst diese in beide Richtungen. *Auf welcher Linie bewegt sich der Punkt C?*	

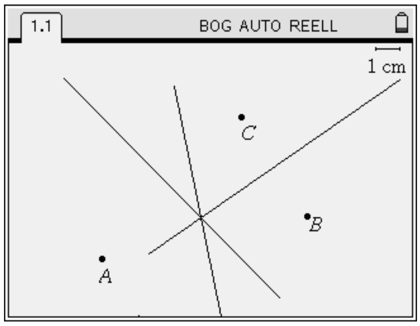
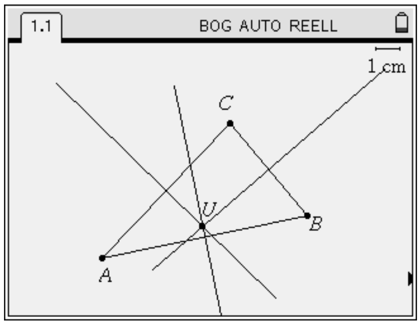
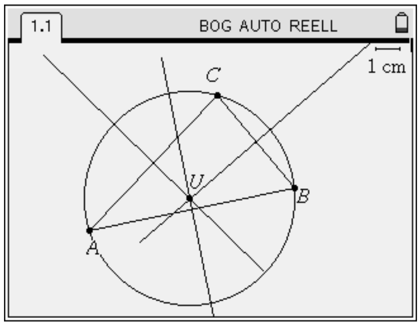
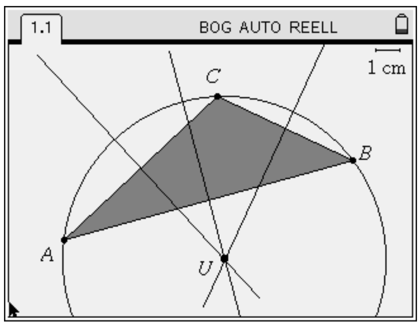
Eigenschaften des Umkreises eines Dreiecks

Aufgabe

a) Konstruiere den Punkt U, der von drei gegebenen Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, den gleichen Abstand hat.

b) Verbinde die drei gegebenen Punkte zu einem Dreieck und ziehe einen Kreis um den konstruierten Punkt U mit dem Radius r, wobei r der Abstand von U zu einem Eckpunkt des Dreiecks ist.

c) Untersuche, für welche Dreiecke der Punkt U innerhalb bzw. außerhalb des Dreiecks liegen kann.

a) Konstruktion mit Hilfe der Mittelsenkrechten Wähle die Anwendung Graphs & Geometry und wechsle in die Ebenengeometrie-Ansicht (menu 2 2). Zeichne mit menu 6 1 die drei Punkte ein. Mit einem „Klick“ legst Du sie an dem gewünschten Ort fest. Beschriften kannst Du mit menu 1 6: Text. Gehe dazu zu jeweiligen Punkt. Mit menu 9 3 kannst Du die Mittelsenkrechten zu jeweils zwei der drei Punkte konstruieren. Wiederum legst Du mit die Punkte fest. *Warum schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt?*	
b) Punkte zu Dreieck verbinden Mit menu 6 5: Strecke kannst Du die Punkte nacheinander zu einem Dreieck verbinden. (Eine weitere Möglichkeit ist menu 8 2: Dreieck) Lege den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit menu 6 3 fest und bezeichne ihn mit U. Zeichne den Kreis mit Mittelpunkt U, auf dem die drei Punkte liegen: Mit menu 8 1: Kreis gehst Du zunächst auf den Mittelpunkt U (festlegen mit) und danach auf einen Eckpunkt des Dreiecks (festlegen mit). *Warum liegen die drei Eckpunkte des Dreiecks auf einem gemeinsamen Umkreis?*	 
c) Lage des Umkreismittelpunktes Mit ctrl packst Du einen Eckpunkt des Dreiecks und verschiebst diesen. Wann liegt U außerhalb, wann innerhalb des Dreiecks? Gibt es Dreiecke, bei denen U auf einer Seite des Dreiecks liegt?	

Aufgabe

a) Konstruiere den Punkt U, der von drei gegebenen Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, den gleichen Abstand hat.

b) Verbinde die drei gegebenen Punkte zu einem Dreieck und ziehe einen Kreis um den konstruierten Punkt U mit dem Radius r, wobei r der Abstand von U zu einem Eckpunkt des Dreiecks ist.

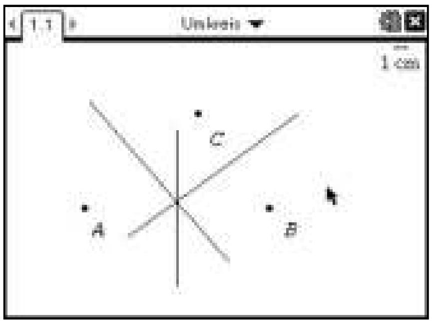
c) Untersuche, für welche Dreiecke der Punkt U innerhalb bzw. außerhalb des Dreiecks liegen kann.

a) Konstruktion mit Hilfe der Mittelsenkrechten

Wähle die Anwendung Geometry.

Zeichne mit menu 7 1 die drei Punkte ein. Mit einem „Klick“ legst du sie an dem gewünschten Ort fest. Beschriften kannst du mit menu 1 6: Text. Gehe dazu zu jeweiligen Punkt.
Mit menu A 3 kannst du die Mittelsenkrechten zu jeweils zwei der drei Punkte konstruieren. Wiederum legst du mit die Punkte fest.

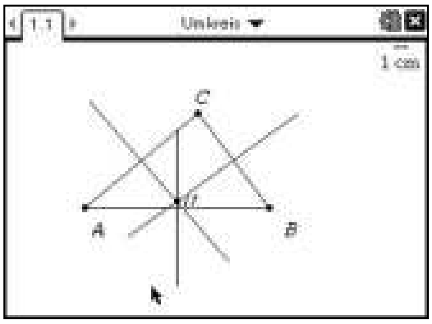
Warum schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt?



b) Punkte zu Dreieck verbinden

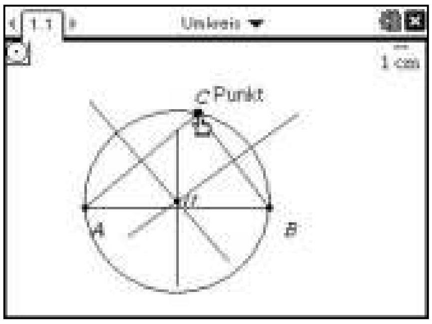
Mit menu 7 5: Strecke kannst du die Punkte nacheinander zu einem Dreieck verbinden. (Eine weitere Möglichkeit ist menu 9 2: Dreieck)

Lege den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit menu 7 3 fest und bezeichne ihn mit U.



Zeichne den Kreis mit Mittelpunkt U, auf dem die drei Punkte liegen: Mit menu 9 1: Kreis gehst du zunächst auf den Mittelpunkt U (festlegen mit) und danach auf einen Eckpunkt des Dreiecks (festlegen mit).

Warum liegen die drei Eckpunkte des Dreiecks auf einem gemeinsamen Umkreis?

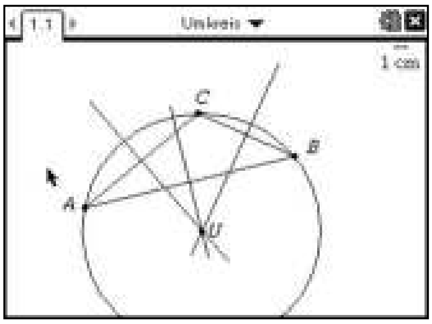


c) Lage des Umkreismittelpunktes

Mit ctrl packst du einen Eckpunkt des Dreiecks und verschiebst diesen.

Wann liegt U außerhalb, wann innerhalb des Dreiecks?

Gibt es Dreiecke, bei denen U auf einer Seite des Dreiecks liegt?



Eigenschaften des Inkreises eines Dreiecks

Aufgabe

a) Konstruiere den Punkt I, der von den drei Seiten eines Dreiecks den gleichen Abstand hat.

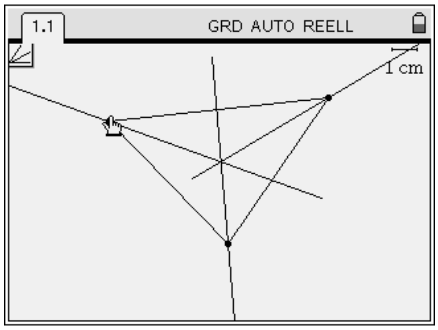
b) Konstruiere den größtmöglichen Kreis, der innerhalb des Dreiecks liegen kann.

c) Untersuche, wie der Radius des Inkreises mit dem Flächeninhalt und Umfang des Dreiecks zusammenhängt.

a) Konstruktion mit Hilfe der Winkelhalbierenden

Wähle die Anwendung Graphs & Geometry und wechsle in die Ebenengeometrie-Ansicht (menu 2 2).
Mit menu 8 2:Dreieck kannst Du ein Dreieck festlegen, indem Du nacheinander die drei Eckpunkte mit (Klick) an einem gewünschten Ort festlegst.
Mit menu 9 4 konstruierst Du nach Anklicken der Eckpunkte des Dreiecks die Winkelhalbierenden.

Warum schneiden sich alle drei Winkelhalbierenden in einem Punkt?



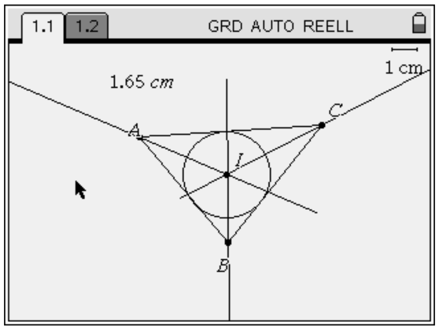
b) Konstruktion des Inkreises

Mit menu 6 3 legst Du den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden fest. Bezeichne ihn anschließend mit I (menu 1 6) und die Eckpunkte des Dreiecks mit A, B und C.
Miss den Abstand von I zu einer Dreiecksseite mit menu 7 1: Länge, indem Du zunächst den Punkt I und anschließend das Dreieck anklickst.
Der angezeigte Wert lässt sich beliebig verschieben und mit enter festlegen.

Mit menu 8 1:Kreis wählst Du zunächst den Mittelpunkt I des Kreises aus und anschließend als Radius den angezeigten Wert, indem Du auf diesen klickst.

Warum berührt der Inkreis alle drei Seiten des Dreiecks?

Warum ist der Inkreis der größte Kreis, der in ein Dreieck passt?



c) Zusammenhang von Radius, Flächeninhalt und Umfang (Variablenzuweisung)

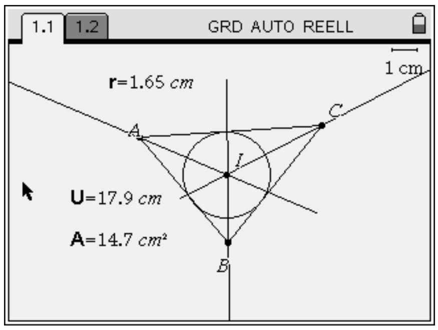
Will man den Zusammenhang zwischen Inkreisradius, Flächeninhalt und Umfang des Dreiecks untersuchen, müssen die Werte für verschiedene Dreiecke erfasst werden.

Zunächst weist man dem Wert des Radius eine Variable zu. Gehe dazu auf das Textfeld des Radius (im Bild 1,65cm), klicke es mit (Klick) und wähle ctrl sto→var: var (oder nur sto→var 1: Variable speichern). Gib anstelle von \`var´ z.B. \`r´ ein und schließe mit enter.

Mit menu 7 1:Länge kannst Du den Umfang des Dreiecks messen, wie in b) festlegen und wie beim Radius beschrieben, eine Variable z.B. U zuweisen.

Verfahre ebenso beim Flächeninhalt des Dreiecks (menu 7 2).

Hinweis: Es müssen alle Variablen fett erscheinen.



Aufgabe

a) Konstruiere den Punkt I, der von den drei Seiten eines Dreiecks den gleichen Abstand hat.

b) Konstruiere den größtmöglichen Kreis, der innerhalb des Dreiecks liegen kann.

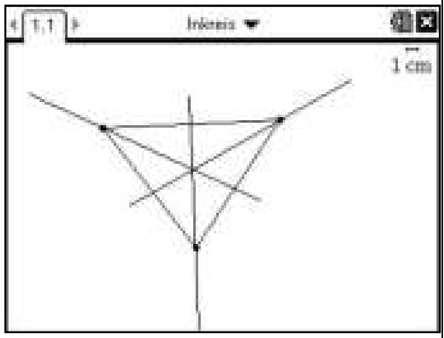
c) Untersuche, wie der Radius des Inkreises mit dem Flächeninhalt und Umfang des Dreiecks zusammenhängt.

a) Konstruktion mit Hilfe der Winkelhalbierenden

Wähle die Anwendung Geometry.

Mit [menu][9][2]:Dreieck kannst du ein Dreieck festlegen, indem du nacheinander die drei Eckpunkte mit [Klick] an einem gewünschten Ort festlegst.
Mit [menu][A][4] konstruierst du nach Anklicken der Eckpunkte des Dreiecks die Winkelhalbierenden.

Warum schneiden sich alle drei Winkelhalbierenden in einem Punkt?



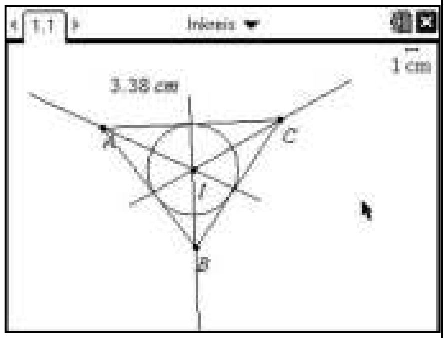
b) Konstruktion des Inkreises

Mit [menu][7][3] legst du den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden fest. Bezeichne ihn anschließend mit I ([menu][1][6]) und die Eckpunkte des Dreiecks mit A, B und C. Miss den Abstand von I zu einer Dreiecksseite mit [menu][8][1]: Länge, indem du zunächst den Punkt I und anschließend das Dreieck anklickst.
Der angezeigte Wert lässt sich beliebig verschieben und mit [enter] festlegen.

Mit [menu][9][1]:Kreis wählst du zunächst den Mittelpunkt I des Kreises aus und anschließend als Radius den angezeigten Wert, indem du auf diesen klickst.

Warum berührt der Inkreis alle drei Seiten des Dreiecks?

Warum ist der Inkreis der größte Kreis, der in ein Dreieck passt?



c) Zusammenhang von Radius, Flächeninhalt und Umfang (Variablenzuweisung)

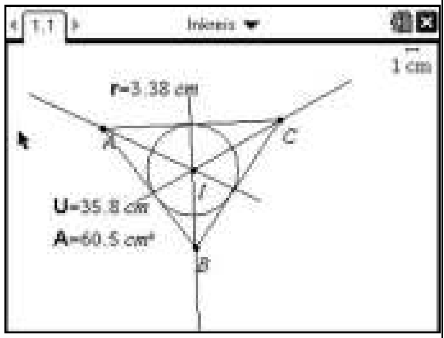
Will man den Zusammenhang zwischen Inkreisradius, Flächeninhalt und Umfang des Dreiecks untersuchen, müssen die Werte für verschiedene Dreiecke erfasst werden.

Zunächst weist man dem Wert des Radius eine Variable zu. Gehe dazu auf das Textfeld des Radius (im Bild 3,38cm), klicke es mit [Klick] und wähle [ctrl][var]: var (oder nur [var][1]: Variable speichern). Gib anstelle von \`var´ z.B. \`r´ ein und schließe mit [enter].

Mit [menu][8][1]:Länge kannst du den Umfang des Dreiecks messen, wie in b) festlegen und wie beim Radius beschrieben, eine Variable z.B. U zuweisen.

Verfahre ebenso beim Flächeninhalt des Dreiecks ([menu][8][2]).

Hinweis: Es müssen alle Variablen fett erscheinen.

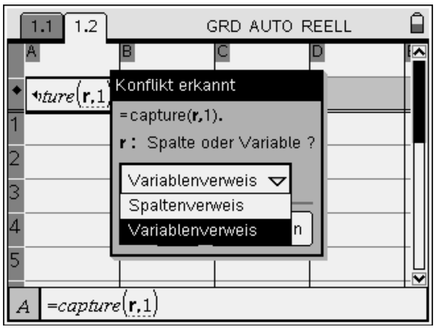


Eigenschaften des Inkreises eines Dreiecks

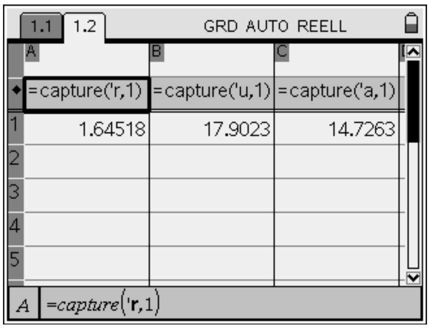
Automatische Datenerfassung mit Lists & Spreadsheet

Öffne die Anwendung Lists & Spreadsheet. Gehe in die Formelzeile (mit dem Rautensymbol) und wähle menu 3 2 1:Automatische Datenerfassung.

Anstelle von \`var´ fügst Du die gewünschte Variable, z.B. \`r´ ein. Da r auch ein Spaltenname ist, muss mit auf Variablenverweis eingestellt werden.

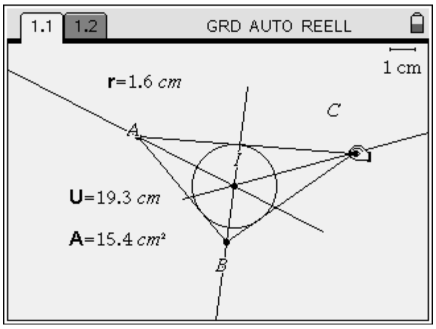


Ebenso kann in den nächsten Spalten mit dem Umfang und Flächeninhalt verfahren werden.



Datenerfassung aus Graphs & Geometry

Wechsle in Graphs & Geometry, packe einen Eckpunkt des Dreiecks (ctrl) und ziehe für die Datenerfassung den Punkt, sodass Du beliebig viele verschiedene Dreiecke erhältst.

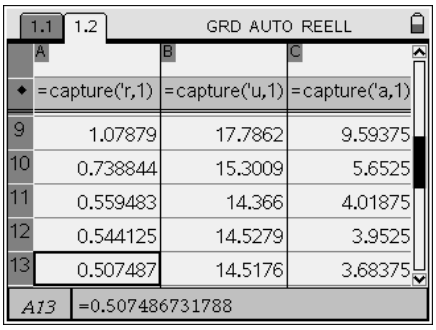


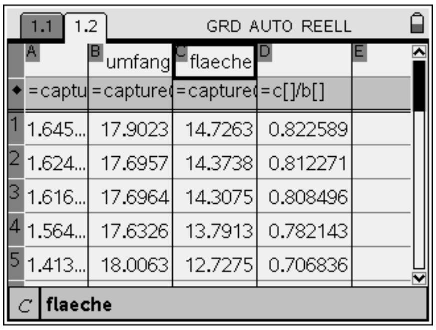
Datenerfassung in Lists & Spreadsheet

Wenn Du wieder zu Lists & Spreadsheet wechselst, kannst Du die automatische Datenerfassung feststellen.

Kannst Du einen Zusammenhang zwischen Flächeninhalt (in cm²), Umfang (in cm) und Inkreisradius (in cm) feststellen?

Beachte dabei: cm² : cm = cm.



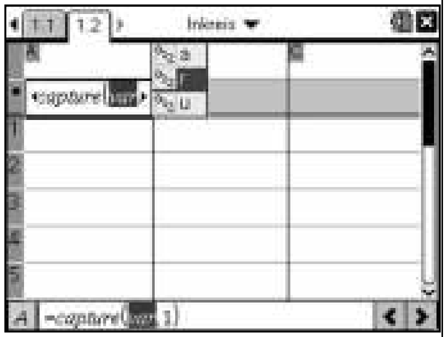


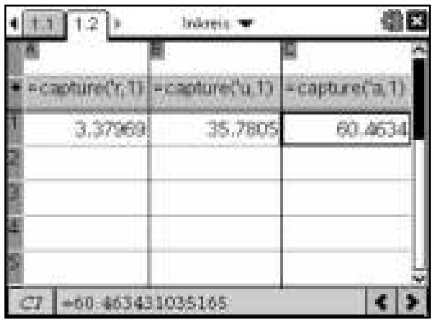
Automatische Datenerfassung mit Lists & Spreadsheet

Öffne die Anwendung Lists & Spreadsheet. Gehe in die Formelzeile (mit dem Rautensymbol) und wähle (menu)(3)(2)(1):Automatische Datenerfassung.

Über (var) kannst du nun eine Variable auswählen.

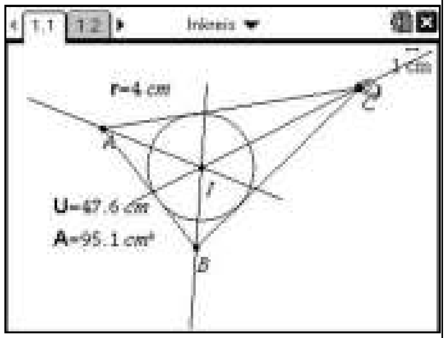
Ebenso kann in den nächsten Spalten mit dem Umfang und Flächeninhalt verfahren werden.





Datenerfassung aus Geometry

Wechsle in Geometry, packe einen Eckpunkt des Dreiecks ((ctrl)(grab)) und ziehe für die Datenerfassung den Punkt, sodass du beliebig viele verschiedene Dreiecke erhältst.

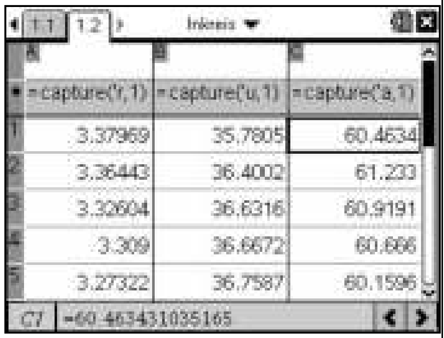


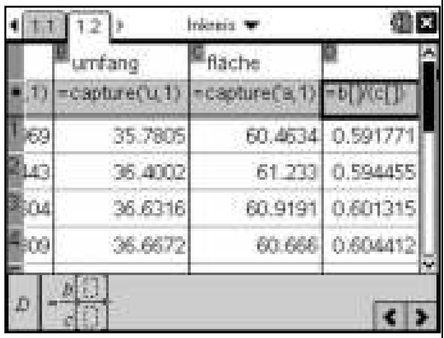
Datenerfassung in Lists & Spreadsheet

Wenn du wieder zu Lists & Spreadsheet wechselst, kannst du die automatische Datenerfassung feststellen.

Kannst du einen Zusammenhang zwischen Flächeninhalt (in cm²), Umfang (in cm) und Inkreisradius (in cm) feststellen?

Beachte dabei: cm² : cm = cm.





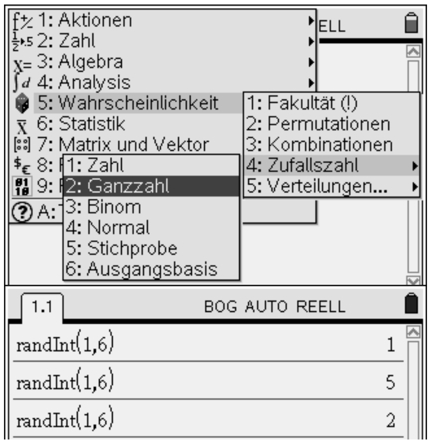
Simulation eines Würfelwurfs

Aufgabe:
Simuliere das Werfen zweier Würfel mit Hilfe der Tabellenkalkulation und stelle die Häufigkeitsverteilung graphisch dar.
Wie schätzt Du die Wahrscheinlichkeit für die Augensummen?

Erzeugen von Zufallsziffern und –zahlen

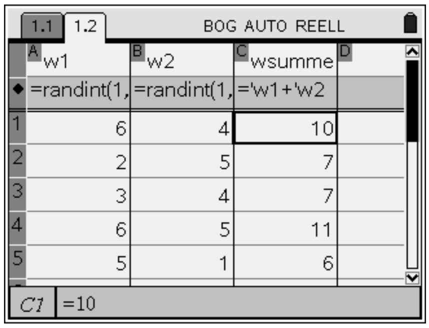
Öffne eine Seite mit dem Calculator.
Mit menu 5: Wahrscheinlichkeit, dort 4: Zufallszahl findest Du mehrere Befehle um Zufallsziffern zu erzeugen.
Wähle menu 5 4 2: Ganzzahl. Es erscheint der Befehl randInt(..).
Mit diesem Befehl kann man das Werfen eines Würfels simulieren, denn *randInt(1,6)* erzeugt ganz zufällig und gleich verteilt eine ganze Zahl zwischen 1 und 6.

Tipp: Du kannst den Befehl mit den Pfeiltasten ▲ und anschließend enter leicht nach unten kopieren, dann musst Du ihn nicht immer neu schreiben.



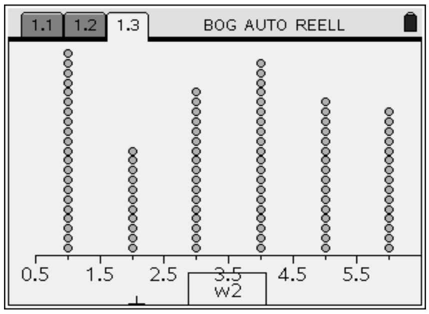
Zwei Würfel werden 100-mal geworfen.

Um 100 Würfe zu simulieren öffnest Du die Anwendung Lists & Spreadsheet. Gib in der ersten Spalte z.B. den Namen W1. Nun soll 100-mal eine Zahl zwischen 1 und 6 zufällig erzeugt werden. Dies geschieht mit dem Befehl randInt(1,6,100). Gib diesen Befehl in die zweite Zeile als Spaltenformel ein. Das Gleiche machst Du nun in der zweiten Spalte (Name W2) für einen zweiten Würfel.
In der dritten Spalte wird die **Augensumme** der beiden Würfel für jeden Versuch bestimmt (wähle Variablenverweis).



Darstellung der Häufigkeitsverteilung

Um die Daten in einem Häufigkeitsdiagramm darzustellen, öffnen wir eine neue Seite mit der Applikation Data & Statistics (home 5). Die Datenmenge wird ungeordnet dargestellt. Gehe mit dem Pfeil nach unten zur waagrechten Achse, klicke und wähle z.B. die Variable „w1“ aus. Die erzeugten Augenzahlen des ersten Würfels werden von 1 bis 6 geordnet. Das Gleiche kannst Du nacheinander für den 2. Würfel bzw. die Augensumme beider Würfel machen.



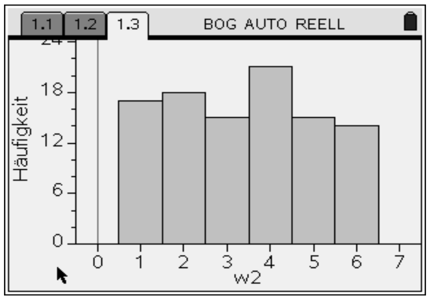
Balkendiagramm

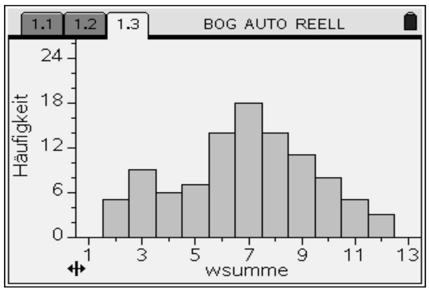
Ein Balkendiagramm lässt sich erzeugen mit menu 1: Plot-Typ, dort 3: Histogramm.
Schaue dir die Balkendiagramme von beiden Würfeln und der Augensumme beider Würfel (*wsumme*) an.
Was fällt dir bei den Verteilungen auf?

Tipp: Begibt man sich wieder in das List & Spreadsheet Fenster, so kann man mittels ctrl R eine Neuberechnung durchführen. Teste es.

Um eine bessere Simulation zu erhalten kannst Du auch die Anzahl der Würfe erhöhen.

(Hinweis: Dabei die Maximalanzahl von 2500 nicht überschreiten!)



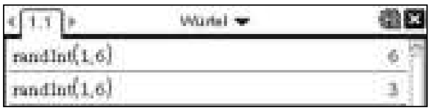


Aufgabe:
Simuliere das Werfen zweier Würfel mit Hilfe der Tabellenkalkulation und stelle die Häufigkeitsverteilung graphisch dar.
Wie schätzt Du die Wahrscheinlichkeit für die Augensummen?

Erzeugen von Zufallsziffern und –zahlen

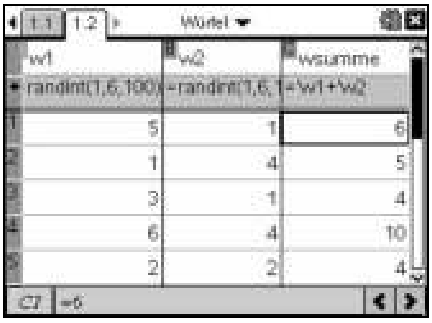
Öffne eine Seite mit dem Calculator.
Mit (menu)(5): Wahrscheinlichkeit, dort (4): Zufallszahl findest Du mehrere Befehle um Zufallsziffern zu erzeugen.
Wähle (menu)(5)(4)(2): Ganzzahl. Es erscheint der Befehl randInt(..).
Mit diesem Befehl kann man das Werfen eines Würfels simulieren, denn *randInt(1,6)* erzeugt ganz zufällig und gleich verteilt eine ganze Zahl zwischen 1 und 6.

Tipp: Du kannst den Befehl mit den Pfeiltasten ▲ und anschließend (enter) leicht nach unten kopieren, dann musst Du ihn nicht immer neu schreiben.



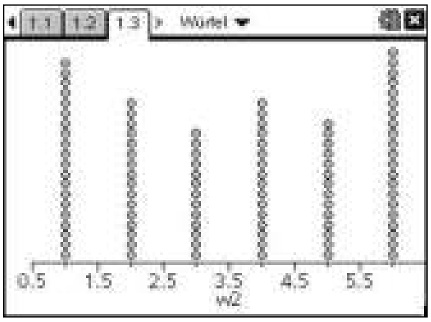
Zwei Würfel werden 100-mal geworfen.

Um 100 Würfe zu simulieren öffnest Du die Anwendung Lists & Spreadsheet. Gib in der ersten Spalte z.B. den Namen W1. Nun soll 100-mal eine Zahl zwischen 1 und 6 zufällig erzeugt werden. Dies geschieht mit dem Befehl randInt(1,6,100). Gib diesen Befehl in die zweite Zeile als Spaltenformel ein. Das Gleiche machst Du nun in der zweiten Spalte (Name W2) für einen zweiten Würfel.
In der dritten Spalte wird die **Augensumme** der beiden Würfel für jeden Versuch bestimmt (wähle Variablenverweis).



Darstellung der Häufigkeitsverteilung

Um die Daten in einem Häufigkeitsdiagramm darzustellen, öffnen wir eine neue Seite mit der Applikation Data & Statistics ((doc)(4)(7)). Die Datenmenge wird ungeordnet dargestellt. Gehe mit dem Pfeil nach unten zur waagrechten Achse, klicke und wähle z.B. die Variable „w1“ aus. Die erzeugten Augenzahlen des ersten Würfels werden von 1 bis 6 geordnet. Das Gleiche kannst Du nacheinander für „w2“ und „wsumme“ durchführen.



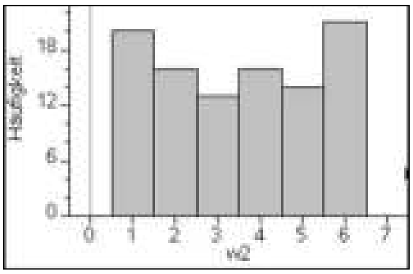
Balkendiagramm

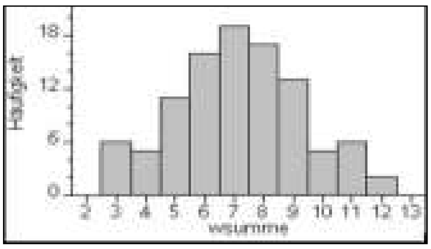
Ein Balkendiagramm lässt sich erzeugen mit (menu)(1): Plot-Typ, dort (3): Histogramm.
Schaue dir die Balkendiagramme von beiden Würfeln und der Augensumme beider Würfel (*wsumme*) an.
Was fällt dir bei den Verteilungen auf?

Tipp: Begibt man sich wieder in das List & Spreadsheet Fenster, so kann man mittels (ctrl)(R) eine Neuberechnung durchführen. Teste es.

Um eine bessere Simulation zu erhalten kannst Du auch die Anzahl der Würfe erhöhen.

(Hinweis: Dabei die Maximalanzahl von 2500 nicht überschreiten!)





Eigenschaften der zentrischen Streckung

Aufgabe

a) Konstruiere ein Dreieck und Streckzentrum S, beschrifte und führe ein zentrische Streckung durch.
b) Verändere mit dem Zugmodus sowohl das Dreieck als auch das Streckzentrum und beschreibe die Eigenschaften der zentrischen Streckung.
c) Messe die Flächeninhalte von Figur und Bildfigur. Stelle einen Zusammenhang mit dem Streckfaktor k her.

<table>
<tr>
<td>

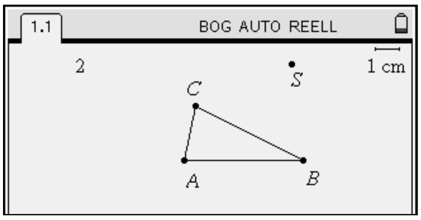
Zentrische Streckung eines Dreiecks

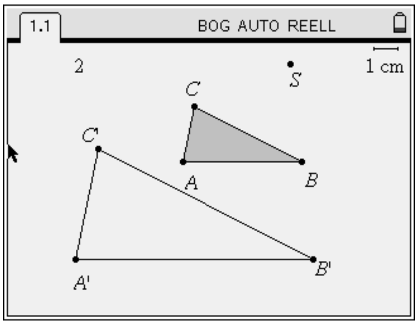
Öffne in einem neuen Dokument die Anwendung Graphs & Geometry .

Wechsle zur Ebenengeometrie-Ansicht (menu 2 2).
Konstruiere ein Dreieck mit menu 8 2 und beschrifte die Ecken mit A, B und C mit menu 1 6 und lege einen Punkt fest (menu 6 1), beschrifte ihn mit S. Nun musst Du eine Zahl mit Hilfe eines Textes erstellen, die den Streckfaktor k (z.B. 2) angibt (menu 1 6).

Wähle nun menu A: Abbildung und dort 5: Streckung aus.
Klicke nun nacheinander das Streckzentrum S, den erstellten Zahlenwert des Streckfaktors k und das Dreieck ABC jeweils mit einem (Klick) an (Reihenfolge spielt keine Rolle.
Die Streckung wird nun im Arbeitsbereich angezeigt.
Beschrifte das gestreckte Dreieck mit A', B' und C'.

</td>
<td>





</td>
</tr>
<tr>
<td>

Variation des Steckzentrums und des – faktors

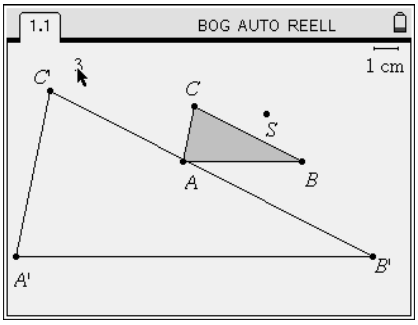
Greife das Streckzentrum S und verändere die Position. Beobachte wie sich die Bildfigur verschiebt.

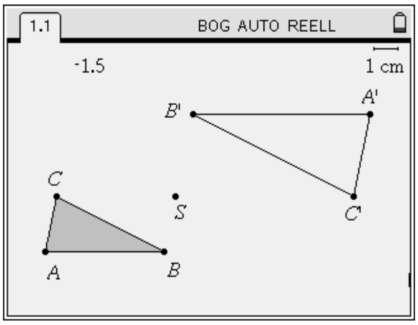
Was lässt sich über die Seiten und Winkel der Bildfigur im Vergleich zur ursprünglichen Figur sagen?

Um den Streckfaktor zu verändern, kannst einfach die Zahl anklicken und z.B. 1,5 oder -2 anstatt 2 eingeben. Damit lässt sich eine neue zentrische Streckung erzeugen. Wähle dabei auch mal Streckfaktoren < 1.

Was lässt sich über den Zusammenhang des Streckfaktors sowie Lage und Größe der Bildfigur feststellen?

</td>
<td>





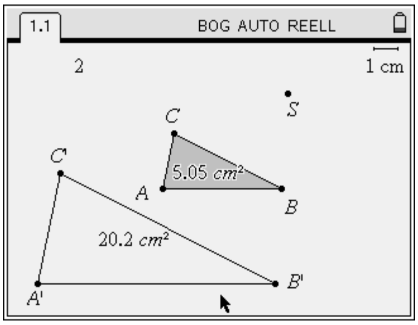
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Zusammenhang von Fläche und Streckfaktor

Der Flächeninhalt von Figur und Bildfigur lässt mit menu 7 2 bestimmen. Gehe dazu mit dem Pfeil zum Dreieck und bestätige zweimal mit enter oder (Klick). Variiere den Streckfaktor (einfache Zahlen) und vergleiche jeweils den Flächeninhalt der Figur mit dem der Bildfigur.

Kannst Du einen Zusammenhang der Flächeninhalte mit dem Streckfaktor finden?

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Eigenschaften der zentrischen Streckung

Aufgabe

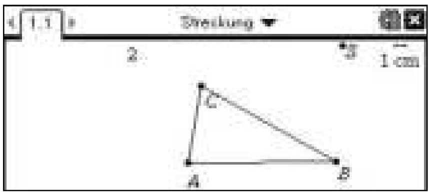
a) Konstruiere ein Dreieck und Streckzentrum S, beschrifte und führe ein zentrische Streckung durch.
b) Verändere mit dem Zugmodus sowohl das Dreieck als auch das Streckzentrum und beschreibe die Eigenschaften der zentrischen Streckung.
c) Messe die Flächeninhalte von Figur und Bildfigur. Stelle einen Zusammenhang mit dem Streckfaktor k her.

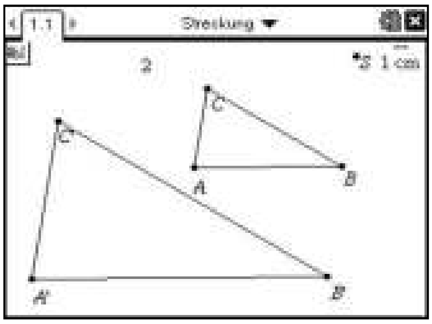
Zentrische Streckung eines Dreiecks

Öffne in einem neuen Dokument die Anwendung Geometry.

Konstruiere ein Dreieck mit (menu)(9)(2) und beschrifte die Ecken mit A, B und C mit (menu)(1)(6) und lege einen Punkt fest ((menu)(7)(1)), beschrifte ihn mit S. Nun musst du eine Zahl mit Hilfe eines Textes erstellen, die den Streckfaktor k (z.B. 2) angibt ((menu)(1)(6)).

Wähle nun (menu)(B): Abbildung und dort (5): Streckung aus. Klicke nun nacheinander das Streckzentrum S, den erstellten Zahlenwert des Streckfaktors k und das Dreieck ABC jeweils mit einem an (Reihenfolge spielt keine Rolle.
Die Streckung wird nun im Arbeitsbereich angezeigt.
Beschrifte das gestreckte Dreieck mit A', B' und C'.





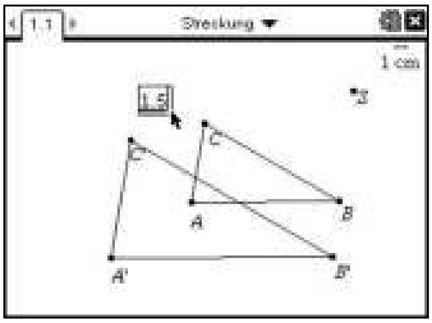
Variation des Steckzentrums und des – faktors

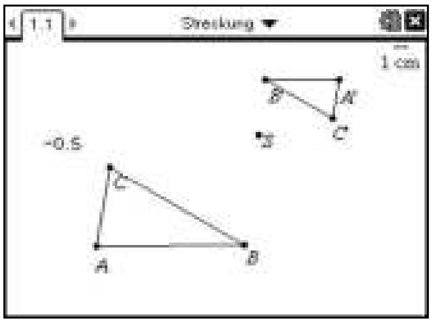
Greife das Streckzentrum S und verändere die Position. Beobachte wie sich die Bildfigur verschiebt.

Was lässt sich über die Seiten und Winkel der Bildfigur im Vergleich zur ursprünglichen Figur sagen?

Um den Streckfaktor zu verändern, kannst du einfach die Zahl anklicken und z.B. 1,5 oder -2 anstatt 2 eingeben. Damit lässt sich eine neue zentrische Streckung erzeugen. Wähle dabei auch mal Streckfaktoren < 1.

Was lässt sich über den Zusammenhang des Streckfaktors sowie Lage und Größe der Bildfigur feststellen?

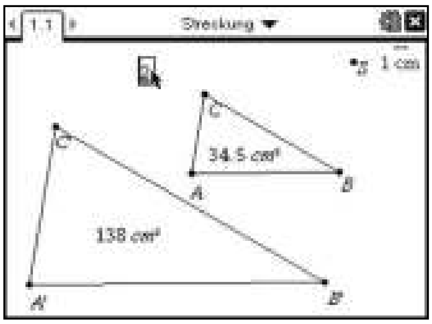




Zusammenhang von Fläche und Streckfaktor

Der Flächeninhalt von Figur und Bildfigur lässt mit (menu)(8)(2) bestimmen. Gehe dazu mit dem Pfeil zum Dreieck und bestätige zweimal mit (enter) oder . Variiere den Streckfaktor (einfache Zahlen) und vergleiche jeweils den Flächeninhalt der Figur mit dem der Bildfigur.

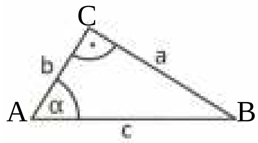
Kannst du einen Zusammenhang der Flächeninhalte mit dem Streckfaktor finden?



Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Aufgabe

a) Berechne a und b, wenn α = 41°, c = 3,8cm und γ = 90°ist.
b) Berechne α, wenn a = 5,6cm und b = 4,3cm ist.

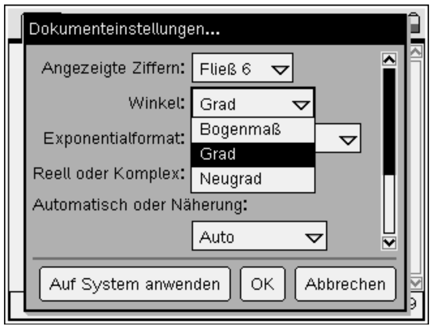


Dokumenteinstellungen

Will man mit dem Rechner Berechnungen mit dem Sinus, Kosinus oder Tangens durchführen, muss man zunächst prüfen, ob die Einstellungen des Dokuments auf GRAD eingestellt sind:

Startseite – Systeminfo – Dokumenteinstellungen (⌂ 8 1).

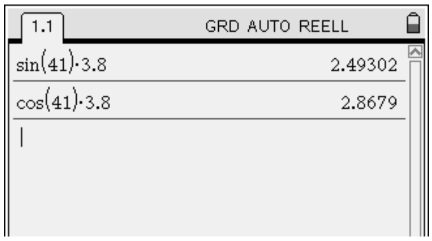
Bei den Dokumenteinstellungen findet man unter Winkel verschiedene Auswahlmöglichkeiten. Für diese Aufgaben musst Du die Einstellung auf `Grad´ auswählen.
Mit der Pfeiltaste rechts (▸) kannst Du die Untermenüpunkte nach unten gehen, mit ⊙ öffnest Du einen Untermenüpunkt. (Auswählen und Beenden mit enter).
Schließe die Dokumenteinstellungen, indem Du noch mal enter drückst oder weiter nach unten auf OK gehst (und ebenso mit enter beendest).



Verwendung von Winkelfunktionen im Calculator

Im Calculator kannst Du mit Hilfe der Sinus- und Kosinustasten (sin und cos) die gesuchten Größen berechnen.

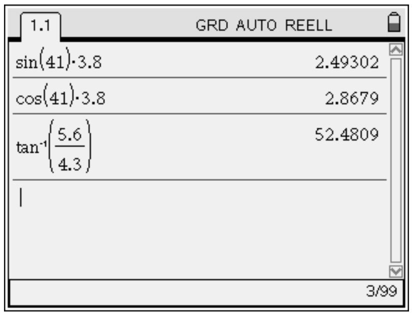
Für die Katheten des Dreiecks ergeben sich
a ≈ 2,5cm und b ≈ 2,9cm.



Berechnung des Winkels

Wenn man im rechtwinkligen Dreieck Winkel berechnen will, braucht man die $^{-1}$-Taste der Winkelfunktionen (ctrl sin, ctrl cos oder ctrl tan).

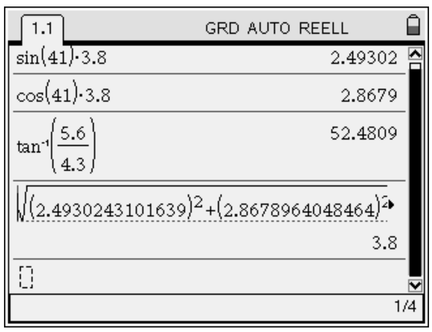
Im Beispiel ergibt sich also α≈52,5°.



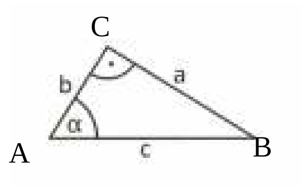
Verwendung der ANS-Taste / Werte kopieren

Sinus- und Kosinuswerte sind in der Regel irrationale („transzendente“) Zahlen.

Will man mit einem genaueren Wert weiterrechnen als angezeigt, kann man entweder die ANS – Taste (ctrl (–)) verwenden oder mit der ▲ – Taste auf den gewünschten Wert gehen und mit enter in die nächste Eingabezeile kopieren.



Aufgabe



a) Berechne a und b, wenn α = 41°, c = 3,8cm und γ = 90° ist.

b) Berechne α, wenn a = 5,6cm und b = 4,3cm ist.

Dokumenteinstellungen

Will man mit dem Rechner Berechnungen mit Sinus, Kosinus oder Tangens durchführen, muss man zunächst prüfen, ob die Einstellungen des Dokuments auf GRAD eingestellt sind:

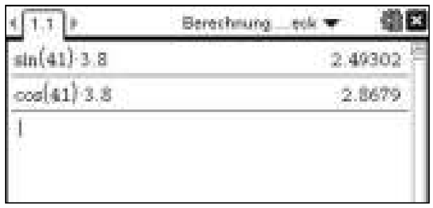
Startseite – Systeminfo – Dokumenteinstellungen (on 5 3 1).

Bei den Dokumenteinstellungen findet man unter Winkel verschiedene Auswahlmöglichkeiten. Für diese Aufgaben musst Du die Einstellung auf \`Grad´ auswählen.
Mit der Pfeiltaste rechts (▸) kannst Du die Untermenüpunkte nach unten gehen, mit öffnest Du einen Untermenüpunkt. (Auswählen und Beenden mit enter).
Schließe die Dokumenteinstellungen, indem Du noch mal enter drückst oder weiter nach unten auf OK gehst (und ebenso mit enter beendest).

Verwendung von Winkelfunktionen im Calculator

Im Calculator kannst Du mit Hilfe der Sinus- und Kosinusfunktionen (aus der Bibliothek) die gesuchten Größen berechnen.

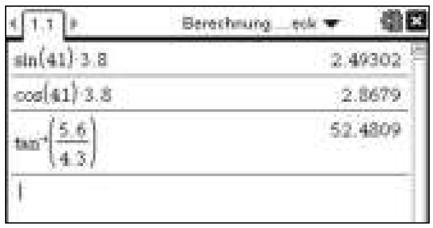
Für die Katheten des Dreiecks ergeben sich
a ≈ 2,5cm und b ≈ 2,9cm.



Berechnung des Winkels

Wenn man im rechtwinkligen Dreieck Winkel berechnen will, braucht man die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen (ebenfalls aus der Bibliothek), z. B. $\tan^{-1}$

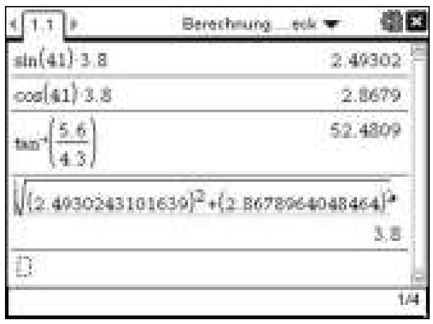
Im Beispiel ergibt sich also α ≈ 52,5°.



Verwendung der ANS-Taste / Werte kopieren

Sinus- und Kosinuswerte sind in der Regel irrationale („transzendente") Zahlen.

Will man mit einem genaueren Wert weiterrechnen als angezeigt, kann man entweder die ANS – Taste (ctrl (–)) verwenden oder mit der ▲ – Taste auf den gewünschten Wert gehen und mit enter in die nächste Eingabezeile kopieren.



Wissenschaftliche Schreibweise

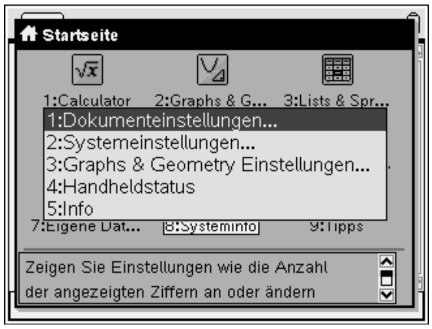
Aufgabe

a) Das Volumen der Erde beträgt etwa 1080 000 000 000 km³.
Gib dieses Volumen in wissenschaftlicher Schreibweise an.

b) Das Volumen der Sonne beträgt etwa $1{,}41 \cdot 10^{18}$ km³.
Wie viele Erdkugeln hätten zusammen das Volumen der Sonne?

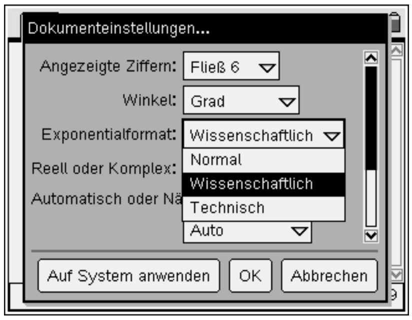
Dokumenteinstellungen

Um die wissenschaftliche Darstellung mit dem Nspire zu erzeugen, sollte dies zunächst bei den Dokumenteinstellungen voreingestellt sein: Startseite – Systeminfo – Dokumenteinstellungen (home 8 1).



Wissenschaftliche Schreibweise

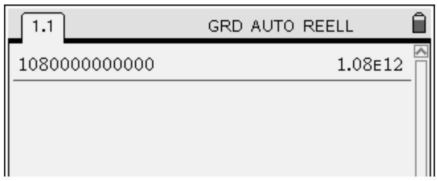
Unter Exponentialformat findet man die Einstellungsoption „Wissenschaftlich“.
Mit der Pfeiltaste rechts ▸ kann man die Untermenüpunkte nach unten gehen, mit click öffnet man einen Untermenupunkt. (Auswählen und Beenden mit enter).
Schließe die Dokumenteinstellungen, indem Du noch mal enter drückst oder weiter nach unten auf OK gehst (und ebenso mit enter beendest).



Calculator

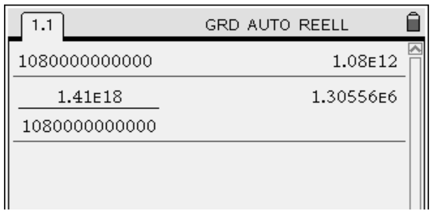
Um die wissenschaftliche Darstellung anzuzeigen, drückst Du nach Eingabe der Zahl die Tasten ctrl enter.

Die Schreibweise 1.08E12 bedeutet dabei $1{,}08 \cdot 10^{12}$.



EE-Taste

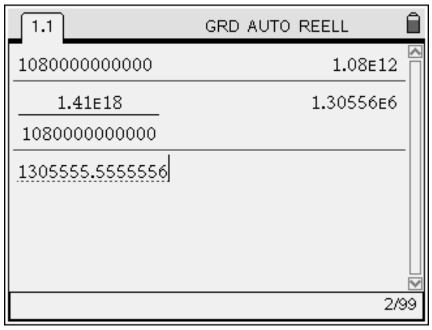
Um eine Zahl in wissenschaftlicher Darstellung einzugeben, verwendet man die EE –Taste.



Möchte man das Ergebnis nicht in wissenschaftlicher Darstellung angezeigt haben, markiert man das Ergebnis und drückt direkt auf enter.

(Markieren mit ▲ auf den entsprechenden Eintrag.)

Ergebnis:
Weit über eine Million mal würde die Erde in die Sonne passen.



Aufgabe

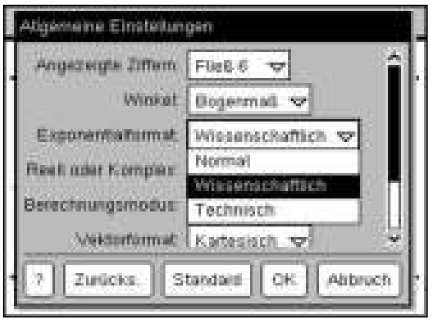
a) Das Volumen der Erde beträgt etwa 1080 000 000 000 km³.
Gib dieses Volumen in wissenschaftlicher Schreibweise an.

b) Das Volumen der Sonne beträgt etwa $1{,}41 \cdot 10^{18}$ km³.
Wie viele Erdkugeln hätten zusammen das Volumen der Sonne?

<table>
<tr><td>

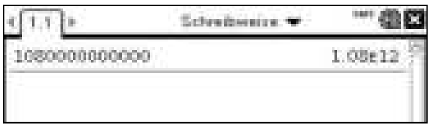
Dokumenteinstellungen
Um die wissenschaftliche Darstellung mit dem Nspire zu erzeugen, sollte dies zunächst bei den Dokumenteinstellungen voreingestellt sein: Startseite – Einstellungen und Status – Einstellungen – Allgemein
((⌂on)(5)(2)(1)).
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>

Wissenschaftliche Schreibweise
Unter Exponentialformat findet man die Einstellungsoption „Wissenschaftlich“.
Mit der Pfeiltaste rechts ▸ kann man die Untermenüpunkte nach unten gehen, mit (Klick) öffnet man einen Untermenupunkt. (Auswählen und Beenden mit (enter)).
Schließe die Dokumenteinstellungen, indem Du noch mal (enter) drückst oder weiter nach unten auf OK gehst (und ebenso mit (enter) beendest).
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>

Calculator
Um die wissenschaftliche Darstellung anzuzeigen, drückst Du nach Eingabe der Zahl die Tasten (ctrl)(enter).

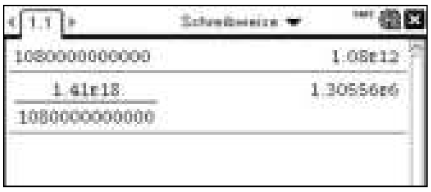
Die Schreibweise 1.08E12 bedeutet dabei $1{,}08 \cdot 10^{12}$.
</td><td>


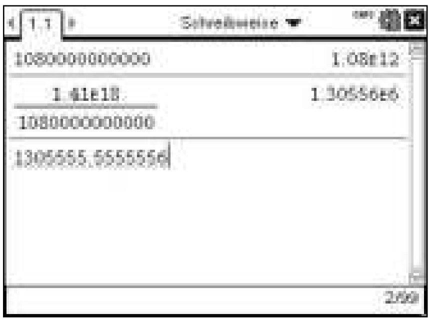
</td></tr>
<tr><td>

EE-Taste
Um eine Zahl in wissenschaftlicher Darstellung einzugeben, verwendet man die (EE) –Taste.

Möchte man das Ergebnis nicht in wissenschaftlicher Darstellung angezeigt haben, markiert man das Ergebnis und drückt direkt auf (enter).

(Markieren mit ▲ auf den entsprechenden Eintrag.)

Ergebnis:
Weit über eine Million mal würde die Erde in die Sonne passen.
</td><td>




</td></tr>
</table>

Diskrete Beschreibung von Wachstumsvorgängen

Aufgabe

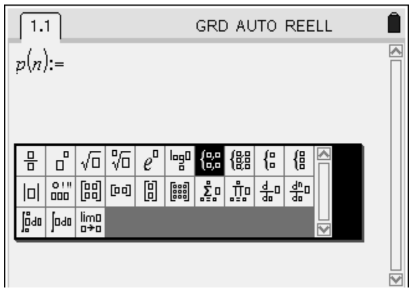
Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar alle 100m um etwa 1,3%. Auf Meereshöhe beträgt er 1000hPa (Hektopascal).

a) Gib eine rekursive und explizite Darstellung des Luftdrucks in Abhängigkeit der Höhe über dem Meeresspiegel an.

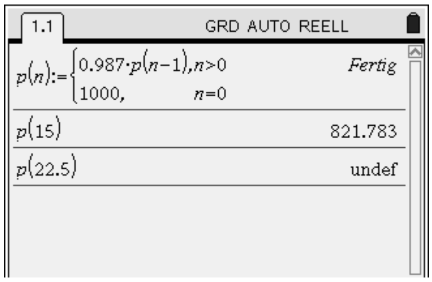
b) Gib den Luftdruck in 1500m und 2250m Höhe an und überprüfe, ob die Faustregel stimmt, nach der sich der Luftruck etwa alle 5000m halbiert.

Rekursive Darstellung im Calculator (abschnittsweise definierte Funktion)

Bezeichne mit p(n) den Luftdruck
(n in 100 Metern Höhe, p(n) in hPa).
Funktionen werden mit := definiert.
Für die rekursive Darstellung ist die Verwendung der *abschnittsweise definierten Funktion* nötig:
Wähle unter das markierte Symbol (beenden mit).

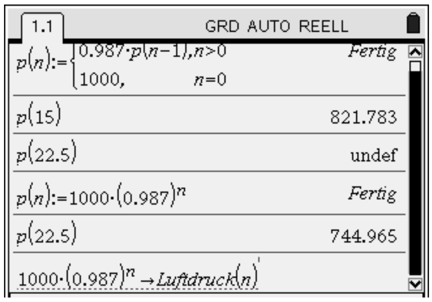


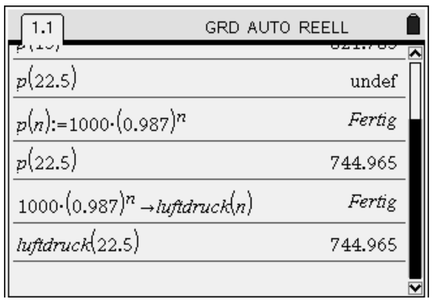
Der Luftdruck kann nach dem Gesetz der exponentiellen Abnahme mit p(n) = 0,987·p(n–1) und p(0) = 1000 (rekursive Darstellung) berechnet werden. Nach Eingabe der Funktionsdefinition kann man die Funktion z.B. für n=15 auswerten. Es ergibt sich in 1500m Höhe ein Luftdruck von etwa 820hPa. Da die rekursive Darstellung nur für natürliche Zahlen definiert ist, kann der Luftdruck in einer Höhe von 2250m so nicht berechnet werden (undef = nicht definiert).



Explizite Darstellung (Funktionsaufruf)

Eine explizite Darstellung für p ist durch $p(n) = 1000 \cdot 0{,}987^n$ gegeben. Die rekursive Definition kann durch die neue explizite Definition überschrieben werden. Damit kann auch der Luftdruck in 2250m berechnet werden, er beträgt etwa 745hPa.

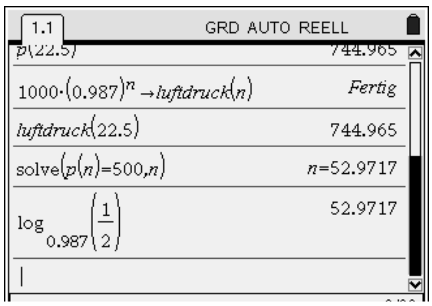




Hinweis:
Funktionen werden vom Rechner immer mit Kleinbuchstaben geschrieben. Abspeichern einer Funktion kann auch über den „Speicherpfeil“ erreicht werden.

Lösen einer Gleichung mit Funktionsaufruf

Wenn Du die Gleichung p(n) = 500 löst, kannst Du die Faustregel bestätigen (Halbierung des Luftdrucks mit der Formel in einer Höhe von 5297m).
Die Halbierung des Luftdrucks ist unabhängig von der Starthöhe. Das Ergebnis von oben kannst Du bestätigen, in dem Du entweder die Gleichung $0{,}987^n = 0{,}5$ löst oder direkt $\log_{0,987}(0{,}5)$ eingibst.



Aufgabe

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar alle 100m um etwa 1,3 %.
Auf Meereshöhe beträgt er 1000 hPa (Hektopascal).

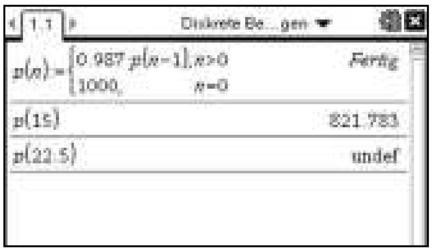
a) Gib eine rekursive und explizite Darstellung des Luftdrucks in Abhängigkeit der Höhe über dem Meeresspiegel an.

b) Gib den Luftdruck in 1500m und 2250m Höhe an und überprüfe, ob die Faustregel stimmt, nach der sich der Luftdruck etwa alle 5000m halbiert.

Rekursive Darstellung im Calculator (abschnittsweise definierte Funktion)

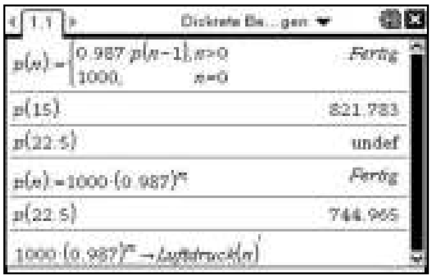
Bezeichne mit p(n) den Luftdruck
(n in 100 Metern Höhe, p(n) in hPa).
Funktionen werden mit := definiert.
Für die rekursive Darstellung ist die Verwendung der *abschnittsweise definierten Funktion* nötig:
Wähle unter das markierte Symbol (beenden mit enter).

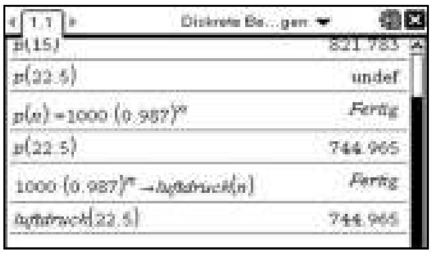
Der Luftdruck kann nach dem Gesetz der exponentiellen Abnahme mit p(n) = 0,987·p(n–1) und p(0) = 1000 (rekursive Darstellung) berechnet werden. Nach Eingabe der Funktionsdefinition kann man die Funktion z.B. für n=15 auswerten. Es ergibt sich in 1500m Höhe ein Luftdruck von etwa 820hPa. Da die rekursive Darstellung nur für natürliche Zahlen definiert ist, kann der Luftdruck in einer Höhe von 2250m so nicht berechnet werden (undef = nicht definiert).



Explizite Darstellung (Funktionsaufruf)

Eine explizite Darstellung für p ist durch $p(n) = 1000 \cdot 0{,}987^n$ gegeben. Die rekursive Definition kann durch die neue explizite Definition überschrieben werden. Damit kann auch der Luftdruck in 2250m berechnet werden, er beträgt etwa 745hPa.

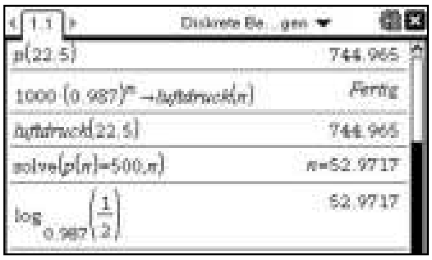




Hinweis:
Funktionen werden vom Rechner immer mit Kleinbuchstaben geschrieben.
Abspeichern einer Funktion kann auch über den „Speicherpfeil“ ctrl var erreicht werden.

Lösen einer Gleichung mit Funktionsaufruf

Wenn Du die Gleichung p(n) = 500 löst, kannst Du die Faustregel bestätigen (Halbierung des Luftdrucks mit der Formel in einer Höhe von 5297m).
Die Halbierung des Luftdrucks ist unabhängig von der Starthöhe. Das Ergebnis von oben kannst Du bestätigen, in dem Du entweder die Gleichung $0{,}987^n = 0{,}5$ löst oder direkt $\log_{0,987}(0{,}5)$ eingibst.



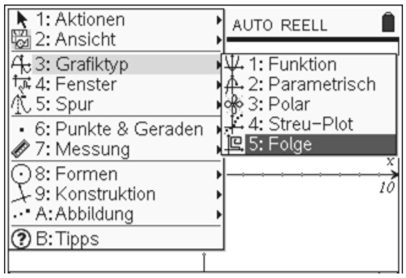
Diskrete Beschreibung von Wachstumsvorgängen

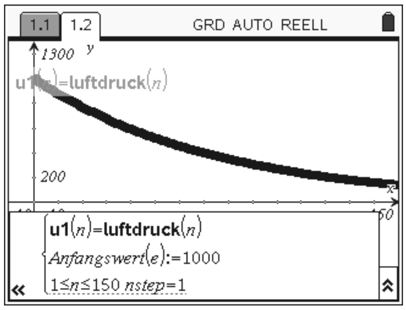
Darstellung mit Graphs & Geometry als Folge

Öffne die Anwendung Graphs & Geometry.
Ist p(n) bzw. luftdruck(n) im Calculator explizit *oder* rekursiv definiert, dann kann man den Luftdruck grafisch als Folge darstellen: menu 3 5.

Insbesondere wenn nur die rekursive Darstellung des Wachstumsvorgangs aus dem Calculator zur Verfügung steht, ist diese grafische Darstellung angebracht. Vorteilhaft ist die Möglichkeit einer beliebig einstellbaren Schrittweite (nstep).

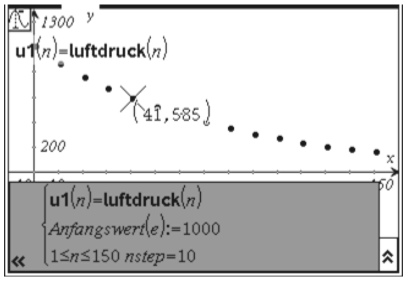
Hinweis: Mit ctrl G kann die Eingabezeile ein- und ausgeblendet werden. Die Anpassung des Grafikfensters wird z.B. über menu 4 1 vorgenommen.





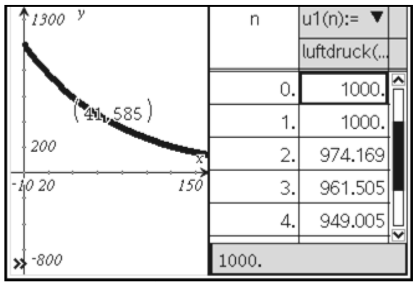
Verwendung der Spurfunktion

Unter menu 5 1 kann die Spurfunktion aufgerufen werden, um ausgezeichnete Punkte des Graphen anzeigen zu lassen. Mit den Pfeiltasten ▶ und ◀ kann man sich auf dem Graphen bewegen, mit (Klick) werden die Koordinaten der ausgewählten Punkte angezeigt.



Wertetabelle anzeigen

Wie im Funktionsmodus des Graphikmenüs kann man unter menu 2 9 eine Funktionstabelle bei geteiltem Bildschirm anzeigen lassen.



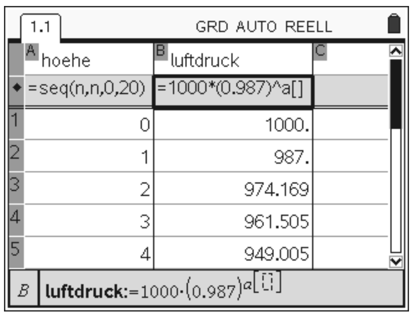
Darstellung in Lists & Spreadsheet

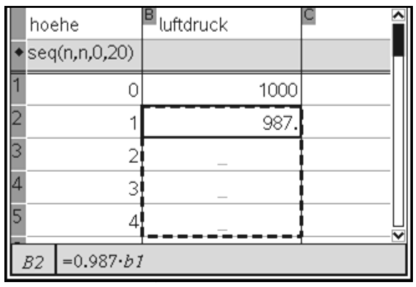
Verwendet man keinen Calculator, so kann die rekursive oder explizite Formeldarstellung auch direkt in Lists & Spreadsheet eingegeben werden:

1. Spaltennamen in erste Zeile eingeben: \`hoehe´ und \`luftdruck´ (Namen werden vom Rechner klein geschrieben)
2. Spaltenformel in die zweite Zeile (markiert mit ◆): Zahlenfolgenbefehl in Spalte a, explizite Darstellung in Spalte b.

Die rekursive Darstellung gibt man am besten mit der Kopierfunktion ein:

1. Eingabe der Rekursionsformel 0,987·b1 in die Zelle b2.
2. Mit ctrl (Klick) markierst Du Zelle b2 und kopierst den Zellenbefehl nach unten mit ▼ (beenden mit enter).



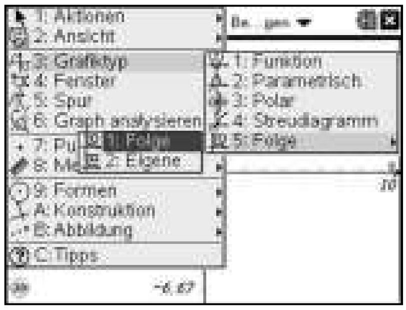


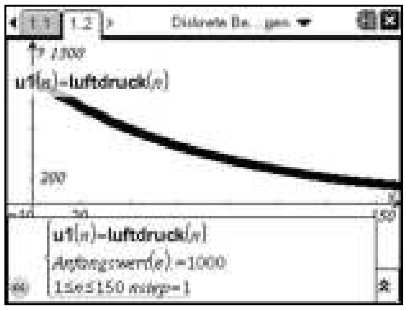
Darstellung mit Graphs als Folge

Öffne die Anwendung Graphs.
Ist p(n) bzw. luftdruck(n) im Calculator explizit *oder* rekursiv definiert, dann kann man den Luftdruck grafisch als Folge darstellen: (menu)(3)(5).

Insbesondere wenn nur die rekursive Darstellung des Wachstumsvorgangs aus dem Calculator zur Verfügung steht, ist diese grafische Darstellung angebracht.
Vorteilhaft ist die Möglichkeit einer beliebig einstellbaren Schrittweite (nstep).

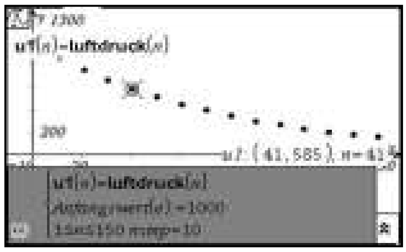
Hinweis: Mit (ctrl)(G) kann die Eingabezeile ein- und ausgeblendet werden. Die Anpassung des Grafikfensters wird z.B. über (menu)(4)(1) vorgenommen.





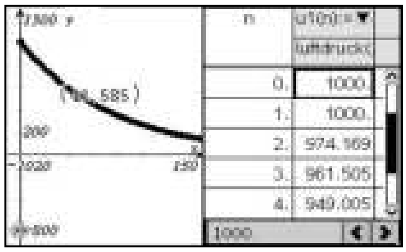
Verwendung der Spurfunktion

Unter (menu)(5)(1) kann die Spurfunktion aufgerufen werden, um ausgezeichnete Punkte des Graphen anzeigen zu lassen. Mit den Pfeiltasten ▸ und ◂ kann man sich auf dem Graphen bewegen, mit (☝) werden die Koordinaten der ausgewählten Punkte angezeigt.



Wertetabelle anzeigen

Wie im Funktionsmodus des Graphikmenüs kann man unter (menu)(2)(9) eine Funktionstabelle bei geteiltem Bildschirm anzeigen lassen.



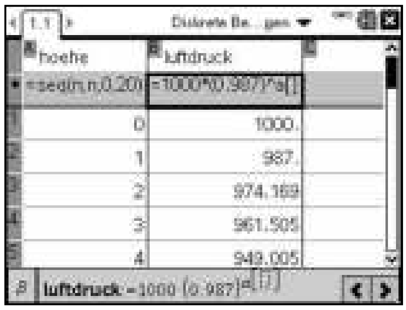
Darstellung in Lists & Spreadsheet

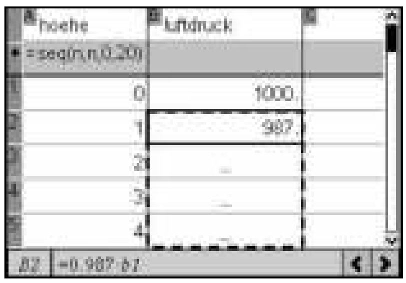
Verwendet man keinen Calculator, so kann die rekursive oder explizite Formeldarstellung auch direkt in Lists & Spreadsheet eingegeben werden:

1. Spaltennamen in erste Zeile eingeben: \`hoehe´ und \`luftdruck´ (Namen werden vom Rechner klein geschrieben)
2. Spaltenformel in die zweite Zeile (markiert mit ◆): Zahlenfolgenbefehl in Spalte a, explizite Darstellung in Spalte b.

Die rekursive Darstellung gibt man am besten mit der Kopierfunktion ein:

1. Eingabe der Rekursionsformel 0,987·b1 in die Zelle b2.
2. Mit (ctrl)(☝) markierst Du Zelle b2 und kopierst den Zellenbefehl nach unten mit ▾ (beenden mit (enter)).





Modellieren von Wachstum

Aufgabe

In einer Stadt mit zurzeit 80 000 Einwohnern wandern jährlich 200 Menschen zu. Man schätzt, dass die Bevölkerung des Landes ohne Einwanderung jährlich um 0,4% abnimmt.

a) Wie viele Einwohner wird die Stadt in zwölf Jahren haben?

b) Wann hat Stadt bei dieser Entwicklung 75 000 Einwohner?

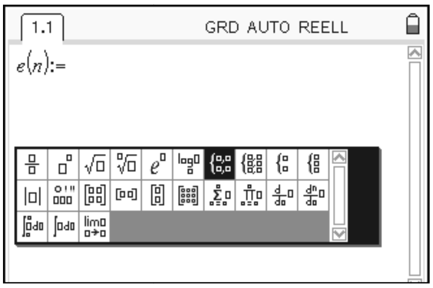
c) Wie viele Menschen müssten jährlich zuwandern, wenn bei gleicher prozentualer Abnahme die Einwohnerzahl konstant bleiben soll?

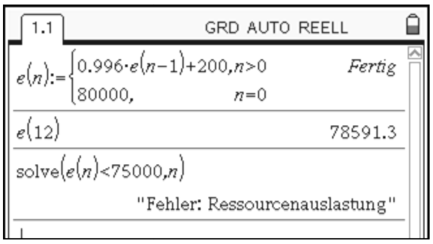
Rekursive Darstellung im Calculator (abschnittsweise definierte Funktion)

Bezeichne mit e(n) die Einwohnerzahl der Stadt zum Zeitpunkt n in Jahren nach Beobachtungsbeginn. Für die rekursive Darstellung kann man abschnittsweise definierten Funktion verwenden: Wähle unter ctrl das markierte Symbol (beenden mit enter).

Die Einwohnerzahl der Stadt lässt demnach durch den Term e(n) = 0,996·e(n–1) +200 und e(0) = 80 000 modellieren. Nach Eingabe der Definition, kann man die Funktion z.B. für n=12 auswerten.
Nach zwölf Jahren ergibt sich also eine Einwohnerzahl von knapp 78600.

Aus rekursiven Darstellungen kann man keine Lösung für Gleichungen oder Ungleichungen erwarten.

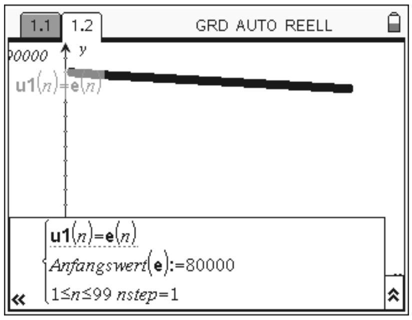




Darstellung mit Graphs & Geometry als Folge

Öffne das Menü Graphs & Geometry.

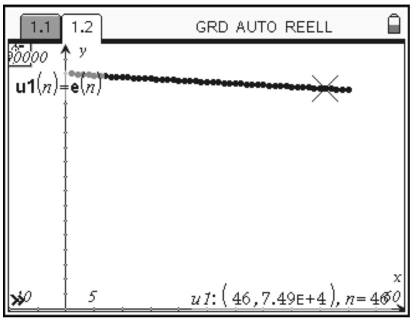
Stelle die Einwohnerzahl als Folge dar (menu 3 5).
Fensteranpassungen kannst Du unter menu 4 1 vornehmen.



Verwendung der Spurfunktion

Unter menu 5 1 kann die Spurfunktion aufgerufen werden, um ausgezeichnete Punkte des Graphen anzeigen zu lassen. Mit den Pfeiltasten ▶ und ◀ kann man sich auf dem Graphen bewegen.
(Ausblenden der Folgenanzeige mit ctrl G).

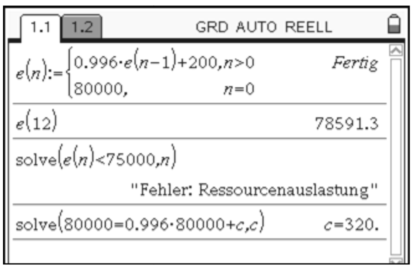
Für n = 46, d.h. nach 46 Jahren ergibt sich erstmals eine Einwohnerzahl unter 75000.



Lösen der Gleichung im Calculator

Da die Einwohnerzahl von 80000 konstant bleiben soll, gilt e(n) = e(n–1) = 80000 für alle n.

Mit dem Gleichungslöser (solve: menu 3 1) ergibt sich eine jährliche Zuwandererquote von 320 Menschen.



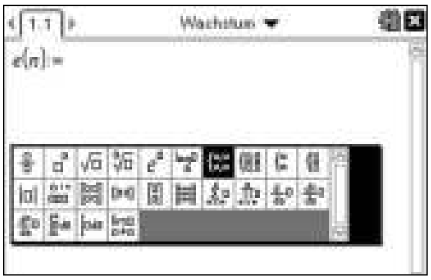
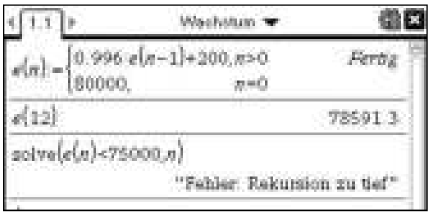
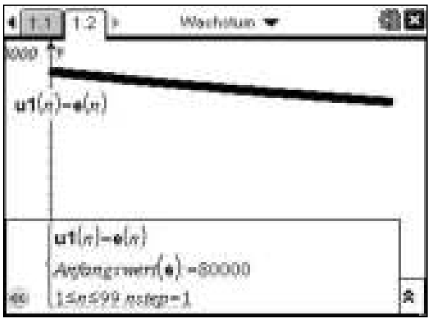
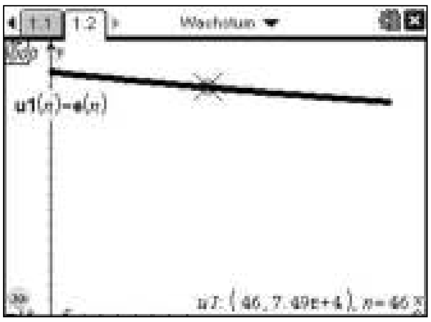
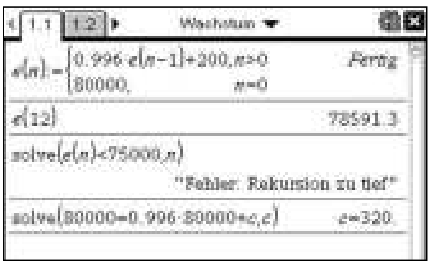
Aufgabe

In einer Stadt mit zurzeit 80 000 Einwohnern wandern jährlich 200 Menschen zu. Man schätzt, dass die Bevölkerung des Landes ohne Einwanderung jährlich um 0,4% abnimmt.

a) Wie viele Einwohner wird die Stadt in zwölf Jahren haben?

b) Wann hat Stadt bei dieser Entwicklung 75 000 Einwohner?

c) Wie viele Menschen müssten jährlich zuwandern, wenn bei gleicher prozentualer Abnahme die Einwohnerzahl konstant bleiben soll?

Rekursive Darstellung im Calculator (abschnittsweise definierte Funktion) Bezeichne mit e(n) die Einwohnerzahl der Stadt zum Zeitpunkt n in Jahren nach Beobachtungsbeginn. Für die rekursive Darstellung kann man abschnittsweise definierten Funktion verwenden: Wähle unter das markierte Symbol (beenden mit enter). Die Einwohnerzahl der Stadt lässt demnach durch den Term e(n) = 0,996·e(n–1) +200 und e(0) = 80 000 modellieren. Nach Eingabe der Definition, kann man die Funktion z.B. für n=12 auswerten. Nach zwölf Jahren ergibt sich also eine Einwohnerzahl von knapp 78600. Aus rekursiven Darstellungen kann man keine Lösung für Gleichungen oder Ungleichungen erwarten.	
Darstellung mit Graphs als Folge Öffne das Menü Graphs. Stelle die Einwohnerzahl als Folge dar (menu 3 5 1). Fensteranpassungen kannst Du unter menu 4 1 vornehmen.	
Verwendung der Spurfunktion Unter menu 5 1 kann die Spurfunktion aufgerufen werden, um ausgezeichnete Punkte des Graphen anzeigen zu lassen. Mit den Pfeiltasten ▶ und ◀ kann man sich auf dem Graphen bewegen. (Ausblenden der Folgenanzeige mit ctrl G). Für n = 46, d.h. nach 46 Jahren ergibt sich erstmals eine Einwohnerzahl unter 75000.	
Lösen der Gleichung im Calculator Da die Einwohnerzahl von 80000 konstant bleiben soll, gilt e(n) = e(n–1) = 80000 für alle n. Mit dem Gleichungslöser (solve: menu 3 1) ergibt sich eine jährliche Zuwandererquote von 320 Menschen.	

Binomialverteilung berechnen

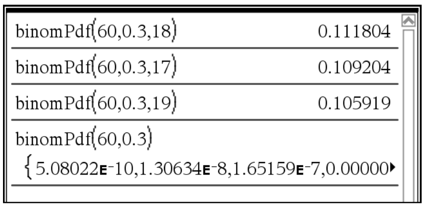
Aufgabe

Ein Glücksrad mit einer Trefferwahrscheinlichkeit p =0,3 wird 60 mal gedreht.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an. X ist $B_{60;0,3}$ -verteilt.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für 17, 18 und 19 Treffer.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine Trefferzahl von 17 bis 19.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für mindestens 18 Treffer
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit für höchstens 18 Treffer
e) Bei wie vielen Drehungen ist die Wahrscheinlichkeit maximal, eine Trefferzahl im Intervall [5; 9] zu erhalten?
f) Wie oft muss man das Rad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% eine Trefferzahl von 3 oder mehr zu erhalten?

Berechnung von Einzelwahrscheinlichkeiten.

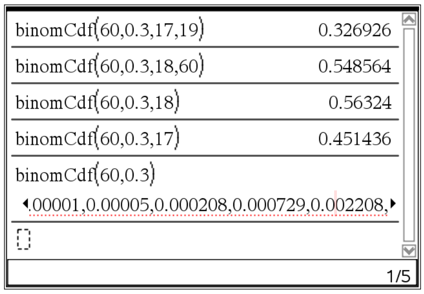
Die Funktion \`binomPdf(n,p,k)´ berechnet die Wahrscheinlichkeit, bei einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Treffer zu erzielen.
Mit \`binomPdf(n,p)´ erhält man eine Liste der Wahrscheinlichkeiten für $0 \le k \le n$.
a) P(X=17) $\approx$10,9 %, P(X=18) $\approx$11,2 %, P(X=19) $\approx$10,6 %



Berechnung von Intervallwahrscheinlichkeiten.

Mit \`binomCdf(n,p,ug,og)´ berechnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Trefferzahl in einem bestimmten Intervall liegt. Hier z.B: \`binomCdf(n,p,17,19)´
b) P(17 ≤ X ≤ 19) $\approx$32,7 %, c) P(18 ≤ X ≤ 60) $\approx$54,9 %
d) P(0 ≤ X ≤ 18) $\approx$56,3 %

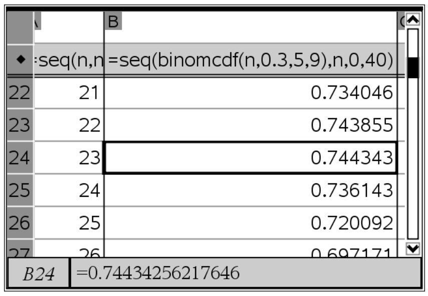
Hinweis: Lässt man den Parameter \`ug´ weg, wird er automatisch auf 0 gesetzt. Lässt man \`ug´ und \`og´ weg, so erhält man eine Liste mit den Werten $0 \le k \le n$.



Maximale Wahrscheinlichkeit eines Intervalls.

Die Wahrscheinlichkeit $P(5 \le X \le 9)$ soll in Abhängigkeit von der Anzahl n der Versuche maximiert werden. Diese Wahrscheinlichkeit ist sowohl bei niedrigen als auch bei hohen Versuchszahlen klein. Man löst das Problem mit einer Tabelle. Trage in Lists & Spreadsheet in der ersten Spalte mit \`=seq(n,n,0,40)´ aufeinander folgende natürliche Zahlen ein. Die zweite Spalte erhält mit \`=seq(binomcdf(n,0.3,5,9)´ die Wahrscheinlichkeit zugewiesen, bei n Versuchen eine Trefferzahl im Intervall [5;9] zu erhalten.

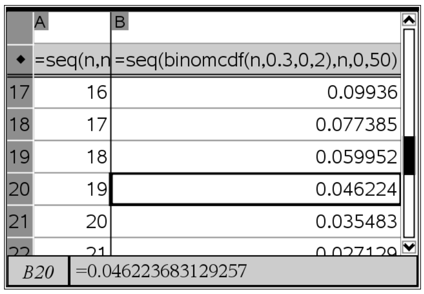
e) Man findet die maximale Wahrscheinlichkeit bei 23 Drehungen.



Mindestzahlen von Versuchen

Bei f) gilt: P(X ≥ 3) = 1 – P(X ≤ 2) ≥ 0,95.
Daraus folgt: P(X ≤ 2) ≥ 0,05. Also ist der erste Wert für n gesucht, für den gilt: binomcdf(n,0.3,0,2) ≤ 0.05.

Gebe in wie oben beschrieben in der ersten Spalte die natürlichen Zahlen von 0 bis zu einer geeigneten Obergrenze ein, in der zweiten Spalte werden die entsprechenden Werte der kumulierten Binomialverteilung eingetragen. Diese bilden eine fallende Folge, die in der Aufgabe bei n=19 zum ersten Mal unter 0,05 liegt.



Binomialverteilung berechnen

Aufgabe

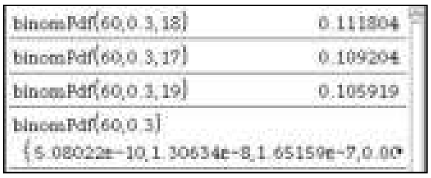
Ein Glücksrad mit einer Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,3 wird 60 mal gedreht.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an. X ist $B_{60;0,3}$ -verteilt.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für 17, 18 und 19 Treffer.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine Trefferzahl von 17 bis 19.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für mindestens 18 Treffer
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit für höchstens 18 Treffer
e) Bei wie vielen Drehungen ist die Wahrscheinlichkeit maximal, eine Trefferzahl im Intervall [5; 9] zu erhalten?
f) Wie oft muss man das Rad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% eine Trefferzahl von 3 oder mehr zu erhalten?

Berechnung von Einzelwahrscheinlichkeiten.

Die Funktion \`binomPdf(n,p,k)´ berechnet die Wahrscheinlichkeit, bei einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Treffer zu erzielen.
Mit \`binomPdf(n,p)´ erhält man eine Liste der Wahrscheinlichkeiten für $0 \le k \le n$.

a) P(X=17) $\approx$ 10,9 %, P(X=18) $\approx$ 11,2 %, P(X=19) $\approx$ 10,6 %

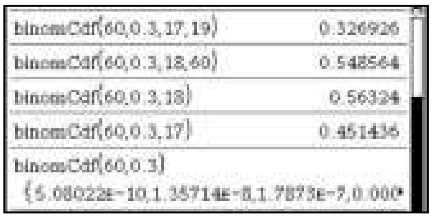


Berechnung von Intervallwahrscheinlichkeiten.

Mit \`binomCdf(n,p,ug,og)´ berechnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Trefferzahl in einem bestimmten Intervall liegt. Hier z.B: \`binomCdf(n,p,17,19)´

b) P(17 ≤ X ≤ 19) $\approx$ 32,7 %, c) P(18 ≤ X ≤ 60) $\approx$ 54,9 %
d) P(0 ≤ X ≤ 18) $\approx$ 56,3 %

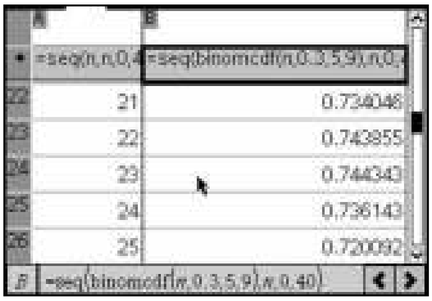
Hinweis: Lässt man den Parameter \`ug´ weg, wird er automatisch auf 0 gesetzt. Lässt man \`ug´ und \`og´ weg, so erhält man eine Liste mit den Werten $0 \le k \le n$.



Maximale Wahrscheinlichkeit eines Intervalls.

Die Wahrscheinlichkeit $P(5 \le X \le 9)$ soll in Abhängigkeit von der Anzahl n der Versuche maximiert werden. Diese Wahrscheinlichkeit ist sowohl bei niedrigen als auch bei hohen Versuchszahlen klein. Man löst das Problem mit einer Tabelle. Trage in Lists & Spreadsheet in der ersten Spalte mit \`=seq(n,n,0,40)´ aufeinander folgende natürliche Zahlen ein. Die zweite Spalte erhält mit \`=seq(binomcdf(n,0.3,5,9) ,n,0,40)´ die Wahrscheinlichkeit zugewiesen, bei n Versuchen eine Trefferzahl im Intervall [5;9] zu erhalten.

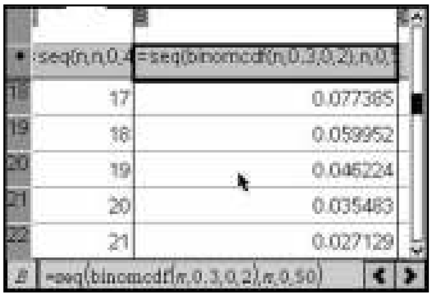
e) Man findet die maximale Wahrscheinlichkeit bei 23 Drehungen.



Mindestzahlen von Versuchen

Bei f) gilt: P(X ≥ 3) = 1 – P(X ≤ 2) ≥ 0,95.
Daraus folgt: P(X ≤ 2) ≥ 0,05. Also ist der erste Wert für n gesucht, für den gilt: binomcdf(n,0.3,0,2) ≤ 0.05.

Gebe in wie oben beschrieben in der ersten Spalte die natürlichen Zahlen von 0 bis zu einer geeigneten Obergrenze ein, in der zweiten Spalte werden die entsprechenden Werte der kumulierten Binomialverteilung eingetragen. Diese bilden eine fallende Folge, die in der Aufgabe bei n=19 zum ersten Mal unter 0,05 liegt.



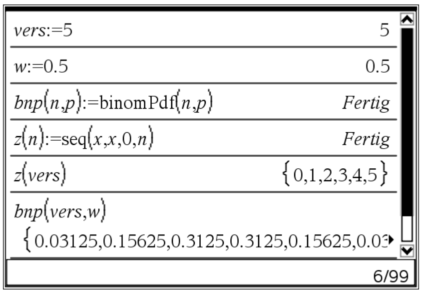
Animierte Darstellung der Binomialverteilung

Aufgabe

Erstelle nach den folgenden Anweisungen eine animierte Grafik.

Definition im Calculator

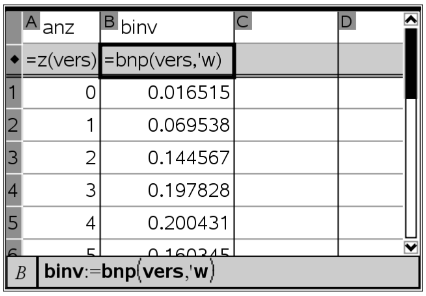
In einem Calculator – Fenster werden zunächst die Variablen vers (Anzahl der Versuche) und w (Trefferwahrscheinlichkeit) definiert. Danach wird die Funktion bnp(n,p) durch binomPdf(n,p) definiert und die Funktion z(n) als eine Liste der natürlichen Zahlen von 0 bis n.
z(vers) liefert dann die Listen der Zahlen von 0 bis 5 (Wert von vers).
bnp(vers,w) liefert die Werte der Binomialverteilung zu diesen Parametern als Liste.



Umsetzung nach Lists & Spreadsheet

Die erste Spalte erhält z(vers) als Wert zugewiesen und den Namen anz. Sie dient als Anzeige der Trefferzahl.
Der zweiten Spalte wird bnp(vers,'w) zugewiesen, hier werden die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für diese Trefferzahlen angezeigt.

Ändert man in Calculator die Werte von vers und w, so werden diese Spalten neu berechnet.

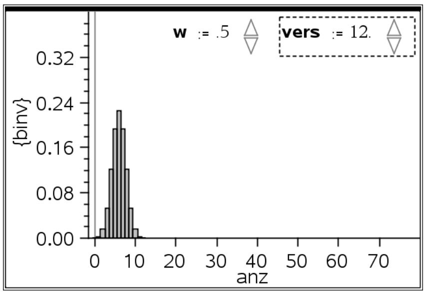


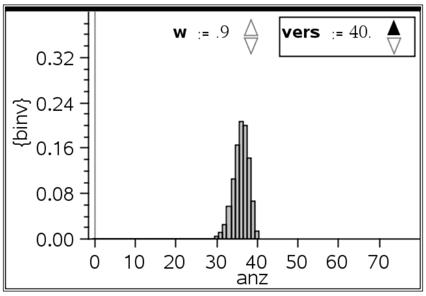
Graphische Darstellung

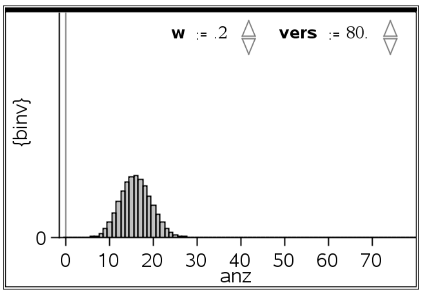
Zunächst werden mit menu 5 1 die Fenstereinstellungen so abgeändert, dass XMax auf 80 und YMax auf 0.5 steht.
Dann werden mit menu 3 4 zwei Schieberegler eingefügt.
Der eine wird an die Variable **vers** gebunden und auf einen Bereich zwischen 5 und 80 mit Schrittweite 1 eingestellt.
Der andere wird auf die Variable **w** mit Bereich 0.05 bis 0.95 und Schrittweite 0.05 eingestellt.

Hinweis: Das Einstellmenu erhält man, indem man den Zeiger über den Regler stellt und drückt.

Beide Regler werden minimiert und an den oberen Rand des Blatts verschoben.
Nun kann man mit den Schiebereglern die Werte für die Trefferwahrscheinlichkeit **w** und die Versuchsanzahl **vers** verändern und den Einfluss auf das Histogramm beobachten.
Es empfiehlt sich, systematisch vorzugehen, d.h. immer einen Parameter fest zu lassen und den anderen zu verändern.







Wie ändert sich bei w=0,5 das Histogramm, wenn man vers verändert?

Wie ändert sich für vers=40 das Histogramm, wenn w verändert wird?

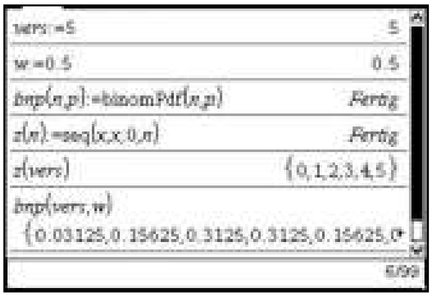
Versuche, einen Zusammenhang zwischen der Trefferzahl mit der höchsten Wahrscheinlichkeit und den Werten von vers und w zu finden.

Aufgabe

Erstelle nach den folgenden Anweisungen eine animierte Grafik.

Definition im Calculator

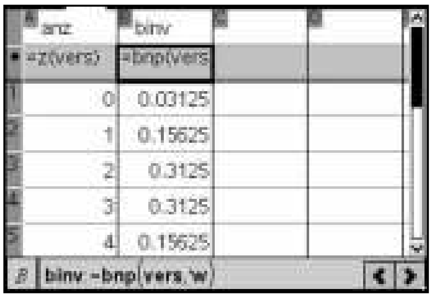
In einem Calculator – Fenster werden zunächst die Variablen vers (Anzahl der Versuche) und w (Trefferwahrscheinlichkeit) definiert. Danach wird die Funktion bnp(n,p) durch binomPdf(n,p) definiert und die Funktion z(n) als eine Liste der natürlichen Zahlen von 0 bis n.
z(vers) liefert dann die Listen der Zahlen von 0 bis 5 (Wert von vers).
bnp(vers,w) liefert die Werte der Binomialverteilung zu diesen Parametern als Liste.



Umsetzung nach Lists & Spreadsheet

Die erste Spalte erhält z(vers) als Wert zugewiesen und den Namen anz. Sie dient als Anzeige der Trefferzahl.
Der zweiten Spalte wird bnp(vers,'w) zugewiesen, hier werden die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für diese Trefferzahlen angezeigt.

Ändert man in Calculator die Werte von vers und w, so werden diese Spalten neu berechnet.



Graphische Darstellung

Zunächst werden mit menu 5 1 die Fenstereinstellungen so abgeändert, dass XMax auf 80 und YMax auf 0.5 steht.
Dann werden mit menu 3 4 zwei Schieberegler eingefügt.
Der eine wird an die Variable **vers** gebunden und auf einen Bereich zwischen 5 und 80 mit Schrittweite 1 eingestellt.
Der andere wird auf die Variable **w** mit Bereich 0.05 bis 0.95 und Schrittweite 0.05 eingestellt.

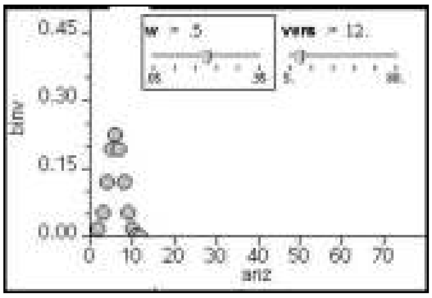
Hinweis: Das Einstellmenu erhält man, indem man den Zeiger über den Regler stellt und ctrl menu drückt.

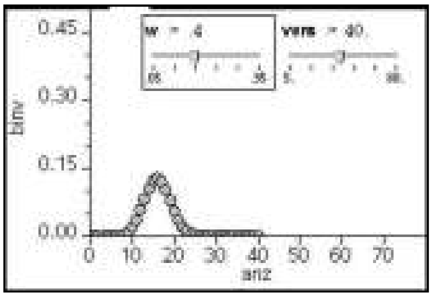
Beide Regler werden minimiert und an den oberen Rand des Blatts verschoben.
Nun kann man mit den Schiebereglern die Werte für die Trefferwahrscheinlichkeit **w** und die Versuchsanzahl **vers** verändern und den Einfluss auf das Histogramm beobachten.
Es empfiehlt sich, systematisch vorzugehen, d.h. immer einen Parameter fest zu lassen und den anderen zu verändern.

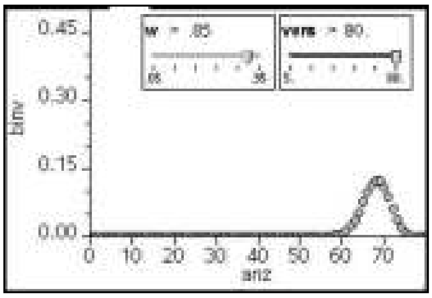
Wie ändert sich bei w=0,5 das Histogramm, wenn man vers verändert?

Wie ändert sich für vers=40 das Histogramm, wenn w verändert wird?

Versuche, einen Zusammenhang zwischen der Trefferzahl mit der höchsten Wahrscheinlichkeit und den Werten von vers und w zu finden.







Die Kreiszahl π

Aufgabe

Die Kreiszahl π soll mit Hilfe zweier Näherungsverfahren möglichst genau bestimmt werden.

a) Ein explizites Verfahren unter Verwendung trigonometrischer Zusammenhänge.

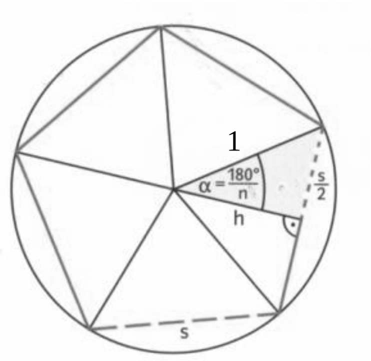
b) Ein rekursives Verfahren, das auf Archimedes zurückgeht.

Explizites Verfahren:

Einem Kreis mit Radius 1 cm ist ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben (in der Figur ein Fünfeck). Je größer n ist, desto mehr nähert sich der Umfang und der Flächeninhalt des Vielecks dem Umfang des Kreises (U = 2π cm) bzw. dem Flächeninhalt des Kreises
(A =π cm²).
Für den Umfang und den Flächeninhalt des Vielecks gilt:

$U = n\cdot s = n\cdot 2\cdot\sin(\alpha) = \quad 2\cdot n\cdot\sin(\frac{180°}{n})$ und

$A = n\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot h = \quad n\cdot\sin(\frac{180°}{n})\cdot\cos(\frac{180°}{n})$

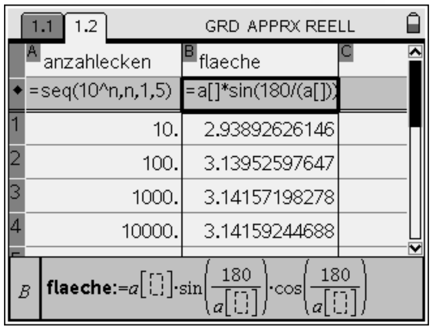


a) Explizite Berechnung mit Lists & Spreadsheet

Gib in der ersten Spalte die Anzahl der Ecken des Vielecks ein. Der seq–Befehl hilft dir dabei

„[seq(Term der Folge, Variable, untere Grenze, obere Grenze)]“.

In der Formelzeile kannst Du in dann in der nächsten Spalte die Formel zur Berechnung des halben Umfangs des Vielecks oder die Formel für den Flächeninhalt des Vielecks eingeben.



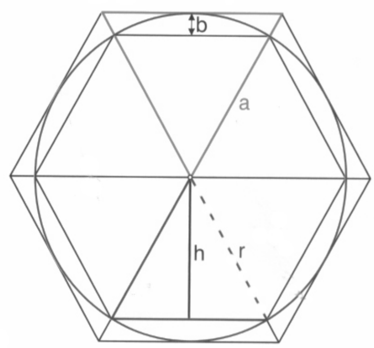
Rekursives Verfahren:

Man muss die Flächeninhalte der ein- und umschreibenden Sechsecke des Kreises berechnen. Alle weiteren ein- und umschriebenen n-Ecke des Kreises kann man daraus berechnen. Ist f_n der Flächeninhalt eines inneren und F_n der Flächeninhalt eines äußeren n-Ecks, so gelten die Rekursionsbedingungen: $f_{2n} = \sqrt{f_n \cdot F_n}$ und $F_{2n} = \frac{2}{\frac{1}{F_n} + \frac{1}{f_{2n}}}$.

Um z.B. die erste Gleichung einzusehen, prüfe beispielhaft die Beziehung $f_{12} = \sqrt{f_6 \cdot F_6}$ nach:

1. Begründe, dass $f_6 = 3\cdot r\cdot h$ und $F_6 = 3\cdot r\cdot a$ gilt.

2. Verwende, dass für die Höhe im gleichseitigen Dreieck $h = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ bzw. $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ gilt und beginne mit den Ansätzen $f_{12} = f_6 + 3\cdot r\cdot b = \ldots$ und $\sqrt{f_6 \cdot F_6} = \ldots$ bis sich nach Umformung das gleiche ergibt.

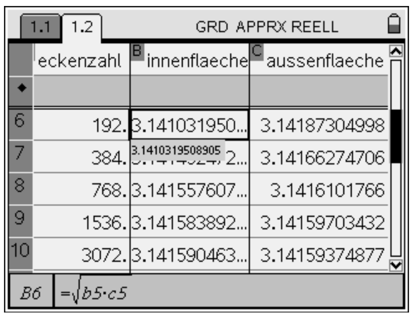


b) Rekursive Berechnung mit Lists & Spreadsheet

Betrachte einen Kreis mit Radius 1cm. Dann ist der Flächeninhalt des Kreises A = π cm² und es gilt für alle n: $f_n < A < F_n$. Gib zunächst die erste Zeile wie oben ein:

Eckenzahl: 6; Innenfläche: 1,5·$\sqrt{3}$; Außenfläche: 2·$\sqrt{3}$.

In die zweite Zeile gibst Du die Rekursionsformeln ein. Mit ctrl und ▼ kannst Du die Formeln nach unten kopieren.



Aufgabe

Die Kreiszahl π soll mit Hilfe zweier Näherungsverfahren möglichst genau bestimmt werden.

a) Ein explizites Verfahren unter Verwendung trigonometrischer Zusammenhänge.

b) Ein rekursives Verfahren, das auf Archimedes zurückgeht.

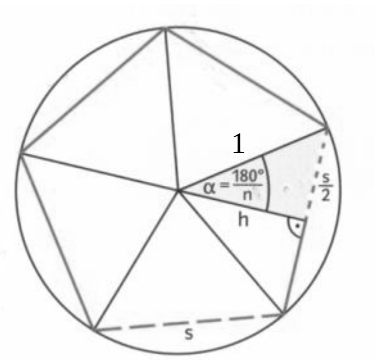
Explizites Verfahren:

Einem Kreis mit Radius 1 cm ist ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben (in der Figur ein Fünfeck). Je größer n ist, desto mehr nähert sich der Umfang und der Flächeninhalt des Vielecks dem Umfang des Kreises (U = 2π cm) bzw. dem Flächeninhalt des Kreises (A = π cm²).

Für den Umfang und den Flächeninhalt des Vielecks gilt:

$U = n \cdot s = n \cdot 2 \cdot \sin(\alpha) = \quad 2 \cdot n \cdot \sin(\frac{180°}{n})$ und

$A = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot h = \quad n \cdot \sin(\frac{180°}{n}) \cdot \cos(\frac{180°}{n})$

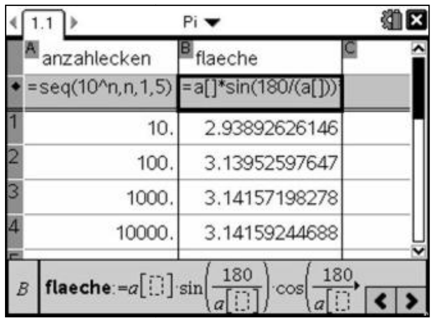


a) Explizite Berechnung mit Lists & Spreadsheet

Gib in der ersten Spalte die Anzahl der Ecken des Vielecks ein. Der seq–Befehl hilft dir dabei

„[seq(Term der Folge, Variable, untere Grenze, obere Grenze)]“.

In der Formelzeile kannst Du in dann in der nächsten Spalte die Formel zur Berechnung des halben Umfangs des Vielecks oder die Formel für den Flächeninhalt des Vielecks eingeben.

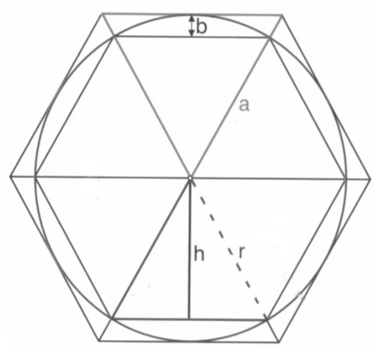


Rekursives Verfahren:

Man muss die Flächeninhalte der ein- und umschreibenden Sechsecke des Kreises berechnen. Alle weiteren ein- und umschriebenen n-Ecke des Kreises kann man daraus berechnen. Ist f_n der Flächeninhalt eines inneren und F_n der Flächeninhalt eines äußeren n-Ecks, so gelten die Rekursionsbedingungen: $f_{2n} = \sqrt{f_n \cdot F_n}$ und $F_{2n} = \frac{2}{\frac{1}{F_n} + \frac{1}{f_{2n}}}$.

Um z.B. die erste Gleichung einzusehen, prüfe beispielhaft die Beziehung $f_{12} = \sqrt{f_6 \cdot F_6}$ nach:

1. Begründe, dass $f_6 = 3 \cdot r \cdot h$ und $F_6 = 3 \cdot r \cdot a$ gilt.
2. Verwende, dass für die Höhe im gleichseitigen Dreieck $h = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ bzw. $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ gilt und beginne mit den Ansätzen $f_{12} = f_6 + 3 \cdot r \cdot b = ...$ und $\sqrt{f_6 \cdot F_6} = ...$ bis sich nach Umformung das gleiche ergibt.



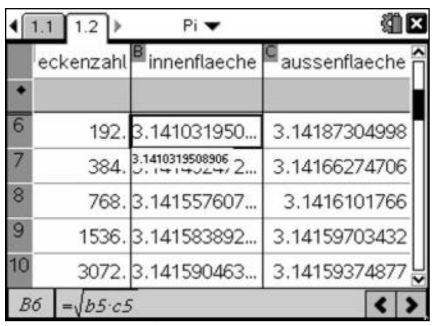
b) Rekursive Berechnung mit Lists & Spreadsheet

Betrachte einen Kreis mit Radius 1cm. Dann ist der Flächeninhalt des Kreises A = π cm² und es gilt für alle n: $f_n < A < F_n$. Gib zunächst die erste Zeile wie oben ein:

Eckenzahl: 6; Innenfläche: 1,5·$\sqrt{3}$; Außenfläche: 2·$\sqrt{3}$.

In die zweite Zeile gibst Du die Rekursionsformeln ein.

Mit ctrl und ▼ kannst Du die Formeln nach unten kopieren.



Vom Differenzquotienten zur Ableitung

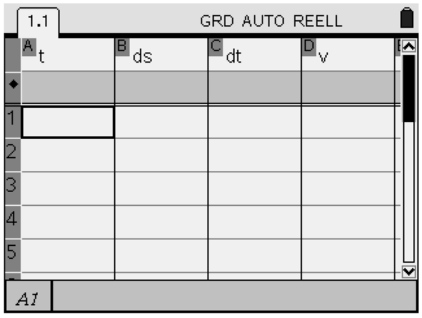
Aufgabe

Eine Kugel rollt über eine schiefe Ebene hinab. Dabei gelte für den in der Zeit t zurückgelegten Weg s der Zusammenhang $s = 0{,}2 \cdot t^2$. Welche Geschwindigkeit hat die Kugel nach drei Sekunden?

Idee: Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 3 soll über Durchschnittsgeschwindigkeiten angenähert werden. Für die Durchschnittsgeschwindigkeit v gilt $v = \frac{Wegdifferenz}{Zeitdifferenz} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

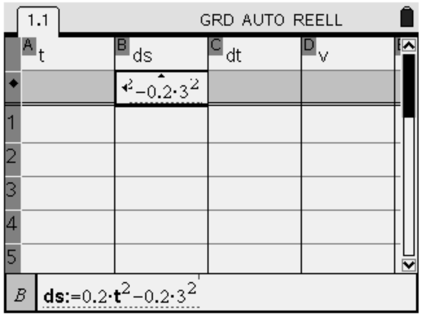
Anlegen einer passenden Tabelle

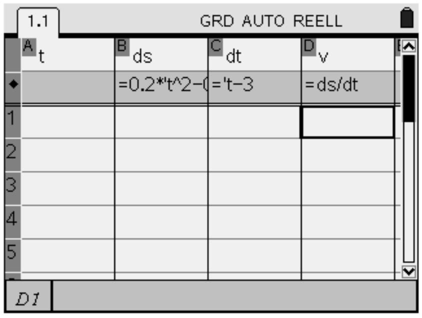
Die Aufgabe kann mit Hilfe von Tabellenkalkulation gelöst werden. Dazu wird „Lists & Spreadsheet“ aufgerufen (⌂ 3). Die Spalten werden nun entsprechend der Abbildung benannt. Dabei steht t für die Zeit, ds für die Wegdifferenz zwischen Zeitpunkt t und Zeitpunkt 3, dt für die Zeitdifferenz zwischen Zeitpunkt t und Zeitpunkt 3 und v für die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen Zeitpunkt t und Zeitpunkt 3.



Eingabe der Spaltenformeln

In der ersten Spalte sollen später Werte für beliebige Zeiten t eingegeben werden. Die anderen Zellen der jeweiligen Zeile sollen dann automatisch den entsprechenden Eintrag anzeigen.
Zur Bestimmung der Wegdifferenz wird in das grau hinterlegte Feld der zweiten Spalte die Formel: $0{,}2 \cdot t^2 - 0{,}2 \cdot 3^2$ eingegeben. Nach Abschluss der Eingabe mit enter erkennt der Rechner eine doppelte Verwendung des Buchstabens t. Einmal gibt es eine Spalte T und zum anderen eine von uns festgelegte Variable t (Zeit) in Spalte A. Es muss noch angegeben werden, dass es sich in der Formel um die Variable t handelt.
Zur Bestimmung der Zeitdifferenz wird in das grau hinterlegte Feld der dritten Spalte die Formel: $t - 3$ eingegeben.
Zur Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit wird in das grau hinterlegte Feld der vierten Spalte die Formel: ds/dt eingegeben.

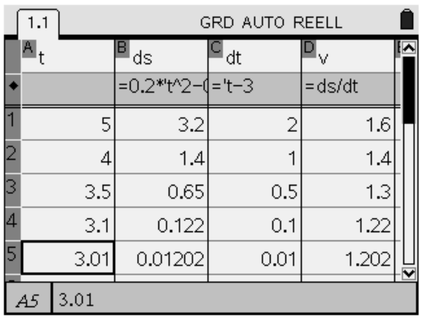




Bestimmung von Näherungswerten für die Momentangeschwindigkeit

Gib in die Zellen der ersten Spalte verschiedene Werte für t ein. Bestimme zuerst die Durchschnittsgeschwindigkeit für einen längeren Zeitraum (z.B. zwischen t = 5 und t = 3) und nähere dich dann dem zu untersuchenden Zeitpunkt t = 3 Schritt für Schritt an.
Starte auch einmal mit einem Wert kleiner 3 und nähere dich der 3 von dieser „Seite“.

Gegen welchen Wert streben Weg- und Zeitdifferenz?
Gegen welchen Wert strebt der Quotient aus Weg- und Zeitdifferenz, also die Durchschnittsgeschwindigkeit?



Aufgabe

Eine Kugel rollt über eine schiefe Ebene hinab. Dabei gelte für den in der Zeit t zurückgelegten Weg s der Zusammenhang $s = 0{,}2 \cdot t^2$. Welche Geschwindigkeit hat die Kugel nach drei Sekunden?

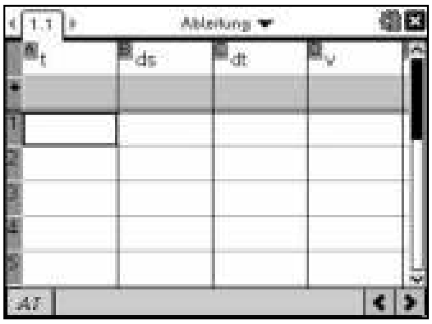
Idee: Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 3 soll über Durchschnittsgeschwindigkeiten angenähert werden. Für die Durchschnittsgeschwindigkeit v gilt $v = \frac{Wegdifferenz}{Zeitdifferenz} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

<table>
<tr><td>

Anlegen einer passenden Tabelle

Die Aufgabe kann mit Hilfe von Tabellenkalkulation gelöst werden. Dazu wird „Lists & Spreadsheet“ aufgerufen (on 3). Die Spalten werden nun entsprechend der Abbildung benannt. Dabei steht t für die Zeit, ds für die Wegdifferenz zwischen Zeitpunkt t und Zeitpunkt 3, dt für die Zeitdifferenz zwischen Zeitpunkt t und Zeitpunkt 3 und v für die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen Zeitpunkt t und Zeitpunkt 3.

</td><td>

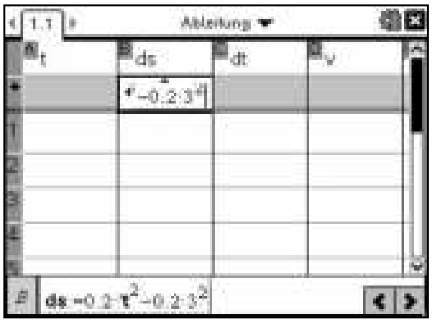


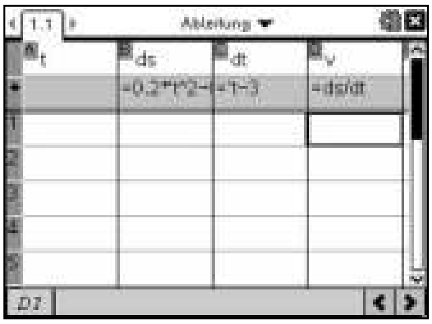
</td></tr>
<tr><td>

Eingabe der Spaltenformeln

In der ersten Spalte sollen später Werte für beliebige Zeiten t eingegeben werden. Die anderen Zellen der jeweiligen Zeile sollen dann automatisch den entsprechenden Eintrag anzeigen.
Zur Bestimmung der Wegdifferenz wird in das grau hinterlegte Feld der zweiten Spalte die Formel: $0{,}2 \cdot t^2 - 0{,}2 \cdot 3^2$ eingegeben. Nach Abschluss der Eingabe mit enter erkennt der Rechner eine doppelte Verwendung des Buchstabens t. Einmal gibt es eine Spalte T und zum anderen eine von uns festgelegte Variable t (Zeit) in Spalte A. Es muss noch angegeben werden, dass es sich in der Formel um die Variable t handelt.
Zur Bestimmung der Zeitdifferenz wird in das grau hinterlegte Feld der dritten Spalte die Formel: $t - 3$ eingegeben.
Zur Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit wird in das grau hinterlegte Feld der vierten Spalte die Formel: ds/dt eingegeben.

</td><td>





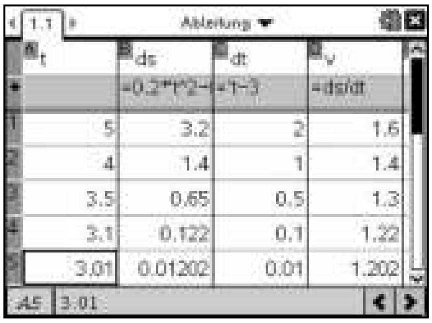
</td></tr>
<tr><td>

Bestimmung von Näherungswerten für die Momentangeschwindigkeit

Gib in die Zellen der ersten Spalte verschiedene Werte für t ein. Bestimme zuerst die Durchschnittsgeschwindigkeit für einen längeren Zeitraum (z.B. zwischen t = 5 und t = 3) und nähere dich dann dem zu untersuchenden Zeitpunkt t = 3 Schritt für Schritt an.
Starte auch einmal mit einem Wert kleiner 3 und nähere dich der 3 von dieser „Seite“.

Gegen welchen Wert streben Weg- und Zeitdifferenz?
Gegen welchen Wert strebt der Quotient aus Weg- und Zeitdifferenz, also die Durchschnittsgeschwindigkeit?

</td><td>



</td></tr>
</table>

Veranschaulichung von Ableitungsfunktionen

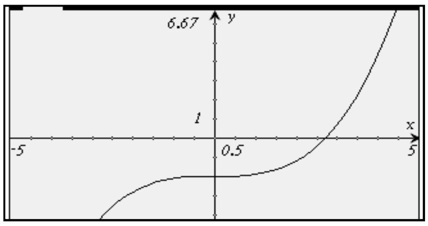
Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - 2$. Veranschauliche den Graphen der Ableitungsfunktion f‘, ohne die Ableitungsfunktion zu berechnen.

Zeichnen des Graphen von f

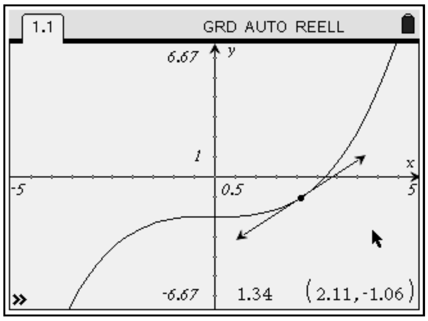
Öffne ein Graphs & Geometry Fenster und zeichne den Graphen von f.

Wähle die Skalierung der Achsen so, dass die „interessanten“ Bereiche des Graphen gut erkennbar sind.



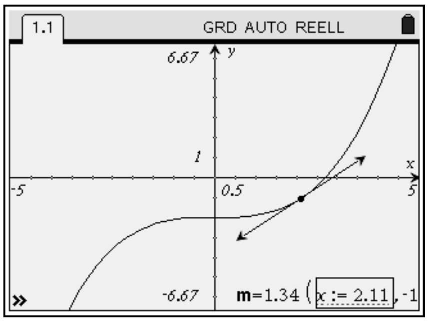
Konstruktion einer Tangente und Bestimmung der Tangentensteigung

Wähle dazu menu 6 7 und klicke auf einen Punkt des Graphen. Mit menu 7 3 und einem Klick auf die Tangente erscheint die Tangentensteigung. Ein weiterer Klick legt die Position der Anzeige auf dem Bildschirm fest.
Um die Koordinaten des Punktes zu bestimmen, in dem die Tangente konstruiert wurde, wählst Du menu 1 7, klickst auf den Punkt und fixierst die Anzeige der Koordinaten wiederum durch einen zweiten Klick.



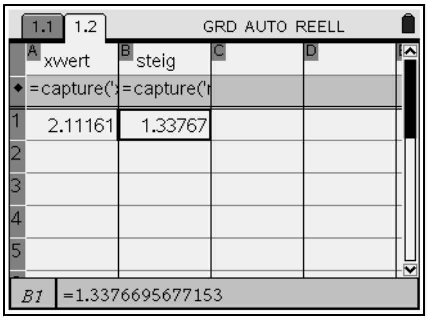
Zuordnung von Variablen

Ziel ist es beim Bewegen des Punktes entlang des Graphen die Tangentensteigung an jeder Stelle x zu erfassen. Dazu müssen der Steigung und der x-Koordinate Variablen zugeordnet werden. Dies geschieht, in dem man den Zeiger über die entsprechende Zahl bewegt, einmal klickt (die Zahl ist nun mit einem grauen Rahmen schwach hinterlegt) und ctrl sto→var wählt. Der Rechner gibt nun „var“ als Variable vor. Sie kann beliebig ersetzt werden. Im vorliegenden Fall z.B. durch „m“ für die Steigung und „x“ für die x-Koordinate.



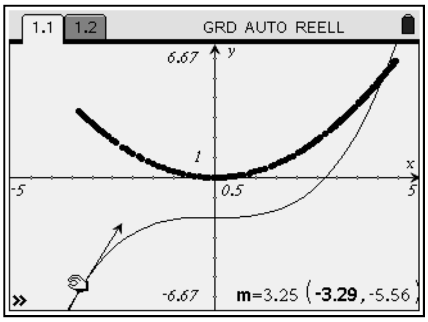
Einrichtung der automatischen Datenerfassung

Um die Inhalte der Variablen x und m beim Bewegen des Punktes entlang des Graphen in einer Tabelle zu speichern, öffne nun ein Lists & Spreadsheet Fenster. Bezeichne die erste Spalte z.B. mit „xwert“ und die zweite Spalte mit „steig“. Aktiviere die Datenerfassung für die erste Spalte, in dem Du in einem beliebigen Feld der ersten Spalte menu 3 2 1 wählst. Es erscheint der Ausdruck „xwert:=capture(var,1)“. Ersetze „var“ durch die entsprechende Variable, hier „x“. (Variablenverweis!). Gehe in der zweiten Spalte für die Steigungen m analog vor.



Veranschaulichung der Ableitungsfunktion

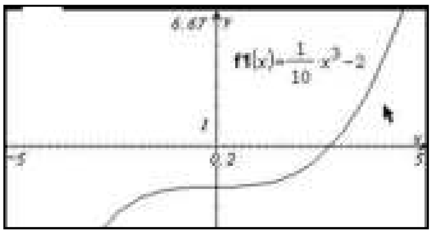
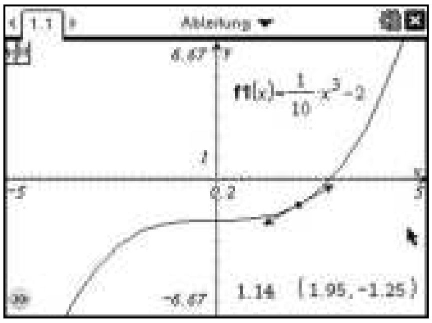
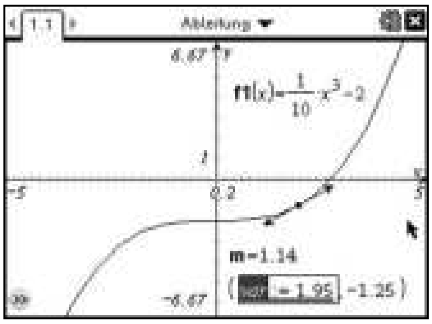
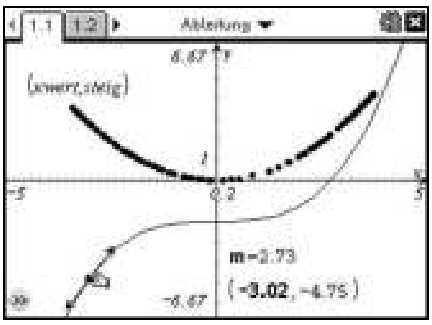
Die so erhaltenen Wertepaare sollen nun zum Schaubild von f gezeichnet werden. Wechsle dazu zurück ins Schaubild und öffne einen Streu-Plot (menu 3 4). Belege x mit „xwert“ und y mit „steig“. Blende die Eingabezeile aus (esc) und greife mit dem Zeiger den Punkt auf dem Graphen (ctrl). Beim Bewegen dieses Punktes entlang des Graphen werden nun die Ableitungen von f in diesen Punkten auf dem Bildschirm angezeigt.
Es entsteht der Graph der Ableitungsfunktion.



Veranschaulichung von Ableitungsfunktionen

Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - 2$. Veranschauliche den Graphen der Ableitungsfunktion f‘, ohne die Ableitungsfunktion zu berechnen.

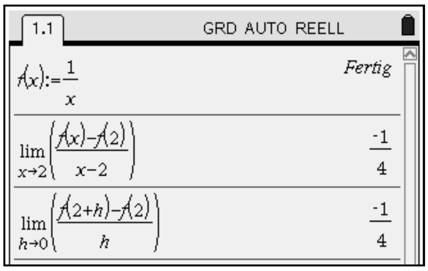
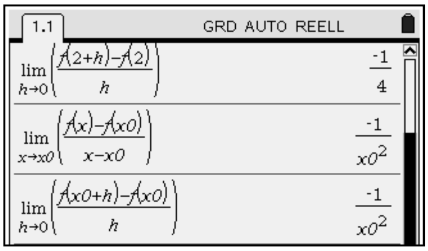
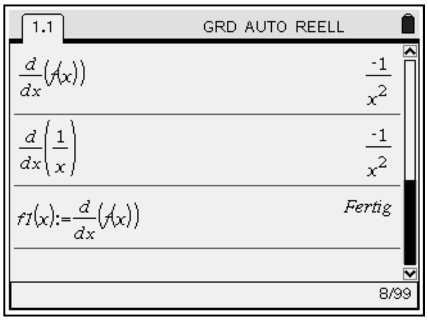
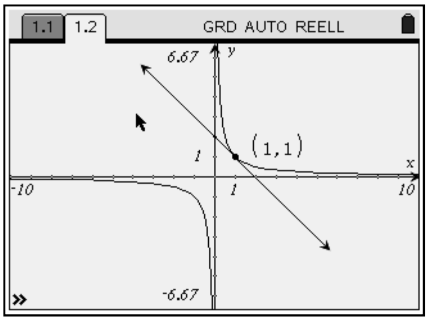
Zeichnen des Graphen von f Öffne ein Graphs Fenster und zeichne den Graphen von f. Wähle die Skalierung der Achsen so, dass die „interessanten“ Bereiche des Graphen gut erkennbar sind.	
Konstruktion einer Tangente und Bestimmung der Tangentensteigung Wähle dazu menu 7 7 und klicke auf einen Punkt des Graphen. Mit menu 8 3 und einem Klick auf die Tangente erscheint die Tangentensteigung. Ein weiterer Klick legt die Position der Anzeige auf dem Bildschirm fest. Um die Koordinaten des Punktes zu bestimmen, in dem die Tangente konstruiert wurde, wählst du menu 1 7, klickst auf den Punkt und fixierst die Anzeige der Koordinaten wiederum durch einen zweiten Klick.	
Zuordnung von Variablen Ziel ist es beim Bewegen des Punktes entlang des Graphen die Tangentensteigung an jeder Stelle x zu erfassen. Dazu müssen der Steigung und der x-Koordinate Variablen zugeordnet werden. Dies geschieht, in dem man den Zeiger über die entsprechende Zahl bewegt, einmal klickt (die Zahl ist nun mit einem grauen Rahmen schwach hinterlegt) und ctrl var wählt. Der Rechner gibt nun „var“ als Variable vor. Sie kann beliebig ersetzt werden. Im vorliegenden Fall z.B. durch „m“ für die Steigung und „x“ für die x-Koordinate.	
Einrichtung der automatischen Datenerfassung Um die Inhalte der Variablen x und m beim Bewegen des Punktes entlang des Graphen in einer Tabelle zu speichern, öffne nun ein Lists & Spreadsheet Fenster. Bezeichne die erste Spalte z.B. mit „xwert“ und die zweite Spalte mit „steig“. Aktiviere die Datenerfassung für die erste Spalte, in dem du in einem beliebigen Feld der ersten Spalte menu 3 2 1 wählst. Es erscheint der Ausdruck „xwert:=capture(var,1)“. Ersetze „var“ durch die entsprechende Variable, hier „x“. (Variablenverweis!). Gehe in der zweiten Spalte für die Steigungen m analog vor.	
Veranschaulichung der Ableitungsfunktion Die so erhaltenen Wertepaare sollen nun zum Schaubild von f gezeichnet werden. Wechsle dazu zurück ins Schaubild und öffne einen Streu-Plot (menu 3 4). Belege x mit „xwert“ und y mit „steig“. Blende die Eingabezeile aus (ctrl G) und greife mit dem Zeiger den Punkt auf dem Graphen (ctrl ☝). Beim Bewegen dieses Punktes entlang des Graphen werden nun die Ableitungen von f in diesen Punkten auf dem Bildschirm angezeigt. Es entsteht der Graph der Ableitungsfunktion.	

Differenzialrechnung

Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

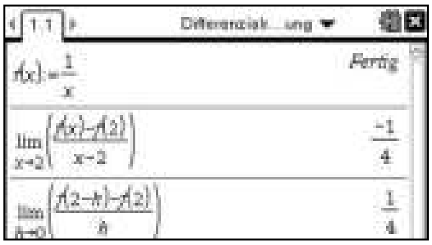
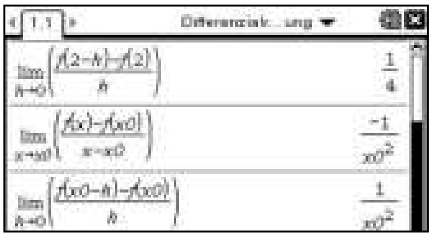
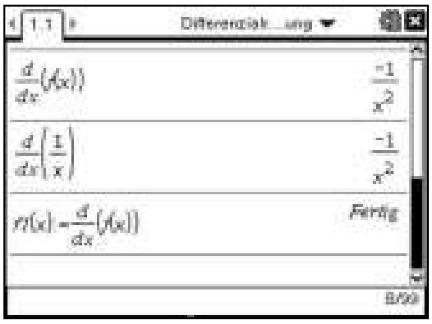
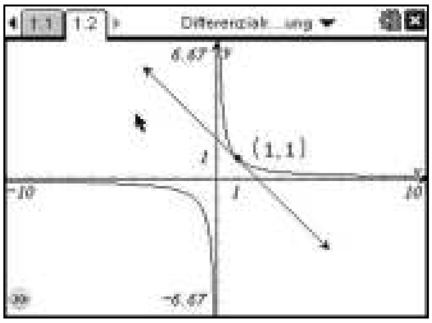
a) Bestimme die Ableitung von f an der Stelle $x = 2$ mit der „x-Methode“ und mit der „h-Methode“.
b) Ermittle die Ableitung von f für ein beliebiges x_0 mit der „x-Methode“ und mit der „h-Methode“.
c) Berechne die Ableitungsfunktion mit Hilfe des Nspire.
d) Zeichne einen Graphen von f und eine Tangente an f im Punkt P (1 I 1).

Ermittlung der Ableitung an einer bestimmten Stelle Definiere die gegebene Funktion. Mit Hilfe der „Limes“-Funktion (menu 4 3) lässt sich die Ableitung an der Stelle $x = 2$ berechnen.	
Ermittlung der Ableitung für ein beliebiges x_0 Die obige Vorgehensweise lässt sich auch von einer konkrete Stelle $x = 2$ auf eine beliebige Stelle x_0 verallgemeinern. Dies lässt sich wie oben mit der Limes-Funktion (menu 4 3) bewerkstelligen.	
Ermittlung der Ableitungsfunktion Der Nspire kann die Ableitungsfunktion f‘ zu einer gegebenen Funktion f angeben, ohne dass der Differenzenquotient eingegeben werden muss. Wähle dazu (menu 4 1) oder alternativ (⇧ −). Anstatt $f'(x)$ verwendet der Rechner die Notation $\frac{d}{dx}f(x)$. In den Ausdruck $\frac{d}{d\blacksquare}$ wird jeweils die Variable der Funktion eingetragen, nach der abgeleitet werden soll (hier „x“; bei f(t) entsprechend „t“). Zur Ermittlung der Ableitungsfunktion kann die Funktionsbezeichnung f(x) oder der Funktionsterm eingegeben werden (s. Abbildung). Die Ableitungsfunktion kann gleich als Funktion definiert werden (um dann später mit dieser weiter zu arbeiten). Dazu eignet sich die Bezeichnung f**1**(x), da es sich um die **erste** Ableitung handelt.	
Zeichnen einer Tangente Öffne eine Graphs & Geometry Anwendung und zeichne den Graphen von f. Lege einen Punkt auf der Kurve fest, in dem Du die Tangente an den Graph zeichnen möchtest (menu 6 2). Durch Doppelklick auf die angezeigte x-Koordinate lässt sich diese exakt eingeben. Aktiviere die Funktion „Tangente“ (menu 6 7) und klicke auf den festgelegten Punkt. Die erhaltene Tangente kann mit ✎ verlängert werden. Der Punkt kann ebenfalls mit ✎ bewegt werden. Die Steigung der Tangente (und jeder beliebigen Geraden) kann mit der Funktion menu 7 3 durch klicken auf die Tangente erhalten werden.	

Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Bestimme die Ableitung von f an der Stelle $x = 2$ mit der „x-Methode“ und mit der „h-Methode“.
b) Ermittle die Ableitung von f für ein beliebiges x_0 mit der „x-Methode“ und mit der „h-Methode“.
c) Berechne die Ableitungsfunktion mit Hilfe des Nspire.
d) Zeichne einen Graphen von f und eine Tangente an f im Punkt P (1 I 1).

Ermittlung der Ableitung an einer bestimmten Stelle Definiere die gegebene Funktion. Mit Hilfe der „Limes“-Funktion (menu ④③) lässt sich die Ableitung an der Stelle $x = 2$ berechnen.	
Ermittlung der Ableitung für ein beliebiges x_0 Die obige Vorgehensweise lässt sich auch von einer konkrete Stelle $x = 2$ auf eine beliebige Stelle x_0 verallgemeinern. Dies lässt sich wie oben mit der Limes-Funktion (menu ④③) bewerkstelligen.	
Ermittlung der Ableitungsfunktion Der Nspire kann die Ableitungsfunktion f‘ zu einer gegebenen Funktion f angeben, ohne dass der Differenzenquotient eingegeben werden muss. Wähle dazu menu ④①. Anstatt $f'(x)$ verwendet der Rechner die Notation $\frac{d}{dx}f(x)$. In den Ausdruck $\frac{d}{d\blacksquare}$ wird jeweils die Variable der Funktion eingetragen, nach der abgeleitet werden soll (hier „x“; bei f(t) entsprechend „t“). Zur Ermittlung der Ableitungsfunktion kann die Funktionsbezeichnung f(x) oder der Funktionsterm eingegeben werden (s. Abbildung). Die Ableitungsfunktion kann gleich als Funktion definiert werden (um dann später mit dieser weiter zu arbeiten). Dazu eignet sich die Bezeichnung f**1**(x), da es sich um die **erste** Ableitung handelt.	
Zeichnen einer Tangente Öffne eine Graphs Anwendung und zeichne den Graphen von f. Lege einen Punkt auf der Kurve fest, in dem Du die Tangente an den Graph zeichnen möchtest (menu ⑦②). Durch Doppelklick auf die angezeigte x-Koordinate lässt sich diese exakt eingeben. Aktiviere die Funktion „Tangente“ (menu ⑦⑦) und klicke auf den festgelegten Punkt. Die erhaltene Tangente kann mit ✍ verlängert werden. Der Punkt kann ebenfalls mit ✍ bewegt werden. Die Steigung der Tangente (und jeder beliebigen Geraden) kann mit der Funktion menu ⑧③ durch klicken auf die Tangente erhalten werden.	

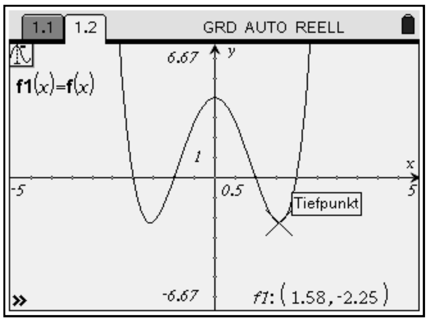
Charakteristische Punkte eines Graphen

Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
Untersuche den Graph von f auf gemeinsame Punkte mit den Achsen, auf Extrempunkte und auf Achsensymmetrie zur y-Achse, bzw. Punktsymmetrie zum Ursprung.

Graphische Bestimmung charakteristischer Punkte

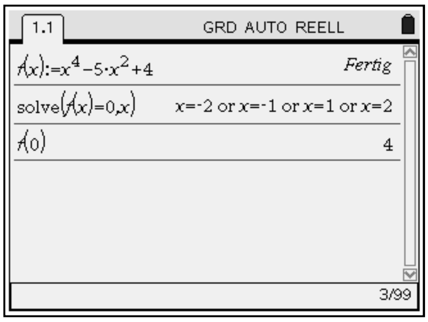
Um sich einen Überblick über den Graphen von f zu verschaffen, kann der Term von f entweder direkt in Graphs & Geometry oder wie abgebildet (siehe unten) durch Definition von f im Calculator eingegeben werden.
Fährt man mit der Spurfunktion (menu 5 1) entlang des Graphen von f, so werden gemeinsame Punkte mit der x-Achse und Extrempunkte angezeigt. Die Koordinaten lassen sich so (näherungsweise) unten rechts ablesen.



Berechnung der gemeinsamen Punkte mit den Achsen

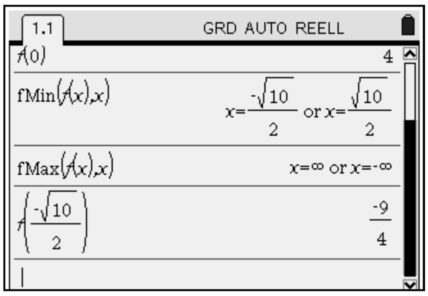
Um die Nullstellen von f zu erhalten, gilt es die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen.
Dazu wird die obige Gleichung mit dem solve-Befehl (menu 3 1) gelöst.

Um den gemeinsamen Punkt mit der y-Achse zu erhalten, muss der Funktionswert von f an der Stelle $x = 0$, d.h. $f(0)$ berechnet werden.



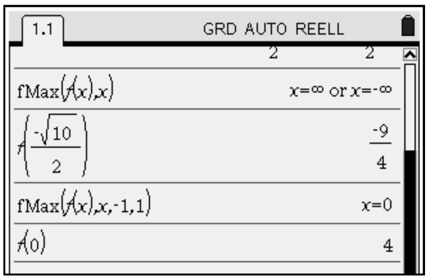
Bestimmung globaler Minimum- und Maximumstellen

Globale Minimumstellen und globale Maximumstellen werden mit Hilfe von „fMin“ (menu 4 6)und „fMax“ (menu 4 7) bestimmt. (Notation des Befehls: s. Abbildung)
Da im Beispiel keine globalen Maximumstellen existieren, gibt der Rechner $x = -\infty$ und $x = +\infty$ aus.
Um die y-Koordinaten der Tiefpunkte zu erhalten, muss die Funktion noch an den entsprechenden Stellen ausgewertet werden.



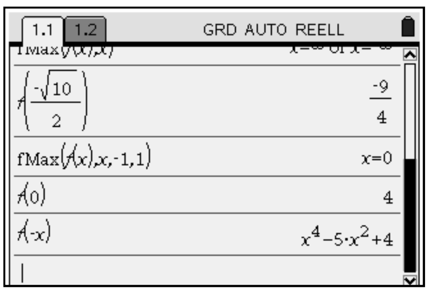
Bestimmung lokaler Minimum- und Maximumstellen

Hierzu werden wiederum „fMin“ (menu 4 6)und „fMax“ (menu 4 7) verwendet, allerdings muss noch angegeben werden, in welchem Intervall die Stelle liegt (dazu den Graph zeichnen und das Intervall dort abschätzen).
Für die Notation gilt:
$fMax(Ausdruck, Variable, untere\ Grenze, obere\ Grenze)$
Analog für fMin.



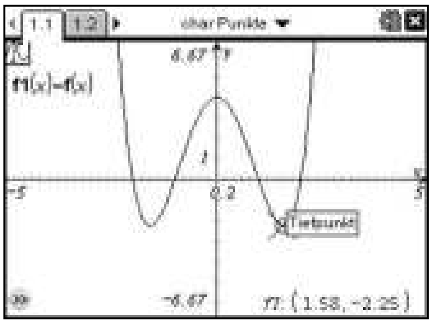
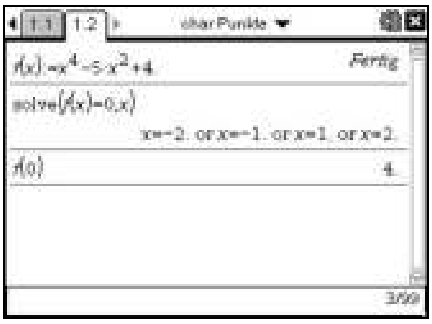
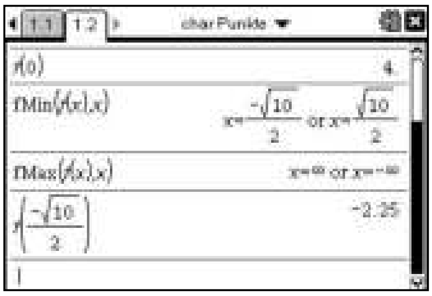
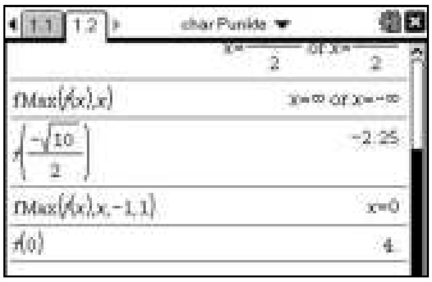
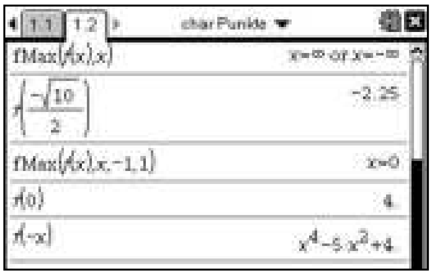
Symmetrie

Ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, so gilt:
$f(-x) = f(x)$.
Ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung, so gilt:
$f(-x) = -f(x)$.
Diese Bedingungen können einfach nachgeprüft werden, in dem man den Rechner f(-x) berechnen lässt.
Im vorliegenden Beispiel ist so die Achsensymmetrie zur y-Achse gezeigt.



Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
Untersuche den Graph von f auf gemeinsame Punkte mit den Achsen, auf Extrempunkte und auf Achsensymmetrie zur y-Achse, bzw. Punktsymmetrie zum Ursprung.

Graphische Bestimmung charakteristischer Punkte Um sich einen Überblick über den Graphen von f zu verschaffen, kann der Term von f entweder direkt in Graphs oder wie abgebildet (siehe unten) durch Definition von f im Calculator eingegeben werden. Fährt man mit der Spurfunktion ((menu)(5)(1)) entlang des Graphen von f, so werden gemeinsame Punkte mit der x-Achse und Extrempunkte angezeigt. Die Koordinaten lassen sich so (näherungsweise) unten rechts ablesen.	
Berechnung der gemeinsamen Punkte mit den Achsen Um die Nullstellen von f zu erhalten, gilt es die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen. Dazu wird die obige Gleichung mit dem solve-Befehl ((menu)(3)(1)) gelöst. Um den gemeinsamen Punkt mit der y-Achse zu erhalten, muss der Funktionswert von f an der Stelle $x = 0$, d.h. $f(0)$ berechnet werden.	
Bestimmung globaler Minimum- und Maximumstellen Globale Minimumstellen und globale Maximumstellen werden mit Hilfe von „fMin“ ((menu)(4)(7))und „fMax“ ((menu)(4)(8)) bestimmt. (Notation des Befehls: s. Abbildung) Da im Beispiel keine globalen Maximumstellen existieren, gibt der Rechner $x = -\infty$ und $x = +\infty$ aus. Um die y-Koordinaten der Tiefpunkte zu erhalten, muss die Funktion noch an den entsprechenden Stellen ausgewertet werden.	
Bestimmung lokaler Minimum- und Maximumstellen Hierzu werden wiederum „fMin“ ((menu)(4)(7))und „fMax“ ((menu)(4)(8)) verwendet, allerdings muss noch angegeben werden, in welchem Intervall die Stelle liegt (dazu den Graph zeichnen und das Intervall dort abschätzen). Für die Notation gilt: $fMax(Ausdruck, Variable, untere\ Grenze, obere\ Grenze)$ Analog für fMin.	
Symmetrie Ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, so gilt: $f(-x) = f(x)$. Ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung, so gilt: $f(-x) = -f(x)$. Diese Bedingungen können einfach nachgeprüft werden, in dem man den Rechner f(-x) berechnen lässt. Im vorliegenden Beispiel ist so die Achsensymmetrie zur y-Achse gezeigt.	

Extrem- und Wendestellen

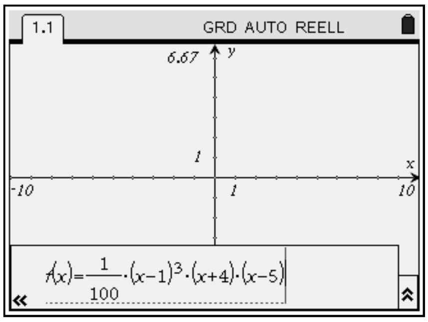
Aufgabe

Berechne die Extrem- und Wendestellen der Funktion f mit

$f(x) = \frac{1}{100} \cdot (x-1)^3 \cdot (x+4) \cdot (x-5)$

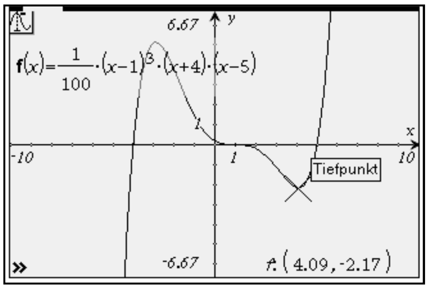
Definition der Funktion f

Wenn bei der Lösung eines Problems nicht nur die Funktion f, sondern auch Ableitungsfunktionen f‘, f‘‘, … eine Rolle spielen, ist es sinnvoll die Funktion f als $f(x)$, die erste Ableitung als $f1(x)$, die zweite Ableitung als $f2(x)$, … zu definieren. Um dieselben Definitionen auch in Graphs & Geometry benutzen zu können (sollten die Graphen der Funktionen wichtig sein), ist folgende Vorgehensweise zu empfehlen:
Definiere die Funktion zuerst in Graphs & Geometry indem Du die Eingabezeile „$f1(x) =$“ abänderst in „$f(x) =$“ und dort die Funktion eingibst. Auf diese Weise steht die Eingabezeile „$f1(x) =$“ für den Graphen der ersten Ableitungsfunktion zur Verfügung.



Näherungsweise Bestimmung von Extremstellen

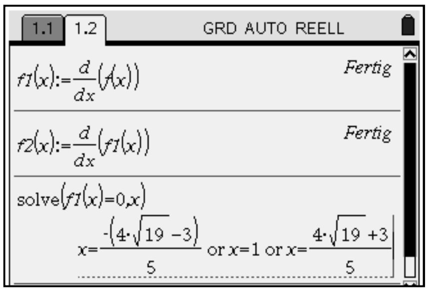
Fährt man mit der Spurfunktion (menu 5 1) entlang des Graphen von f, so werden gemeinsame Punkte mit der x-Achse und Extrempunkte angezeigt. Die Koordinaten lassen sich so (näherungsweise) unten rechts ablesen.
Wendestellen werden nicht angezeigt.

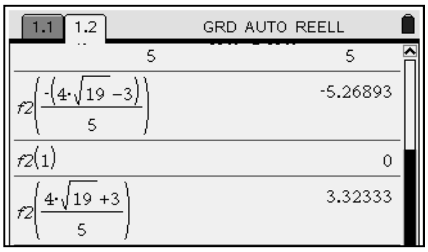


Berechnung von Extremstellen

Neben der Verwendung von fmin und fmax (siehe Charakteristische Punkte eines Graphen) ist auch die „klassische“ Berechnung von Extremstellen problemlos möglich.
Definiere dazu im Calculator mit Hilfe von menu 4 1 oder CAPS ⇧ – die erste und die zweite Ableitungsfunktion. Lösen der Gleichung $f1(x) = 0$ liefert mögliche Extremstellen.

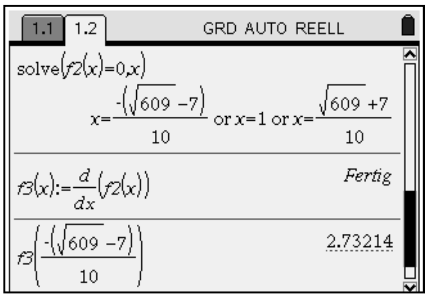
Einsetzen in die zweite Ableitung gibt Auskunft darüber, ob es sich um eine Extremstelle handelt oder nicht. Die „komplizierten“ Lösungen für x müssen nicht erneut eingetippt werden, sondern können oben markiert werden (mit CAPS ⇧ und den Pfeiltasten) und durch drücken von enter in die aktuelle Zeile kopiert werden. Ein Näherungswert als Ergebnis (ctrl enter) ist hier ausreichend und evtl. schneller zu interpretieren.





Berechnung von Wendestellen

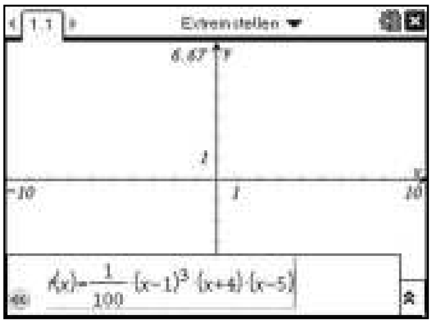
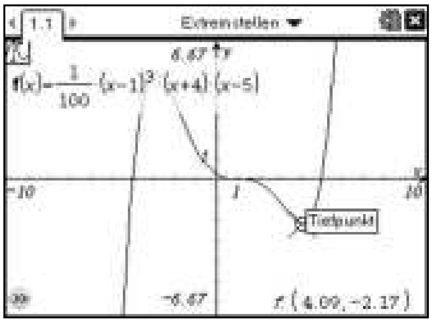
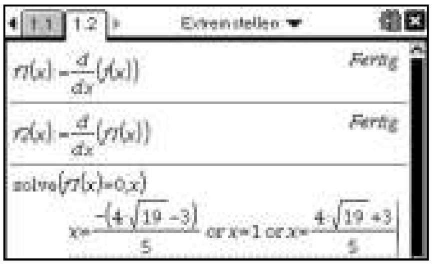
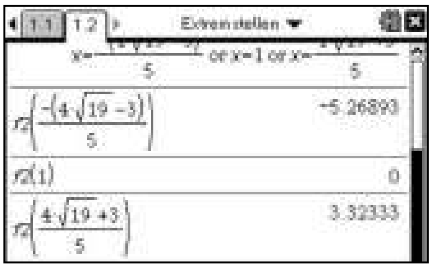
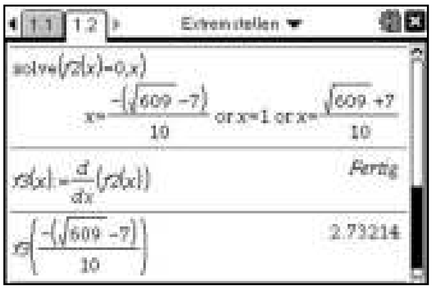
Es gilt die Gleichung $f2(x) = 0$ zu lösen und mit Hilfe von $f3(x)$ zu untersuchen, ob es sich um eine Wendestelle handelt.



Aufgabe

Berechne die Extrem- und Wendestellen der Funktion f mit

$f(x) = \frac{1}{100} \cdot (x-1)^3 \cdot (x+4) \cdot (x-5)$

Definition der Funktion f Wenn bei der Lösung eines Problems nicht nur die Funktion f, sondern auch Ableitungsfunktionen f‘, f‘‘, … eine Rolle spielen, ist es sinnvoll die Funktion f als $f(x)$, die erste Ableitung als $f1(x)$, die zweite Ableitung als $f2(x)$, … zu definieren. Um dieselben Definitionen auch in Graphs benutzen zu können (sollten die Graphen der Funktionen wichtig sein), ist folgende Vorgehensweise zu empfehlen: Definiere die Funktion zuerst in Graphs indem Du die Eingabezeile „$f1(x) =$“ abänderst in „$f(x) =$“ und dort die Funktion eingibst. Auf diese Weise steht die Eingabezeile „$f1(x) =$“ für den Graphen der ersten Ableitungsfunktion zur Verfügung.	
Näherungsweise Bestimmung von Extremstellen Fährt man mit der Spurfunktion (menu 5 1) entlang des Graphen von f, so werden gemeinsame Punkte mit der x-Achse und Extrempunkte angezeigt. Die Koordinaten lassen sich so (näherungsweise) unten rechts ablesen. Wendestellen werden nicht angezeigt.	
Berechnung von Extremstellen Neben der Verwendung von fmin und fmax (siehe Charakteristische Punkte eines Graphen) ist auch die „klassische“ Berechnung von Extremstellen problemlos möglich. Definiere dazu im Calculator mit Hilfe von menu 4 1 die erste und die zweite Ableitungsfunktion. Lösen der Gleichung $f1(x) = 0$ liefert mögliche Extremstellen. Einsetzen in die zweite Ableitung gibt Auskunft darüber, ob es sich um eine Extremstelle handelt oder nicht. Die „komplizierten“ Lösungen für x müssen nicht erneut eingetippt werden, sondern können oben markiert werden (mit shift und den Pfeiltasten) und durch drücken von enter in die aktuelle Zeile kopiert werden. Ein Näherungswert als Ergebnis (ctrl enter) ist hier ausreichend und evtl. schneller zu interpretieren.	
Berechnung von Wendestellen Es gilt die Gleichung $f2(x) = 0$ zu lösen und mit Hilfe von $f3(x)$ zu untersuchen, ob es sich um eine Wendestelle handelt.	

Darstellung von abschnittsweise definierten Funktionen

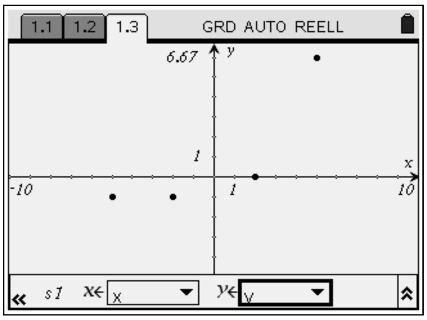
Aufgabe

Die Funktionswerte der Tabelle legen einen Streckenzug im Koordinatensystem fest. Zeichne diesen Streckenzug und bestimme die Funktionsgleichung der so zwischen -5 und 5 definierten Funktion.

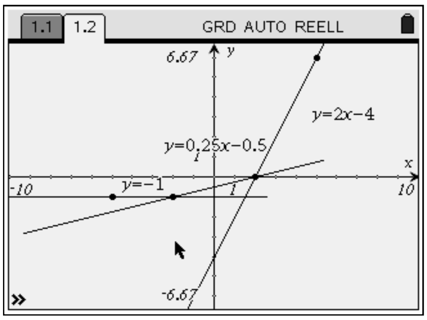
x	-5	-2	2	5
$f(x)$	-1	-1	0	6

Bestimmung der Funktionsgleichungen der einzelnen Funktionsabschnitte

Erstelle in Lists & Spreadsheet eine Tabelle in die Du die Werte einträgst (Bezeichne Spalte A mit x und Spalte B mit y).
Öffne dann ein Graphs & Geometry Fenster und zeichne einen Streuplot (menu 3 4) dieser Daten.



Konstruiere eine Gerade durch benachbarte Punkte (menu 6 4) und lasse dir die zugehörigen Geradengleichungen anzeigen, in dem Du menu 1 7 wählst und die Geraden anklickst. Ein zweiter Klick irgendwo auf dem Bildschirm fixiert dort die Anzeige der Funktionsvorschrift.

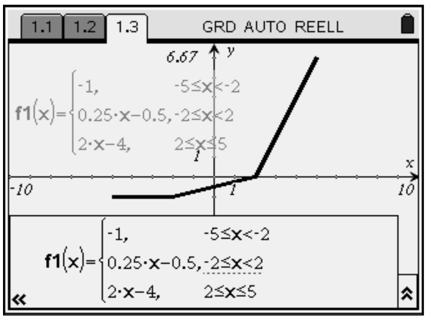


Darstellung von abschnittsweise definierten Funktionen

Die Funktion, die den vorliegenden Streckenzug zwischen -5 und 5 beschreibt, besitzt in drei Intervallen unterschiedliche Funktionsgleichungen.

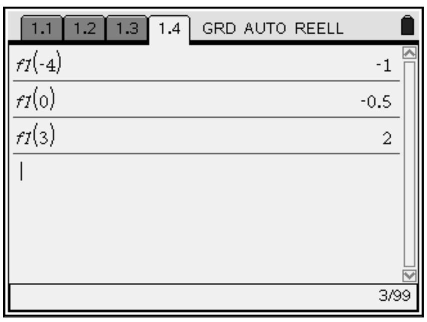
$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -5 \le x < -2 \\ 0{,}25x - 0{,}5 & , -2 \le x < 2 \\ 2x - 4 & , \ 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

Man kann diese abschnittsweise definierte Funktion in den Rechner eingeben und deren Graph zeichnen lassen.
Öffne dazu ein neues Graphs & Geometry Fenster. Wechsle in die Eingabezeile und öffne mit ctrl ein Auswahlmenü. Wähle in der oberen Reihe das dritte Symbol von rechts und wähle danach die Anzahl der Funktionsstücke (hier 3) aus. Nun kann die Funktion in obiger Darstellung eingegeben werden (≤ erhältst Du, in dem Du < = nacheinander schreibst).



Arbeiten mit abschnittsweise definierten Funktionen

Der Graph der abschnittsweise definierten Funktion kann z.B. mit der Spurfunktion untersucht werden wie jeder andere Graph auch.
Außerdem können im Calculator beliebige Funktionswerte von f bestimmt werden. Der Rechner verwendet automatisch die Funktionsgleichung für das entsprechende Intervall.



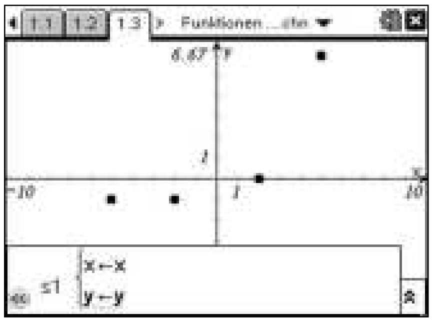
Aufgabe

Die Funktionswerte der Tabelle legen einen Streckenzug im Koordinatensystem fest. Zeichne diesen Streckenzug und bestimme die Funktionsgleichung der so zwischen -5 und 5 definierten Funktion.

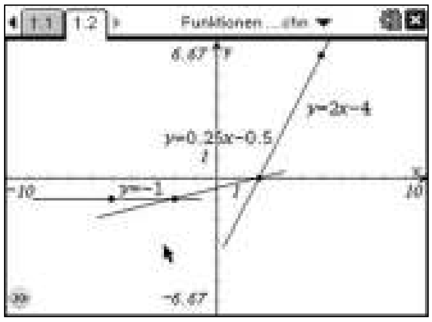
x	-5	-2	2	5
$f(x)$	-1	-1	0	6

Bestimmung der Funktionsgleichungen der einzelnen Funktionsabschnitte

Erstelle in Lists & Spreadsheet eine Tabelle in die Du die Werte einträgst
(Bezeichne Spalte A mit x und Spalte B mit y).
Öffne dann ein Graphs Fenster und zeichne einen Streudiagramm (menu 3 4) dieser Daten.



Konstruiere eine Gerade durch benachbarte Punkte (menu 7 4) und lasse dir die zugehörigen Geradengleichungen anzeigen, in dem Du menu 1 7 wählst und die Geraden anklickst. Ein zweiter Klick irgendwo auf dem Bildschirm fixiert dort die Anzeige der Funktionsvorschrift.

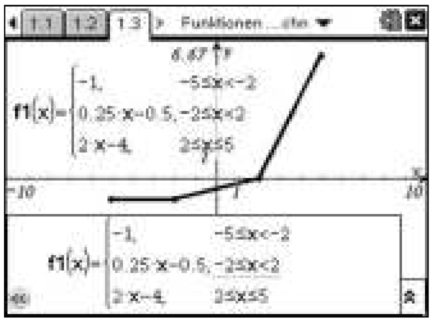


Darstellung von abschnittsweise definierten Funktionen

Die Funktion, die den vorliegenden Streckenzug zwischen -5 und 5 beschreibt, besitzt in drei Intervallen unterschiedliche Funktionsgleichungen.

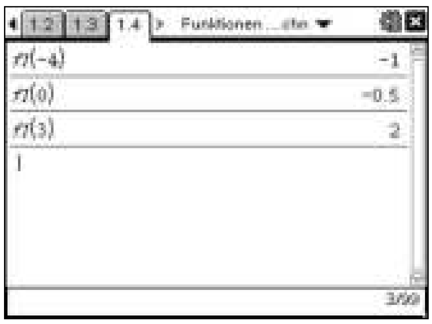
$$f(x)=\begin{cases}-1 & ,-5\le x<-2\\ 0{,}25x-0{,}5 & ,-2\le x<2\\ 2x-4 & ,\ 2\le x\le 5\end{cases}$$

Man kann diese abschnittsweise definierte Funktion in den Rechner eingeben und deren Graph zeichnen lassen.
Öffne dazu ein neues Graphs Fenster. Wechsle in die Eingabezeile und öffne mit ein Auswahlmenü. Wähle in der oberen Reihe das dritte Symbol von rechts und wähle danach die Anzahl der Funktionsstücke (hier 3) aus.
Nun kann die Funktion in obiger Darstellung eingegeben werden (< und ≤ findest Du unter ctrl =).



Arbeiten mit abschnittsweise definierten Funktionen

Der Graph der abschnittsweise definierten Funktion kann z.B. mit der Spurfunktion untersucht werden wie jeder andere Graph auch.
Außerdem können im Calculator beliebige Funktionswerte von f bestimmt werden. Der Rechner verwendet automatisch die Funktionsgleichung für das entsprechende Intervall.

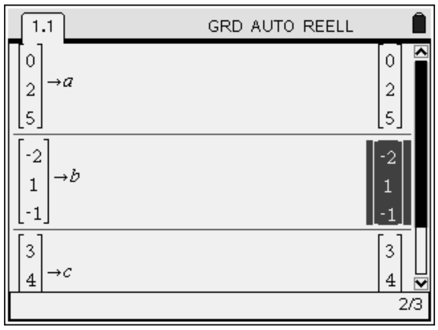
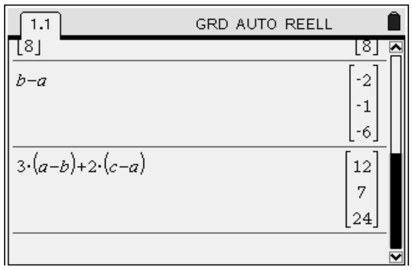
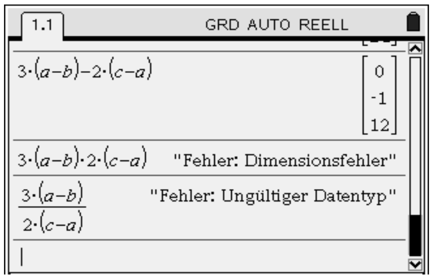
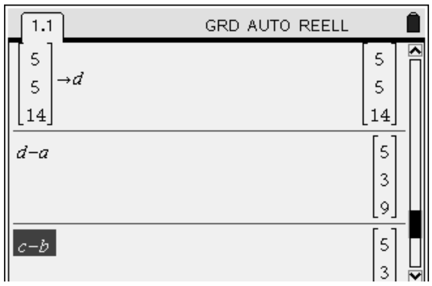
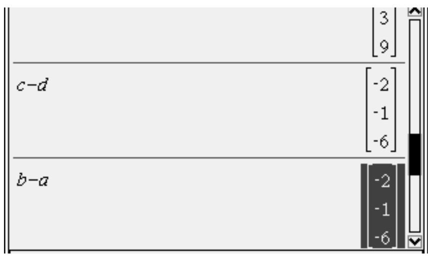


Rechnen mit Vektoren

Aufgabe

a) Gegeben sind die Punkte A(0|2|5), B(–2|1|–1) und C(3|4|8).
Bestimme die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $3 \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}$ und $3 \cdot \overrightarrow{BA} - 2 \cdot \overrightarrow{AC}$.
Welche Rechenoperationen sind bei Vektoren erlaubt?

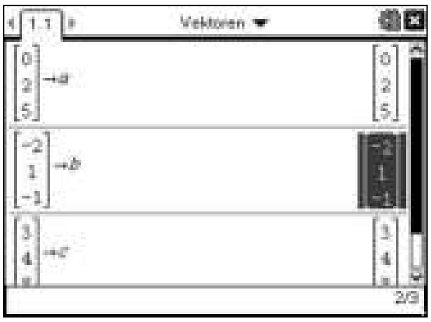
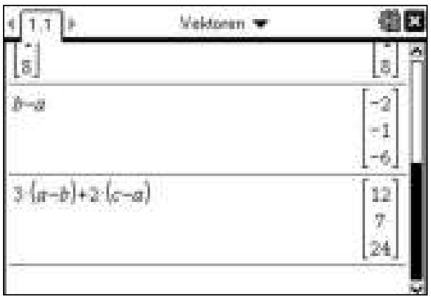
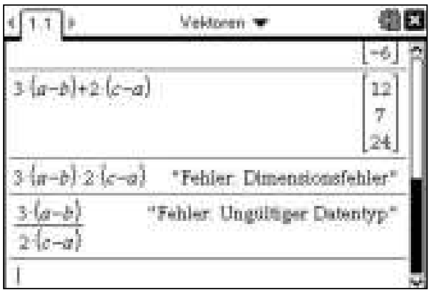
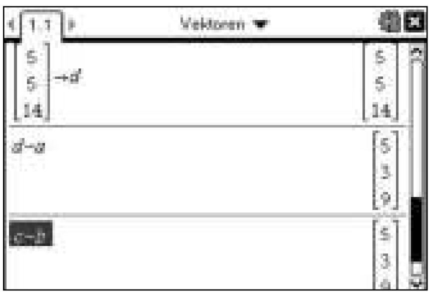
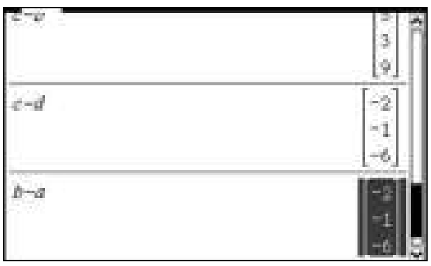
b) Prüfe, ob D(5| 5| 14) Eckpunkt eines Parallelogramms aus den vier Punkten A, B, C und D ist.

Eingabe und Abspeichern von Ortsvektoren a) Zunächst gibt man die Ortsvektoren als Spaltenvektoren ein: ctrl (und für jeden Zeilenwechsel ↵. Dann speichert man diesen mit Hilfe von ctrl sto→ var unter dem gewünschten Namen ab.	
a) Rechnen mit Vektoren Die gesuchten Vektoren lassen sich aus den eingegebenen Ortsvektoren berechnen: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$, $\mathbf{3 \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \left(\overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}\right) + \ 2 \cdot \left(\overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0A}\right)}$ **bzw.** $\mathbf{3 \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \left(\overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}\right) - \ 2 \cdot \left(\overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0A}\right)}$**.** Bei der Multiplikation von Vektoren erscheint eine Fehlermeldung. Es handelt dabei um einen „Dimensionsfehler“ bzw. einen „ungültigen Datentyp“. Man kann Vektoren also addieren, subtrahieren, Vielfache davon bilden, aber nicht multiplizieren oder dividieren.	
b) Ist D Eckpunkt eines Parallelogramms ABCD Will man nachprüfen, ob der Punkt D zusammen mit den anderen Punkten ein Parallelogramm ABCD bildet, speichert man den Ortsvektor von D ab und vergleicht anschließend die Vektoren $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$ oder $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$. *Ergebnis: D ist ein Eckpunkt des Parallelogramms ABCD.*	

Aufgabe

a) Gegeben sind die Punkte A(0|2|5), B(–2|1|–1) und C(3|4|8).
Bestimme die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $3 \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}$ und $3 \cdot \overrightarrow{BA} - 2 \cdot \overrightarrow{AC}$.
Welche Rechenoperationen sind bei Vektoren erlaubt?

b) Prüfe, ob D(5/ 5/ 14) Eckpunkt eines Parallelogramms aus den vier Punkten A, B, C und D ist.

Eingabe und Abspeichern von Ortsvektoren Zunächst gibt man die Ortsvektoren als Spaltenvektoren ein: ctrl (und für jeden Zeilenwechsel ↵. Dann speichert man diesen mit Hilfe von ctrl var unter dem gewünschten Namen ab.	
Rechnen mit Vektoren Die gesuchten Vektoren lassen sich aus den eingegebenen Ortsvektoren berechnen: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0B}} - \overrightarrow{\boldsymbol{0A}}$, $\mathbf{3} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} + \mathbf{2} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \mathbf{3} \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{0B}} - \overrightarrow{\boldsymbol{0A}}\right) + \mathbf{2} \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{0C}} - \overrightarrow{\boldsymbol{0A}}\right)$ **bzw.** $\mathbf{3} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} + \mathbf{2} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \mathbf{3} \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{0B}} - \overrightarrow{\boldsymbol{0A}}\right) - \mathbf{2} \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{0C}} - \overrightarrow{\boldsymbol{0A}}\right)$ **.** Bei der Multiplikation von Vektoren erscheint eine Fehlermeldung. Es handelt dabei um einen „Dimensionsfehler“ bzw. einen „ungültigen Datentyp“. Man kann Vektoren also addieren, subtrahieren, Vielfache davon bilden, aber nicht multiplizieren oder dividieren.	 
b) Ist D Eckpunkt eines Parallelogramms ABCD Will man nachprüfen, ob der Punkt D zusammen mit den anderen Punkten ein Parallelogramm ABCD bildet, speichert man den Ortsvektor von D ab und vergleicht anschließend die Vektoren $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$ oder $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$. *Ergebnis: D ist ein Eckpunkt des Parallelogramms ABCD.*	 

Geraden im Raum

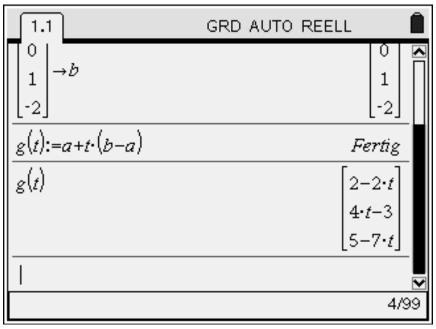
Aufgabe

a) Die Punkte A(2/–3/ 5) und B(0/ 1/–2) liegen auf der Geraden g. Bestimme eine Gleichung von g.
b) Prüfe, ob C(5/ 1/ 14) auf der Geraden g liegt. Gib drei weitere Punkte P, Q und R an, die auf g liegen.
c) Bestimme den Punkt auf g, der in der x_1x_2-Ebene liegt.

a) Definieren einer Geraden

Zunächst gibt man die Ortsvektoren von A und B als Spaltenvektoren ein und speichert sie ab (ctrl (und für jeden Zeilenwechsel ↵; Abspeichern mit ctrl sto→var).
Die Gerade g definiert man als „vektorwertige“ Funktion.

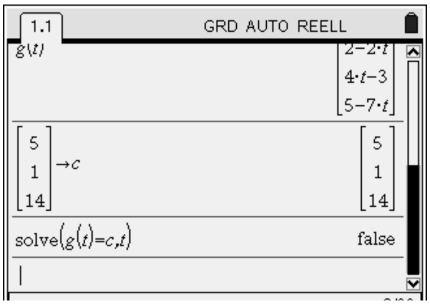
Im Beispiel ergibt sich also $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.



b) Punktprobe

Eine Möglichkeit für die Punktprobe mit dem Punkt C besteht darin, den Ortsvektor von C abzuspeichern und die Lösbarkeit der Gleichung g(t) = $\overrightarrow{0C}$ zu überprüfen (solve: menu 3 1).

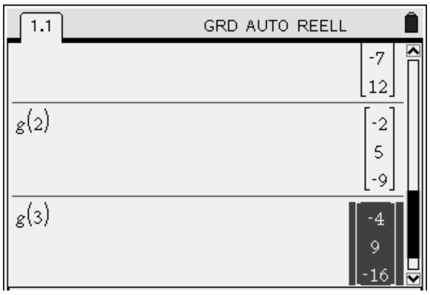
Ergebnis: C liegt nicht auf g.



Weitere Punkte auf der Geraden

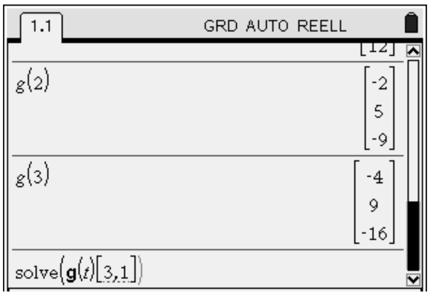
Um drei weitere beliebige Punkte auf g zu bestimmen, berechnet man g an drei Stellen für $t \notin \{0; 1\}$.

So ergibt sich z.B.
für t = -1 der Punkt P(4|-7| 12),
für t = 2 der Punkt Q(-2| 5|-9) und
für t = 3 der Punkt R(-4| 9|-16).



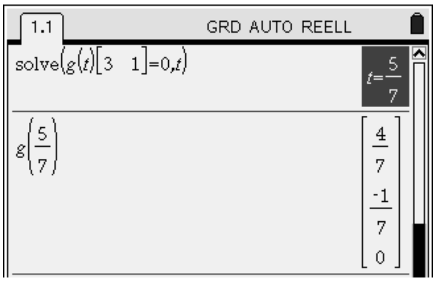
c) Bestimmung eines Punktes der x_1x_2 - Ebene

Um eine Koordinate eines Vektors anzuzeigen, gibt man hinter dem Vektor in [ ] – Klammern und durch Komma getrennt die Zeile und dann die Spalte der auszuwertenden Stelle ein.



Ein Vektor besteht immer nur aus einer Spalte, sodass die zweite Zahl stets eine 1 ist.
Im Beispiel ist die x_3-Koordinate eines Punktes von g bekannt (= 0). Daraus kann die Stelle t ermittelt werden.

Der gesuchte Punkt auf g in der x_1x_2-Ebene hat die Koordinaten $\left(\frac{4}{7} \mid -\frac{1}{7} \mid 0\right)$.



Aufgabe

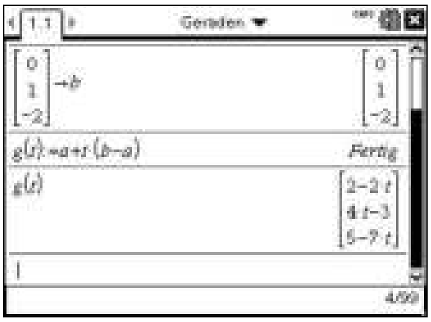
a) Die Punkte A(2/–3/ 5) und B(0/ 1/–2) liegen auf der Geraden g. Bestimme eine Gleichung von g.
b) Prüfe, ob C(5/ 1/ 14) auf der Geraden g liegt. Gib drei weitere Punkte P, Q und R an, die auf g liegen.
c) Bestimme den Punkt auf g, der in der x_1x_2-Ebene liegt.

a) Definieren einer Geraden

Zunächst gibt man die Ortsvektoren von A und B als Spaltenvektoren ein und speichert sie ab (ctrl (und für jeden Zeilenwechsel ↵; Abspeichern mit ctrl var).
Die Gerade g definiert man als „vektorwertige“ Funktion.

Im Beispiel ergibt sich also $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

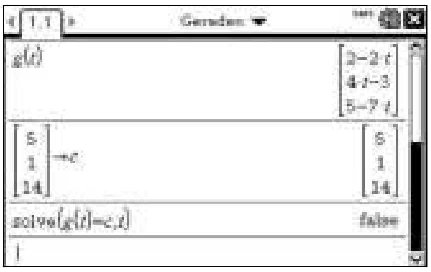
.



b) Punktprobe

Eine Möglichkeit für die Punktprobe mit dem Punkt C besteht darin, den Ortsvektor von C abzuspeichern und die Lösbarkeit der Gleichung g(t) = $\overrightarrow{0C}$ zu überprüfen (solve: menu 3 1).

Ergebnis: C liegt nicht auf g.



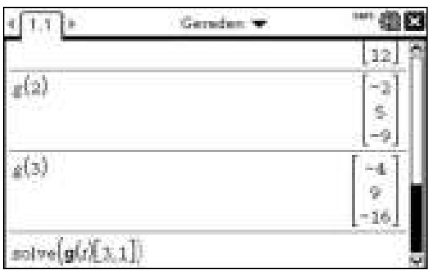
Weitere Punkte auf der Geraden

Um drei weitere beliebige Punkte auf g zu bestimmen, berechnet man g an drei Stellen für $t \notin \{0; 1\}$.

So ergibt sich z.B.
für t = -1 der Punkt P(4|-7| 12),
für t = 2 der Punkt Q(-2| 5|-9) und
für t = 3 der Punkt R(-4| 9|-16).

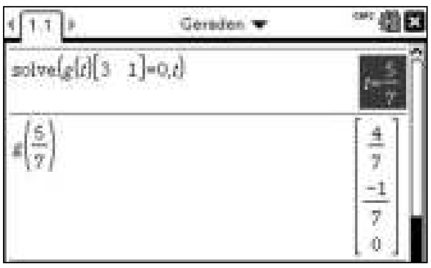
c) Bestimmung eines Punktes der x_1x_2 - Ebene

Um eine Koordinate eines Vektors anzuzeigen, gibt man hinter dem Vektor in [ ] – Klammern und durch Komma getrennt die Zeile und dann die Spalte der auszuwertenden Stelle ein.



Ein Vektor besteht immer nur aus einer Spalte, sodass die zweite Zahl stets eine 1 ist.
Im Beispiel ist die x_3-Koordinate eines Punktes von g bekannt (= 0). Daraus kann die Stelle t ermittelt werden.

Der gesuchte Punkt auf g in der x_1x_2-Ebene hat die Koordinaten $\left(\frac{4}{7} \mid -\frac{1}{7} \mid 0\right)$.



Aufgabe

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

a) $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$ und $h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$

b) $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$ und $i: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-6\\2\\9\end{pmatrix}$

c) $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$ und $j: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-4\\-10\\4\end{pmatrix}$

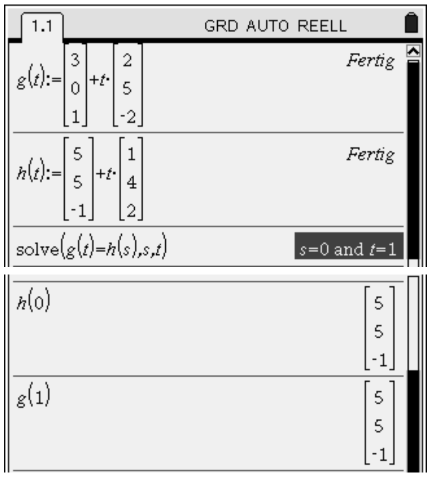
d) $l: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix}$ und $k: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\10\\-3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}8\\20\\-8\end{pmatrix}$

a) Definieren von Geradengleichungen

Da die Gerade g bei mehreren Teilaufgaben verwendet wird, lohnt sich hier ein „Abspeichern“ der Gleichung.
(Vektoren: ctrl (und ↵)
Möchte man die entsprechenden Vektorgleichungen lösen, so muss man berücksichtigen, dass jede Gerade in Abhängigkeit eines anderen Parameters dargestellt wird bzw. dies beim Lösen der Vektorgleichung berücksichtigt wird. (solve: menu 3 1).

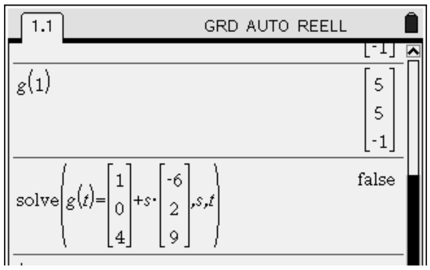
Ergebnis: die Gleichung hat eine einzige Lösung für s bzw. t. Setzt man s = 0 oder t = 1 in die Geradengleichungen von h bzw. g ein, so erhält man den

Schnittpunkt der Geraden g und h: S(5/ 5/ -1).



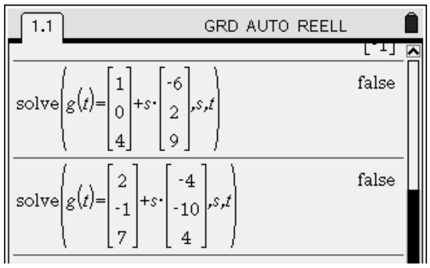
b) Lösen von Vektorgleichungen

Man kann im „solve“-Befehl die Vektorgleichung auch direkt eingeben.
Ergebnis: Der Nspire liefert als Lösung für s und t „false“, d.h. die Gleichung besitzt keine Lösung. Die Geraden haben also keinen gemeinsamen Punkt.
Vergleicht man die Richtungsvektoren der Geraden g und i, sieht man, dass diese nicht zueinander parallel sind.
Die Geraden sind also windschief.



c) Parallele Geraden

Auch hier liefert die Vektorgleichung keine Lösung, die Geraden haben also keinen Schnittpunkt.
Ergebnis: Vergleicht man die Richtungsvektoren der Geraden g und j, so sieht man, dass diese zueinander parallel sind.
Die Geraden sind also parallel.

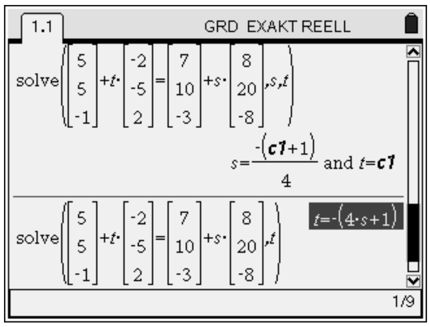


d) Identische Geraden

Ergebnis: Die Gleichung hat für jedes s und t unendlich viele Lösungen (Platzhalter *c1*); der Zusammenhang von s und t wird angezeigt, wenn im solve-Befehl nur eine Variable angeführt wird.

Die Geraden l und k haben unendlich viele Punkte gemeinsam. Sie sind also identisch.

Tipp: Wird die Parameterdarstellung einer Geraden nicht weiter verwendet, empfiehlt sich die direkte Eingabe.



Aufgabe
Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

a) $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$

b) $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$ und $i\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\\9\end{pmatrix}$

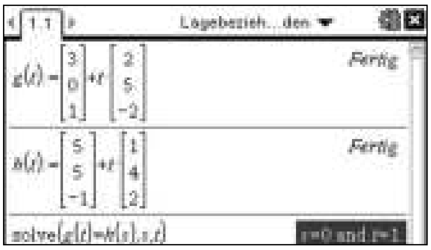
c) $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$ und $j\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\-10\\4\end{pmatrix}$

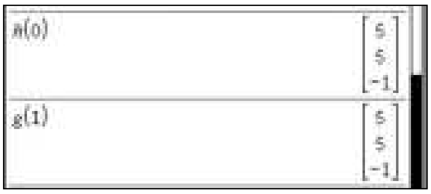
d) $l\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix}$ und $k\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\10\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}8\\20\\-8\end{pmatrix}$

a) Definieren von Geradengleichungen

Da die Gerade g bei mehreren Teilaufgaben verwendet wird, lohnt sich hier ein „Abspeichern“ der Gleichung.
(Vektoren: ctrl (und ↵)
Möchte man die entsprechenden Vektorgleichungen lösen, so muss man berücksichtigen, dass jede Gerade in Abhängigkeit eines anderen Parameters dargestellt wird bzw. dies beim Lösen der Vektorgleichung berücksichtigt wird. (solve: menu 3 1).

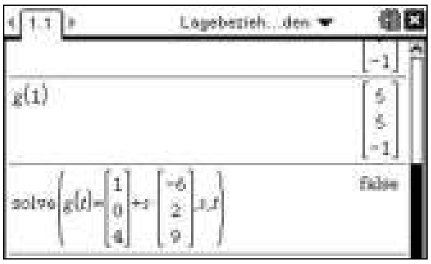
Ergebnis: die Gleichung hat eine einzige Lösung für s bzw. t. Setzt man s = 0 oder t = 1 in die Geradengleichungen von h bzw. g ein, so erhält man den
Schnittpunkt der Geraden g und h: S(5/ 5/ -1).





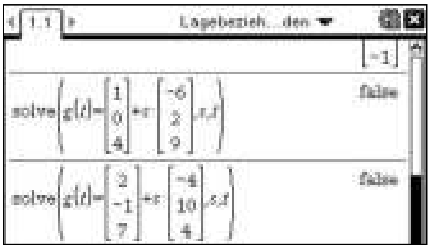
b) Lösen von Vektorgleichungen

Man kann im „solve“-Befehl die Vektorgleichung auch direkt eingeben.
Ergebnis: Der Nspire liefert als Lösung für s und t „false“, d.h. die Gleichung besitzt keine Lösung. Die Geraden haben also keinen gemeinsamen Punkt.
Vergleicht man die Richtungsvektoren der Geraden g und i, sieht man, dass diese nicht zueinander parallel sind.
Die Geraden sind also windschief.



c) Parallele Geraden

Auch hier liefert die Vektorgleichung keine Lösung, die Geraden haben also keinen Schnittpunkt.
Ergebnis: Vergleicht man die Richtungsvektoren der Geraden g und j, so sieht man, dass diese zueinander parallel sind.
Die Geraden sind also parallel.

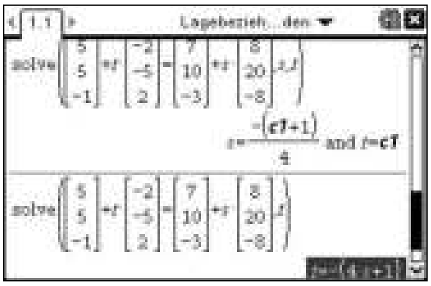


d) Identische Geraden

Ergebnis: Die Gleichung hat für jedes s und t unendlich viele Lösungen (Platzhalter *c1*); der Zusammenhang von s und t wird angezeigt, wenn im solve-Befehl nur eine Variable angeführt wird.

Die Geraden l und k haben unendlich viele Punkte gemeinsam. Sie sind also identisch.

Tipp: Wird die Parameterdarstellung einer Geraden nicht weiter verwendet, empfiehlt sich die direkte Eingabe.



Bestimmung von Ausgleichskurven

Aufgabe: Die Tabelle zeigt die Entwicklung des CO_2 - Ausstoßes weltweit (in Mio t).

Jahr	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**
weltweit	22.543	22.565	22.501	22.735	23.108	23.903	24.118	24.095

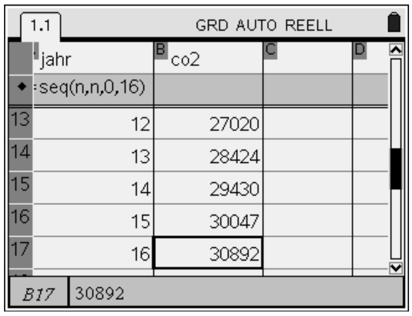
1999	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
24.083	24.677	24.918	25.874	27.020	28.424	29.430	30.047	30.892

a) Stelle die Daten grafisch dar und bestimme zwei mögliche Funktionsgleichungen.
b) Gib eine Prognose ab, wie viel CO_2 weltweit im Jahr 2020 ausgestoßen werden.

a) Eingabe von Datenreihen

Mit Lists & Spreadsheet werden die Daten zunächst in Listen eingegeben. Setze den Startwert (1991) auf 0.

Mit dem „seq“–Befehl (=seq(n,n,untere Grenze, obere Grenze)) lässt sich in die Formelzeile (markiert mit ◆) eine beliebige Zahlenfolge eingeben. Um die Listen in Graphs & Geometry aufzurufen, ist es notwendig, die Spalten zu beschriften (z.B. mit jahr, co2).

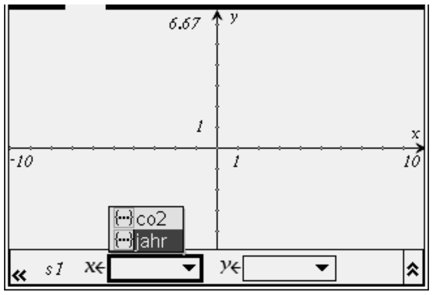


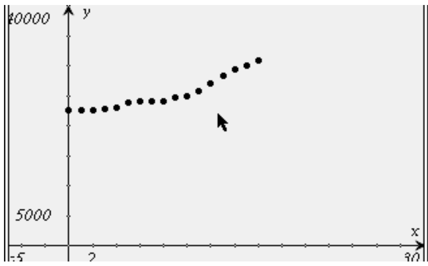
Darstellung der Datenreihe im Koordinatensystem

Öffne eine Seite mit Graphs & Geometry. Um die Datenreihe darzustellen, wähle den Streu-Plot (menu 3 4). Mit (Touchpad) und den Pfeiltasten kannst Du nun den x- bzw. y-Werten die entsprechenden Daten aus der Liste zuordnen.

Hinweise:
Mit ctrl G kann man die Eingabezeile aus- und einblenden.
Fenstereinstellungen lassen sich am sinnvollsten unter menu 4 1 verändern.

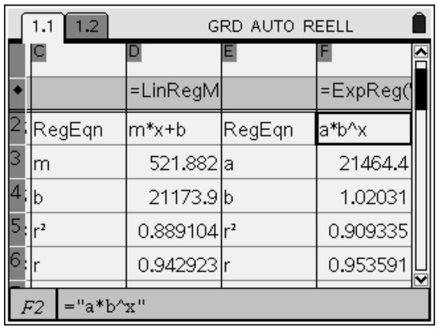
Bei Betrachtung der Messreihe wäre eine lineare, aufgrund des stärkeren Anstiegs in der jüngeren Vergangenheit, aber auch eine exponentielle Ausgleichskurve nahe liegend.





Lists & Spreadsheet-
Hier kann man die gewünschte Regression auswählen.
(statistische Berechnungen: menu 4 1 3 oder A)
Bei der Abfrage sine die Listenzuordnung (X –Liste, Y–Liste) sowie der abzuspeichernde Funktionsname (z.B. f1 und f2) wichtig.

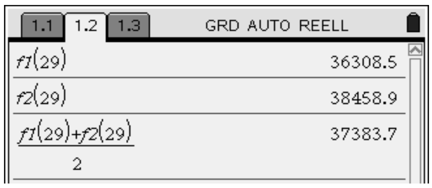
Ergebnis: Mögliche Funktionsterme von Ausgleichskurven sind f1(x) = 521,9 x + 21193,9 und f2(x) = 21464,4·1,02^x.



b) Prognose

Im Calculator kannst Du die beiden Funktionen aufrufen. Eine mögliche Prognose wäre z.B. der Mittelwert aus den beiden zum Zeitpunkt x = 29 berechneten Werten von f1 und f2.

Ergebnis: Im Jahr 2020 ist mit 37000 bis 37500 Mio. Tonnen CO_2 – Ausstoß weltweit zu rechnen.



Aufgabe: Die Tabelle zeigt die Entwicklung des CO_2 - Ausstoßes weltweit (in Mio t).

Jahr	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
weltweit	22.543	22.565	22.501	22.735	23.108	23.903	24.118	24.095

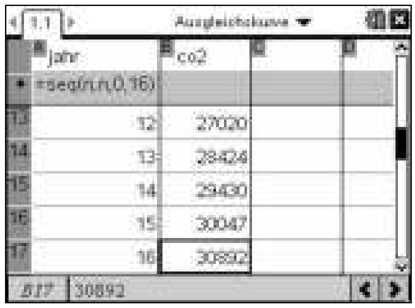
1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
24.083	24.677	24.918	25.874	27.020	28.424	29.430	30.047	30.892

a) Stelle die Daten grafisch dar und bestimme zwei mögliche Funktionsgleichungen.
b) Gib eine Prognose ab, wie viel CO_2 weltweit im Jahr 2020 ausgestoßen werden.

a) Eingabe von Datenreihen

Mit Lists & Spreadsheet werden die Daten zunächst in Listen eingegeben. Setze den Startwert (1991) auf 0.

Mit dem \`seq–Befehl´ (=seq(n,n,untere Grenze, obere Grenze)) lässt sich in die Formelzeile (markiert mit ◆) eine beliebige Zahlenfolge eingeben. Um die Listen in Graphs aufzurufen, ist es notwendig, die Spalten zu beschriften (z.B. mit jahr, co2).

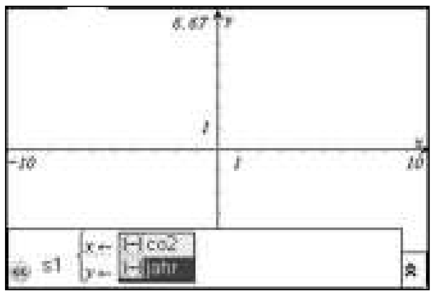


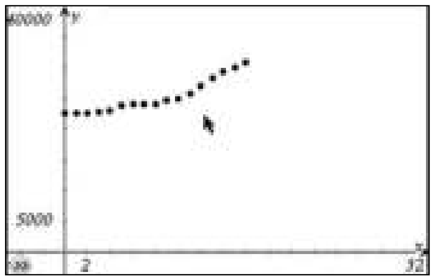
Darstellung der Datenreihe im Koordinatensystem

Öffne eine Seite mit Graphs. Um die Datenreihe darzustellen, wähle das Streudiagramm (menu 3 4).
Mit [Klick-Taste] und den Pfeiltasten kannst Du nun den x- bzw. y-Werten die entsprechenden Daten aus der Liste zuordnen.

Hinweise:
Mit ctrl G kann man die Eingabezeile aus- und einblenden.
Fenstereinstellungen lassen sich am sinnvollsten unter menu 4 1 verändern.

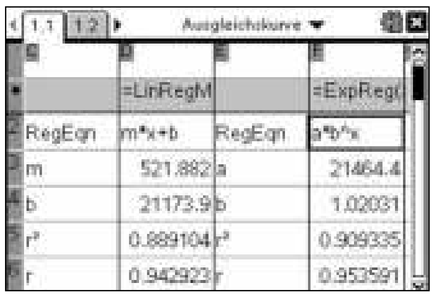
Bei Betrachtung der Messreihe wäre eine lineare, aufgrund des stärkeren Anstiegs in der jüngeren Vergangenheit, aber auch eine exponentielle Ausgleichskurve nahe liegend.





Lists & Spreadsheet
Hier kann man die gewünschte Regression auswählen. (statistische Berechnungen: menu 4 1 3 oder A)
Bei der Abfrage sine die Listenzuordnung (X –Liste, Y–Liste) sowie der abzuspeichernde Funktionsname (z.B. f1 und f2) wichtig.

Ergebnis: Mögliche Funktionsterme von Ausgleichskurven sind $f1(x) = 521{,}9\,x + 21193{,}9$ und $f2(x) = 21464{,}4\cdot 1{,}02^x$.



b) Prognose

Im Calculator kannst Du die beiden Funktionen aufrufen. Eine mögliche Prognose wäre z.B. der Mittelwert aus den beiden zum Zeitpunkt x = 29 berechneten Werten von f1 und f2.

Ergebnis: Im Jahr 2020 ist mit 37000 bis 37500 Mio. Tonnen CO_2 –Ausstoß weltweit zu rechnen.

Modellieren von geradlinigen Bewegungen

Aufgabe

Ein Ballon startet im Punkt A(2|5|0). Er bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit und ist nach einer Stunde im Punkt B(4| 8|1). Beim Start des Ballons befindet sich ein geradlinig fliegendes Flugzeug im Punkt P(10|5|1), das sich nach 2 Minuten im Punkt Q(8|11|5).

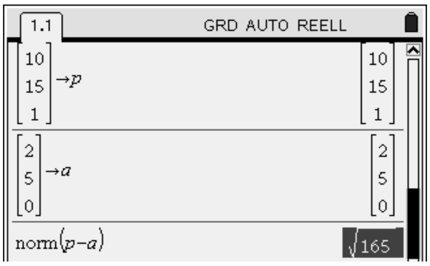
a) Wie weit ist der Punkt P vom Startplatz A des Ballons entfernt?

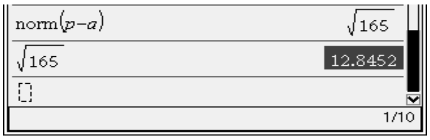
b) Wie viele Minuten nach dem Start des Ballons kommen sich der Ballon und Kleinflugzeug am nächsten? Wie weit sind sie in diesem Augenblick voneinander entfernt?

a) Abstand zweier Punkte

Mit dem Satz des Pythagoras gilt für den Abstand von A und P: $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2 + (p_3 - a_3)^2}$
.
zunächst speicherst Du die Ortsvektoren von A und P als Spaltenvektoren. (ctrl (und für jeden Zeilenwechsel ↵; als Ortsvektor abspeichern: ctrl sto→var).
Um den Abstand von A und C zu berechnen, bildest Du den Betrag des Differenzvektors $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0A}$ mit dem „Norm“ – Befehl. (norm: menu 7 7 1).

Ergebnis:
Die Flugkörper sind zu Beobachtungsbeginn etwa 12,84 km voneinander entfernt (gerundetes Ergebnis mit ctrl enter).



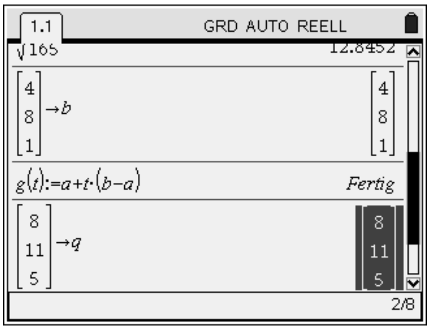


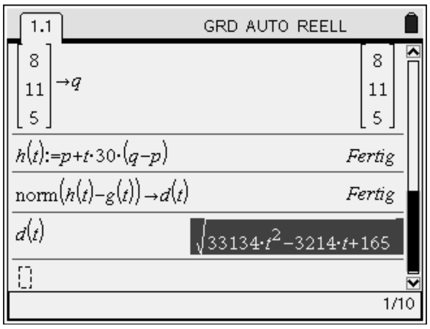
b) Aufstellen der Abstandsfunktion

Den Ort des Ballons nach t Stunden erhält man durch Addition des Ortsvektors von A mit dem t –fachen Vektor von $\overrightarrow{AB}$. Kursgerade des Ballons g: $\vec{x} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$.
Den Ort des Kleinflugzeugs *nach einer Stunde* erhält man durch Addition des Ortsvektors von C mit dem 30-fachen Vektor von $\overrightarrow{PQ}$.
Kursgerade des Flugzeugs: h: $\vec{x} = \overrightarrow{0P} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$
Ein beliebiger Punkt auf g bzw. h ist daher G_t bzw. H_t.

Hinweis: Um den minimalen Abstand oder ggf. Zusammenstoßpunkt zu ermitteln ist es bei diesem Aufgabentyp entscheidend, dass die Gleichungen der Kursgeraden denselben Parameter enthalten.

Die Abstandsfunktion d(t) von Ballon und Flugzeug lässt sich also zu jedem Zeitpunkt durch die Länge des Vektors $\overrightarrow{G_t H_t}$ beschreiben.

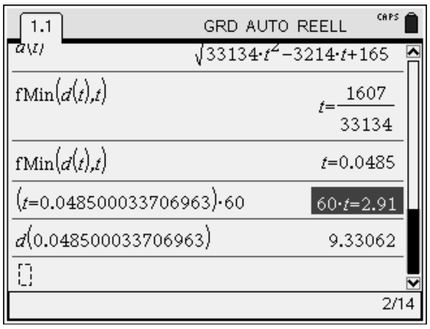




Berechnung des Minimums einer Funktion

Die Funktionsuntersuchung von d erfolgt z.B. mit der Funktion fMin: menu 4 6

Ergebnis:
Nach 0,0485·60 = 2,91 Minuten kommen sich die Flugkörper am nächsten.
Der minimale Abstand beträgt dann etwa 9,33km.



Aufgabe

Ein Ballon startet im Punkt A(2|5|0). Er bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit und ist nach einer Stunde im Punkt B(4|8|1). Beim Start des Ballons befindet sich ein geradlinig fliegendes Flugzeug im Punkt P(10|5|1), das sich nach 2 Minuten im Punkt Q(8|11|5).

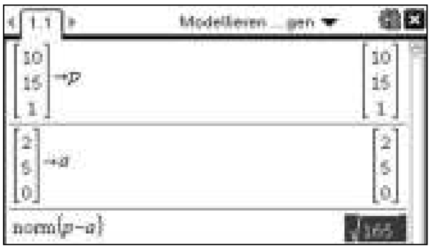
a) Wie weit ist der Punkt P vom Startplatz A des Ballons entfernt?

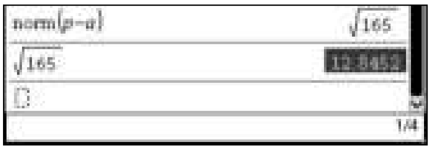
b) Wie viele Minuten nach dem Start des Ballons kommen sich der Ballon und Kleinflugzeug am nächsten? Wie weit sind sie in diesem Augenblick voneinander entfernt?

a) Abstand zweier Punkte

Mit dem Satz des Pythagoras gilt für den Abstand von A und P: $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2 + (p_3 - a_3)^2}$.
zunächst speicherst Du die Ortsvektoren von A und P als Spaltenvektoren. (ctrl (und für jeden Zeilenwechsel ↵; als Ortsvektor abspeichern: ctrl var).
Um den Abstand von A und C zu berechnen, bildest Du den Betrag des Differenzvektors $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0A}$ mit dem „Norm“ – Befehl. (norm: menu 7 7 1).

Ergebnis:
Die Flugkörper sind zu Beobachtungsbeginn etwa 12,84 km voneinander entfernt (gerundetes Ergebnis mit ctrl enter).



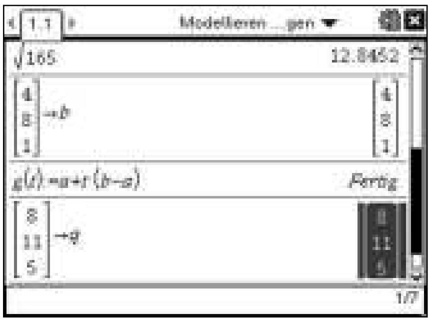


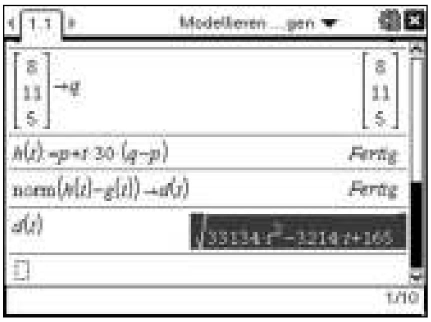
b) Aufstellen der Abstandsfunktion

Den Ort des Ballons nach t Stunden erhält man durch Addition des Ortsvektors von A mit dem t –fachen Vektor von $\overrightarrow{AB}$. Kursgerade des Ballons g: $\vec{x} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$.
Den Ort des Kleinflugzeugs *nach einer Stunde* erhält man durch Addition des Ortsvektors von C mit dem 30-fachen Vektor von $\overrightarrow{PQ}$.
Kursgerade des Flugzeugs: h: $\vec{x} = \overrightarrow{0P} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$
Ein beliebiger Punkt auf g bzw. h ist daher G_t bzw. H_t.

Hinweis: Um den minimalen Abstand oder ggf. Zusammenstoß-punkt zu ermitteln ist es bei diesem Aufgabentyp entscheidend, dass die Gleichungen der Kursgeraden denselben Parameter enthalten.

Die Abstandsfunktion d(t) von Ballon und Flugzeug lässt sich also zu jedem Zeitpunkt durch die Länge des Vektors $\overrightarrow{G_t H_t}$ beschreiben.

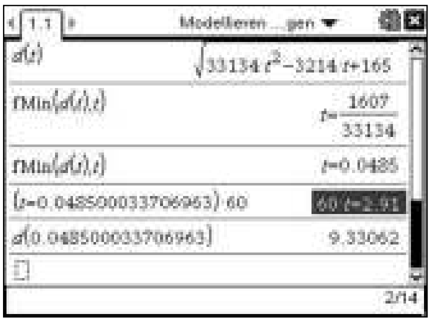




Berechnung des Minimums einer Funktion

Die Funktionsuntersuchung von d erfolgt z.B. mit der Funktion fMin: menu 4 6

Ergebnis:
Nach 0,0485·60 = 2,91 Minuten kommen sich die Flugkörper am nächsten.
Der minimale Abstand beträgt dann etwa 9,33 km.



Tangente und Normale

Aufgabe

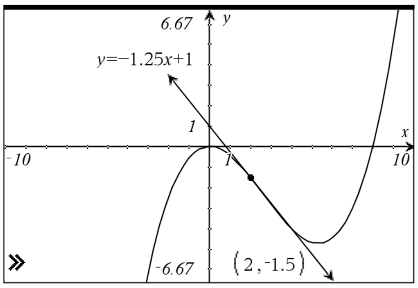
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{2}x^2$.

a) Zeichne den Graphen von f und konstruiere eine Tangente an f im Punkt P (2 I f(2)).
b) Konstruiere die Normale zum Graphen von f im Punkt P.
c) Berechne die Gleichung der Tangente an f, die durch den Punkt Q (2 I -2) verläuft, der nicht auf dem Graphen von f liegt.

Zeichnen einer Tangente

Öffnen Sie eine Graphs & Geometry Anwendung und zeichnen Sie den Graphen von f. Legen Sie einen Punkt auf der Kurve fest, in dem Sie die Tangente an den Graph zeichnen möchten (menu 6 2). Durch Doppelklick auf die angezeigte x-Koordinate lässt sich diese exakt eingeben. Aktivieren Sie die Funktion „Tangente“ (menu 6 7) und klicken Sie auf den festgelegten Punkt. Die erhaltene Tangente kann mit verlängert werden. Der Punkt kann ebenfalls mit bewegt werden.

Die Funktionsgleichung der Tangente (und jeder beliebigen Geraden) kann mit menu 1 7 durch Klicken auf die Tangente erhalten werden (ein zweiter Klick legt die Position der Anzeige auf dem Bildschirm fest).

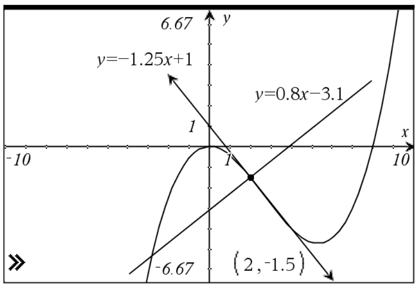


Konstruktion der Normalen

Da man die nicht Normale „direkt“ einzeichnen kann, muss als Zwischenschritt immer die Tangente gezeichnet werden.

Wird die Tangente angezeigt, so erhält man die Normale mit Hilfe von menu 9 1. Klicken Sie auf den Punkt, durch den die Normale gehen soll und auf die Tangente.

Die Gleichung der Normalen kann wiederum mit menu 1 7 erhalten werden.



Berechnung der Tangentengleichung

Allgemein gilt für die Gleichung der Tangente im Punkt (u I f(u)):

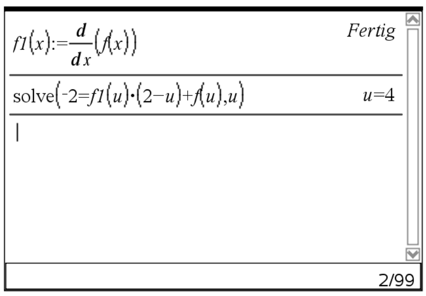
$$y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u). \qquad [1]$$

Um u so zu wählen, dass die Tangente auch durch den Punkt Q (2 I -2) verläuft, muss die Gleichung

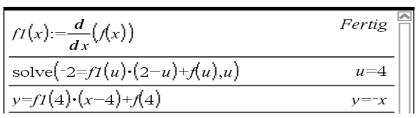
$$-2 = f'(u) * (2 - u) + f(u) \qquad [2]$$

gelöst werden.

Um mit sinnvollen Bezeichnungen zu arbeiten, ändert man die Bezeichnung der Funktion f1 in f ab, d.h. in Graphs & Geometry wird in der Eingabezeile die „1“ in f1(x)=… gelöscht und mit enter bestätigt.
Alternativ kann selbstverständlich auch ein neues Dokument geöffnet werden und die Funktion f im Calculator neu definiert werden.
Im Calculator wird nun die Ableitungsfunktion von f als f1(x) definiert. Nun kann obige Gleichung [2] schnell eingegeben und gelöst werden.



Um die Tangentengleichung zu erhalten setzt man u = 4 in obige Gleichung [1] ein.



Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{2}x^2$.

a) Zeichne den Graphen von f und konstruiere eine Tangente an f im Punkt P (2 I f(2)).

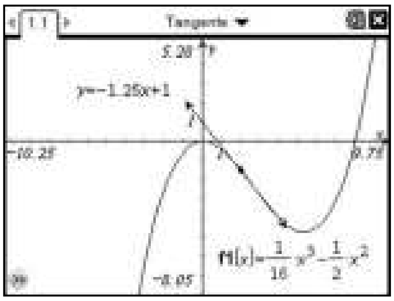
b) Konstruiere die Normale zum Graphen von f im Punkt P.

c) Berechne die Gleichung der Tangente an f, die durch den Punkt Q (2 I -2) verläuft, der nicht auf dem Graphen von f liegt.

Zeichnen einer Tangente

Öffnen Sie die Graphs Anwendung und zeichnen Sie den Graphen von f. Legen Sie einen Punkt auf der Kurve fest, in dem Sie die Tangente an den Graph zeichnen möchten ((menu)(7)(2)). Durch Doppelklick auf die angezeigte x-Koordinate lässt sich diese exakt eingeben. Aktivieren Sie die Funktion „Tangente" ((menu)(7)(7)) und klicken Sie auf den festgelegten Punkt.
Die erhaltene Tangente kann mit ✍ verlängert werden. Der Punkt kann ebenfalls mit ✍ bewegt werden.

Die Funktionsgleichung der Tangente (und jeder beliebigen Geraden) kann mit (menu)(1)(7) durch Klicken auf die Tangente erhalten werden (ein zweiter Klick legt die Position der Anzeige auf dem Bildschirm fest).

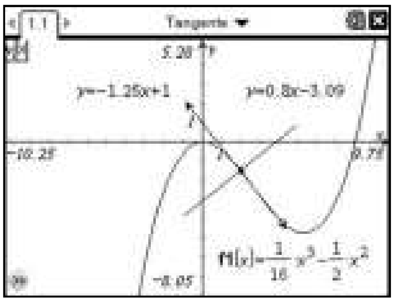


Konstruktion der Normalen

Da man die nicht Normale „direkt" einzeichnen kann, muss als Zwischenschritt immer die Tangente gezeichnet werden.

Wird die Tangente angezeigt, so erhält man die Normale mit Hilfe von (menu)(A)(1). Klicken Sie auf den Punkt, durch den die Normale gehen soll und auf die Tangente.

Die Gleichung der Normalen kann wiederum mit (menu)(1)(7) erhalten werden.



Berechnung der Tangentengleichung

Allgemein gilt für die Gleichung der Tangente im Punkt (u I f(u)):

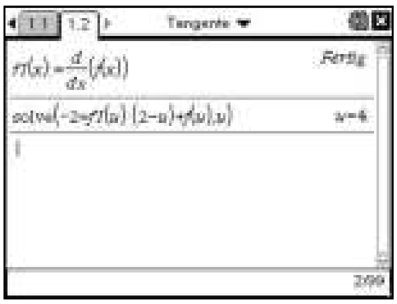
$$y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u). \qquad [1]$$

Um u so zu wählen, dass die Tangente auch durch den Punkt Q (2 I -2) verläuft, muss die Gleichung

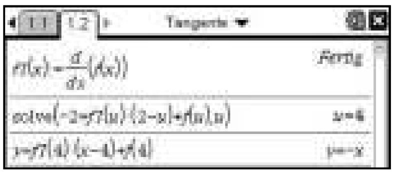
$$-2 = f'(u) * (2 - u) + f(u) \qquad [2]$$

gelöst werden.

Um mit sinnvollen Bezeichnungen zu arbeiten, ändert man die Bezeichnung der Funktion f1 in f ab, d.h. in Graphs wird in der Eingabezeile die „1" in f1(x)=… gelöscht und mit (enter) bestätigt.
Alternativ kann selbstverständlich auch ein neues Dokument geöffnet werden und die Funktion f im Calculator neu definiert werden.
Im Calculator wird nun die Ableitungsfunktion von f als f1(x) definiert. Nun kann obige Gleichung [2] schnell eingegeben und gelöst werden.



Um die Tangentengleichung zu erhalten setzt man u = 4 in obige Gleichung [1] ein.



Extremwertprobleme lösen

Aufgabe

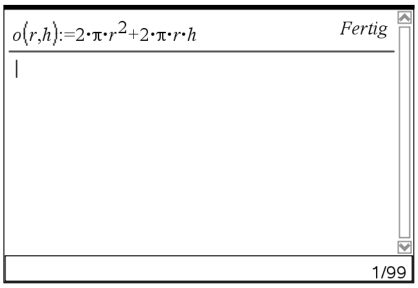
Es soll eine zylindrische Dose mit einem Volumen von zwei Litern hergestellt werden.
Der Radius und die Höhe der Dose sollen so gewählt werden, dass der Materialbedarf möglichst gering ist. Material für Falze und Überlappungen kann vernachlässigt werden.

<table>
<tr>
<td>

Mathematische Beschreibung der untersuchten Größe

Die Fläche des benötigten Materials für die Dose entspricht der Oberfläche eines Zylinders:
$2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
Die Oberfläche hängt also vom Radius r und der Höhe h der Dose ab.
Definieren Sie deshalb eine Funktion o(r,h), die gegebenen Radien und Höhen die entsprechende Dosenoberfläche zuordnet.

</td>
<td>

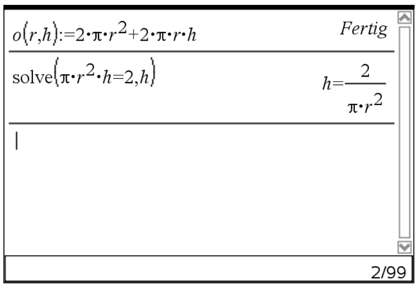


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Formulierung der Nebenbedingung

Das Volumen der Dose (zwei Liter) liefert einen Zusammenhang von r und h. Es gilt $\pi \cdot r^2 \cdot h = 2$.
Lösen Sie diese Gleichung mit dem solve-Befehl (menu 3 1) nach einer der beiden Variablen auf.

</td>
<td>

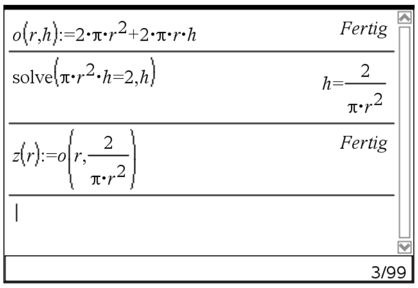


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Bestimmung der Zielfunktion

Die Zielfunktion beschreibt die zu untersuchende Größe in Abhängigkeit von nur einer Variablen.
Ersetzt man nun in der Funktion o(r,h) die Variable h durch den mit Hilfe der Nebenbedingung gewonnen Term, so erhält man die gesuchte Zielfunktion z(r).

</td>
<td>



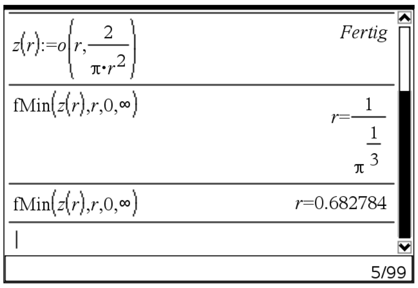
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Untersuchung der Zielfunktion auf Extremwerte

Mit Hilfe der Befehle fmin (menu 4 6) und fmax (menu 4 7) lassen sich nun die Minimums- bzw. Maximumsstellen der Zielfunktion bestimmen (Notation s. Abbildung). In diesem Beispiel muss der Radius größer Null sein, weshalb die Bestimmung des Minimums auf das Intervall $(0; \infty)$ eingeschränkt wird.

Die Höhe h und die Fläche des benötigten Materials erhält man jeweils durch Einsetzen von r in die entsprechenden Gleichungen.

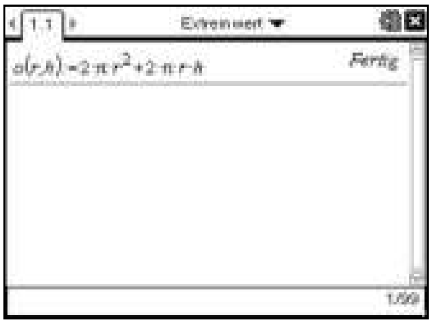
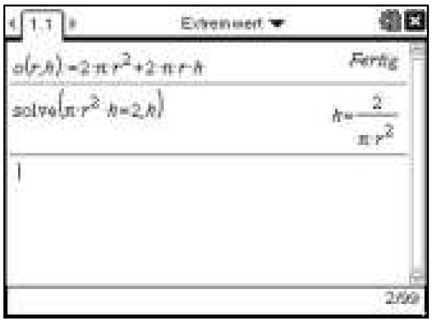
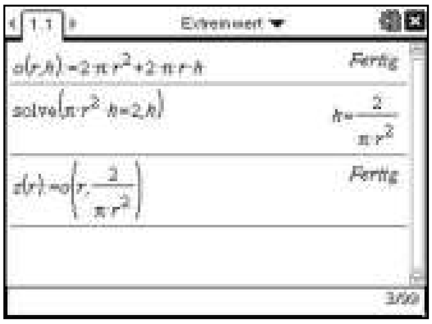
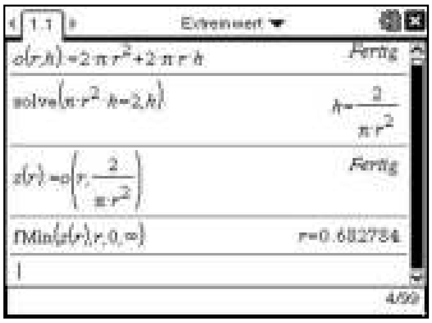
</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

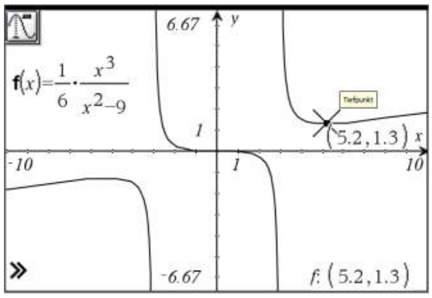
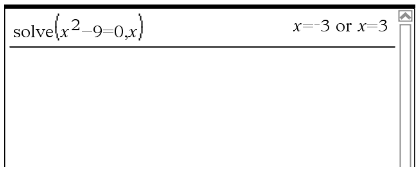
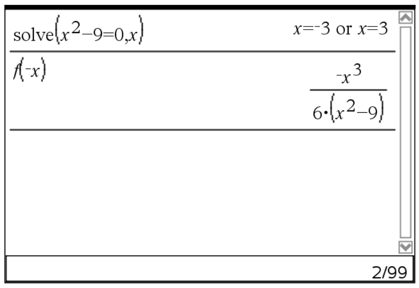
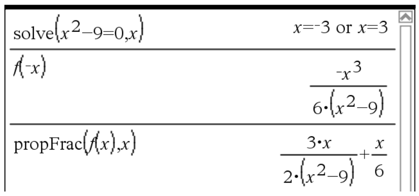
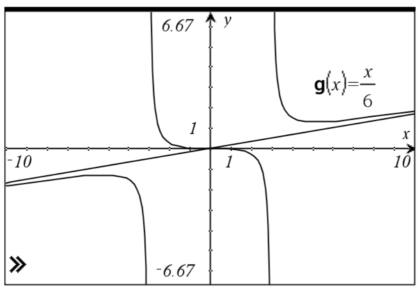
Aufgabe

Es soll eine zylindrische Dose mit einem Volumen von zwei Litern hergestellt werden.
Der Radius und die Höhe der Dose sollen so gewählt werden, dass der Materialbedarf möglichst gering ist. Material für Falze und Überlappungen kann vernachlässigt werden.

Mathematische Beschreibung der untersuchten Größe Die Fläche des benötigten Materials für die Dose entspricht der Oberfläche eines Zylinders: $2\cdot\pi\cdot r^2+2\cdot\pi\cdot r\cdot h$ Die Oberfläche hängt also vom Radius r und der Höhe h der Dose ab. Definieren Sie deshalb eine Funktion o(r,h), die gegebenen Radien und Höhen die entsprechende Dosenoberfläche zuordnet.	
Formulierung der Nebenbedingung Das Volumen der Dose (zwei Liter) liefert einen Zusammenhang von r und h. Es gilt $\pi\cdot r^2\cdot h=2$. Lösen Sie diese Gleichung mit dem solve-Befehl (menu 3 1) nach einer der beiden Variablen auf.	
Bestimmung der Zielfunktion Die Zielfunktion beschreibt die zu untersuchende Größe in Abhängigkeit von nur einer Variablen. Ersetzt man nun in der Funktion o(r,h) die Variable h durch den mit Hilfe der Nebenbedingung gewonnen Term, so erhält man die gesuchte Zielfunktion z(r).	
Untersuchung der Zielfunktion auf Extremwerte Mit Hilfe der Befehle fmin (menu 4 7) und fmax (menu 4 8) lassen sich nun die Minimums- bzw. Maximumsstellen der Zielfunktion bestimmen (Notation s. Abbildung). In diesem Beispiel muss der Radius größer Null sein, weshalb die Bestimmung des Minimums auf das Intervall $(0;\infty)$ eingeschränkt wird. Die Höhe h und die Fläche des benötigten Materials erhält man jeweils durch Einsetzen von r in die entsprechenden Gleichungen.	

Funktionsuntersuchung einer gebrochenrationalen Funktion

Aufgabe:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2-9}$. Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung durch.

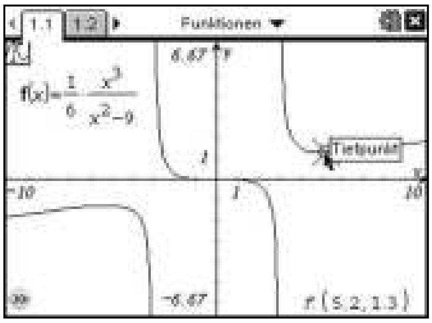
Graphische Bestimmung charakteristischer Punkte Um sich einen ersten Überblick über den Graphen von f zu verschaffen, wird die Funktion in Graphs & Geometry eingegeben. Die erste Ableitung soll später mit f1 bezeichnet werden. Deshalb wird die Eingabezeile abgeändert und f(x) geschrieben (die „1“ in „f1(x)“ wird einfach gelöscht). Fährt man mit der Spurfunktion (menu 5 1) entlang des Graphen von f, so werden gemeinsame Punkte mit der x-Achse und Extrempunkte angezeigt. Die Koordinaten lassen sich so (näherungsweise) unten rechts ablesen. Bei Eingabe einer Zahl für einen beliebigen x-Wert und anschließendem Drücken von enter springt die Spurfunktion direkt an die eingegebene Stelle. Soll ein Graph ins Heft skizziert werden ist die Spurfunktion auch ein gutes Hilfsmittel, das das Erstellen einer Wertetabelle erspart.	
Definitionslücken, Polstellen Sieht man die Definitionslücken nicht sofort, so kann man mit dem Calculator die x-Werte bestimmen, für die der Nenner den Wert 0 annehmen (menu 3 1). Ein Blick zurück in die Zeichnung zeigt, ob es sich um eine Polstelle oder um eine hebbare Singularität handelt.	
Symmetrie In der Zeichnung kann die Symmetrie bereits vermutet werden. Ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, so gilt: $f(-x) = f(x)$. Ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung, so gilt: $f(-x) = -f(x)$. Diese Bedingungen können einfach nachgeprüft werden, in dem man den Rechner f(-x) berechnen lässt. Im vorliegenden Beispiel ist so die Punktsymmetrie zum Ursprung gezeigt.	
Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$ In der Zeichnung kann man erahnen, dass $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$. Dies zeigt auch eine Betrachtung von Zähler- und Nennergrad. Eine Näherungsfunktion lässt sich mit Hilfe von Polynomdivision erhalten. Mit dem Nspire ist die Polynomdivision mit Hilfe von menu 3 7 1 „Echter Bruch“ möglich. In die „propfrac“-Anwendung wird der zu untersuchende Term und (abgetrennt durch ein Komma) die Variable eingegeben. In unserem Fall erhält man eine schiefe Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{6}x$. Um sicher zu gehen, dass das Ergebnis korrekt ist, kann man diese Gerade in die Zeichnung einzeichnen lassen. (Achtung: Wiederum nicht f1 als Bezeichnung verwenden, da dies für die Ableitungsfunktion verwendet werden soll. Bezeichne die Gerade z.B. mit g(x)).	 

Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2-9}$. Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung durch.

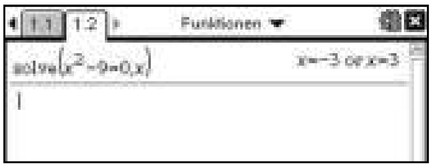
Graphische Bestimmung charakteristischer Punkte

Um sich einen ersten Überblick über den Graphen von f zu verschaffen, wird die Funktion in Graphs eingegeben. Die erste Ableitung soll später mit f1 bezeichnet werden. Deshalb wird die Eingabezeile in Graphs abgeändert und f(x) geschrieben (die „1“ in „f1(x)“ wird einfach gelöscht). Fährt man mit der Spurfunktion (menu 5 1) entlang des Graphen von f, so werden gemeinsame Punkte mit der x-Achse und Extrempunkte angezeigt. Die Koordinaten lassen sich so (näherungsweise) unten rechts ablesen. Bei Eingabe einer Zahl für einen beliebigen x-Wert und anschließendem Drücken von enter springt die Spurfunktion direkt an die eingegebene Stelle. Soll ein Graph ins Heft skizziert werden ist die Spurfunktion auch ein gutes Hilfsmittel, das das Erstellen einer Wertetabelle erspart.



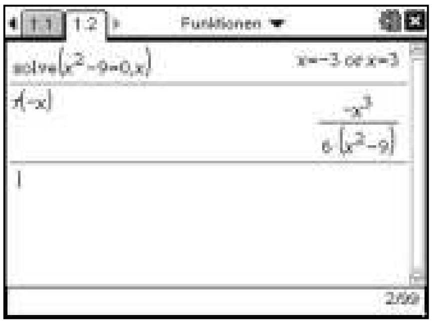
Definitionslücken, Polstellen

Sieht man die Definitionslücken nicht sofort, so kann man mit dem Calculator die x-Werte bestimmen, für die der Nenner den Wert 0 annehmen (menu 3 1). Ein Blick zurück in die Zeichnung zeigt, ob es sich um eine Polstelle oder um eine hebbare Singularität handelt.



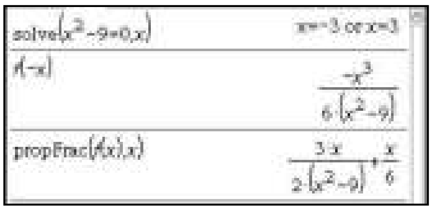
Symmetrie

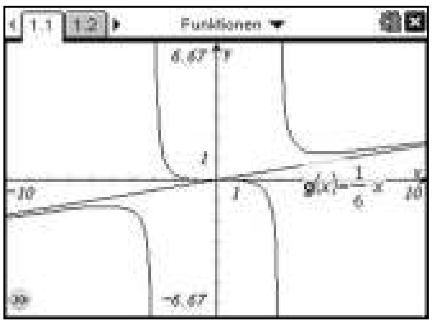
In der Zeichnung kann die Symmetrie bereits vermutet werden.
Ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, so gilt: $f(-x) = f(x)$.
Ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung, so gilt: $f(-x) = -f(x)$.
Diese Bedingungen können einfach nachgeprüft werden, in dem man den Rechner f(-x) berechnen lässt.
Im vorliegenden Beispiel ist so die Punktsymmetrie zum Ursprung gezeigt.



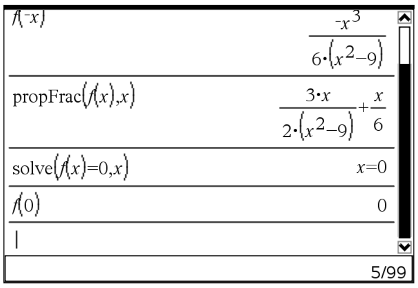
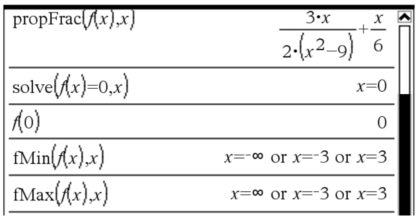
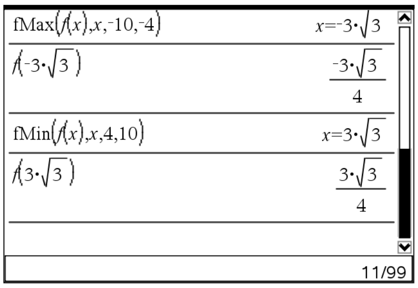
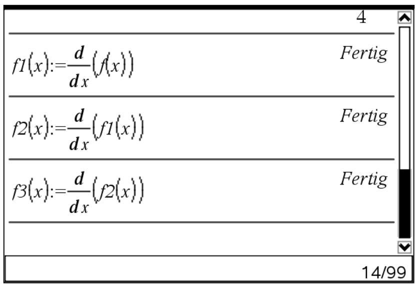
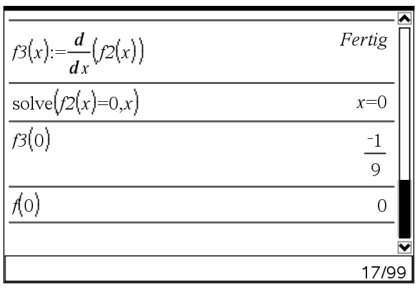
Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$

In der Zeichnung kann man erahnen, dass $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$. Dies zeigt auch eine Betrachtung von Zähler- und Nennergrad. Eine Näherungsfunktion lässt sich mit Hilfe von Polynomdivision erhalten. Mit dem Nspire ist die Polynomdivision mit Hilfe von menu 3 8 1 „Echter Bruch“ möglich. In die „propfrac“-Anwendung wird der zu untersuchende Term und (abgetrennt durch ein Komma) die Variable eingegeben.
In unserem Fall erhält man eine schiefe Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{6}x$.
Um sicher zu gehen, dass das Ergebnis korrekt ist, kann man diese Gerade in die Zeichnung einzeichnen lassen. (Achtung: Wiederum nicht f1 als Bezeichnung verwenden, da dies für die Ableitungsfunktion verwendet werden soll. Bezeichne die Gerade z.B. mit g(x)).



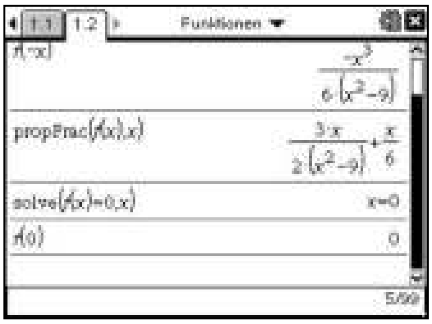


Funktionsuntersuchung einer gebrochenrationalen Funktion

Berechnung der gemeinsamen Punkte mit den Achsen Um die Nullstellen von f zu erhalten, gilt es die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen. Dazu wird der solve-Befehl (menu 3 1) verwendet. Um den gemeinsamen Punkt mit der y-Achse zu erhalten, muss der Funktionswert von f an der Stelle $x = 0$, d.h. $f(0)$ berechnet werden. Im vorliegenden Beispiel entspricht der gemeinsame Punkt mit der x-Achse dem gemeinsamen Punkt mit der y-Achse.	
Bestimmung globaler Minimum- und Maximumstellen Globale Minimumstellen und globale Maximumstellen werden mit Hilfe von „fMin“ (menu 4 6)und „fMax“ (menu 4 7) bestimmt. (Notation des Befehls: s. Abbildung) Da im Beispiel keine globalen Minimums- und Maximumstellen existieren, gibt der Rechner $x = -\infty$, $x = +\infty$ und die Polstellen aus.	
Bestimmung lokaler Minimum- und Maximumstellen Hierzu werden wiederum „fMin“ (menu 4 6)und „fMax“ (menu 4 7) verwendet, allerdings muss noch angegeben werden, in welchem Intervall die Stelle liegt (dazu die Zeichnung des Graphen betrachten und das Intervall dort mit Hilfe der Spurfunktion abschätzen). Für die Notation gilt: $fMax(Ausdruck, Variable, untere\ Grenze, obere\ Grenze)$ Analog für fMin. Um Hoch- und Tiefpunkte angeben zu können, wird der zugehörige Funktionswert jeweils noch bestimmt.	
Ableitungen Um mit sinnvollen Bezeichnungen arbeiten zu können, empfiehlt es sich die erste Ableitung mit f1(x) zu bezeichnen, die zweite mit f2(x), … . Der Nspire bestimmt die Ableitungsfunktionen mit menu 4 1. Anstatt der Bezeichnung f(x) könnte auch der Funktionsterm eingegeben werden. Um die Ableitungsfunktionen anzeigen zu lassen, gibt man f1(x) ein und bestätigt mit enter.	
Bestimmung von Wendepunkten Zur Bestimmung der Wendestellen muss die Gleichung $f2(x) = 0$ gelöst werden (menu 3 1) und es muss überprüft werden, ob f3 an dieser Stelle ungleich Null ist. Abschließend wird dann der Funktionswert berechnet um den Wendepunkt angeben zu können. Analog lassen sich auch Extrempunkte bestimmen (wenn man nicht fmin und fmax verwenden möchte). In diesem Fall muss dann $f1(x) = 0$ gelöst und f2 betrachtet werden.	

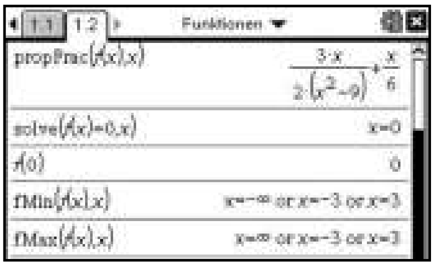
Berechnung der gemeinsamen Punkte mit den Achsen

Um die Nullstellen von f zu erhalten, gilt es die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen. Dazu wird der solve-Befehl (menu 3 1) verwendet.
Um den gemeinsamen Punkt mit der y-Achse zu erhalten, muss der Funktionswert von f an der Stelle $x = 0$, d.h. $f(0)$ berechnet werden.
Im vorliegenden Beispiel entspricht der gemeinsame Punkt mit der x-Achse dem gemeinsamen Punkt mit der y-Achse.



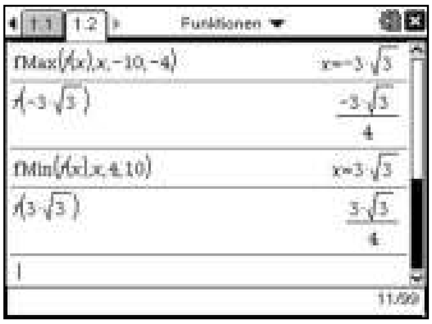
Bestimmung globaler Minimum- und Maximumstellen

Globale Minimumstellen und globale Maximumstellen werden mit Hilfe von „fMin“ (menu 4 7)und „fMax“ (menu 4 8) bestimmt. (Notation des Befehls: s. Abbildung)
Da im Beispiel keine globalen Minimums- und Maximumstellen existieren, gibt der Rechner $x = -\infty$, $x = +\infty$ und die Polstellen aus.



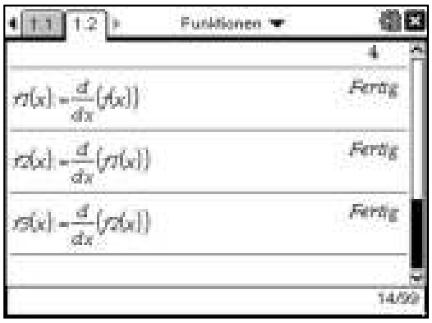
Bestimmung lokaler Minimum- und Maximumstellen

Hierzu werden wiederum „fMin“ (menu 4 7)und „fMax“ (menu 4 8) verwendet, allerdings muss noch angegeben werden, in welchem Intervall die Stelle liegt (dazu die Zeichnung des Graphen betrachten und das Intervall dort mit Hilfe der Spurfunktion abschätzen).
Für die Notation gilt:
$fMax(Ausdruck, Variable, untere\ Grenze, obere\ Grenze)$
Analog für fMin.
Um Hoch- und Tiefpunkte angeben zu können, wird der zugehörige Funktionswert jeweils noch bestimmt.



Ableitungen

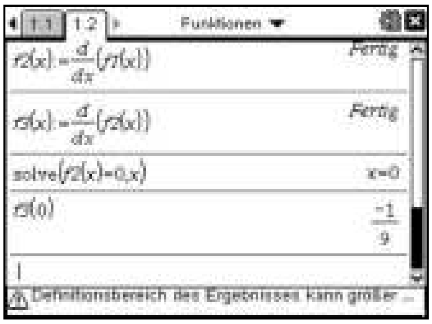
Um mit sinnvollen Bezeichnungen arbeiten zu können, empfiehlt es sich die erste Ableitung mit f1(x) zu bezeichnen, die zweite mit f2(x), … .
Der Nspire bestimmt die Ableitungsfunktionen mit menu 4 1. Anstatt der Bezeichnung f(x) könnte auch der Funktionsterm eingegeben werden.
Um die Ableitungsfunktionen anzeigen zu lassen, gibt man f1(x) ein und bestätigt mit enter.



Bestimmung von Wendepunkten

Zur Bestimmung der Wendestellen muss die Gleichung $f2(x) = 0$ gelöst werden (menu 3 1) und es muss überprüft werden, ob f3 an dieser Stelle ungleich Null ist.
Abschließend wird dann der Funktionswert berechnet um den Wendepunkt angeben zu können.

Analog lassen sich auch Extrempunkte bestimmen (wenn man nicht fmin und fmax verwenden möchte).
In diesem Fall muss dann $f1(x) = 0$ gelöst und f2 betrachtet werden.

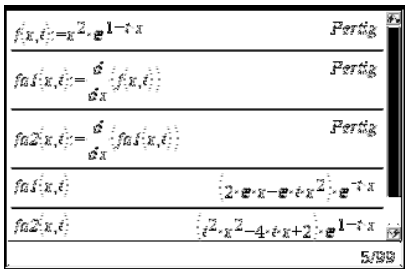
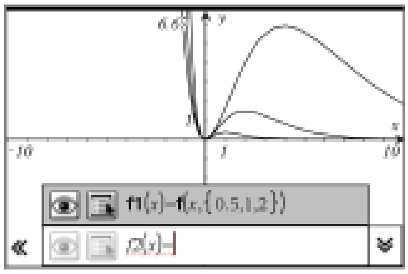
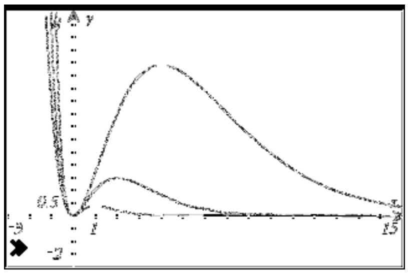
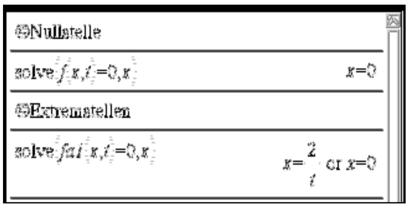
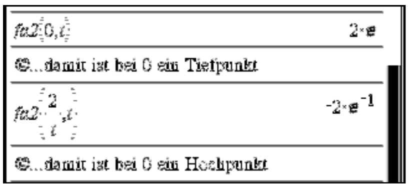
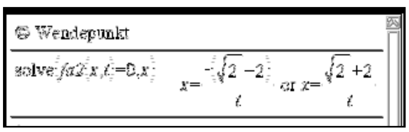


Funktionenscharen

Aufgabe

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = x^2 \cdot e^{1-tx}$ mit t > 0.

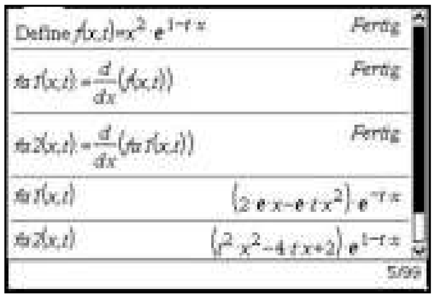
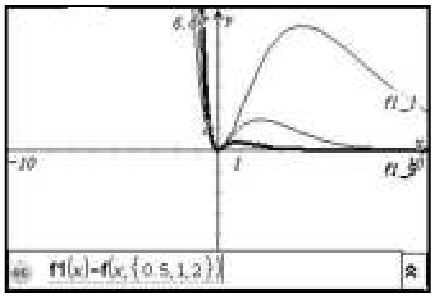
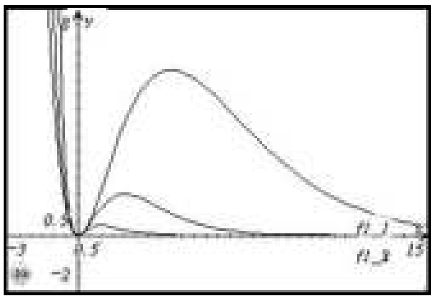
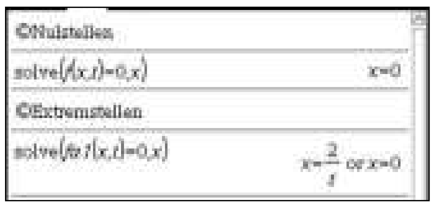
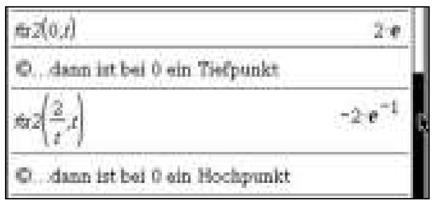
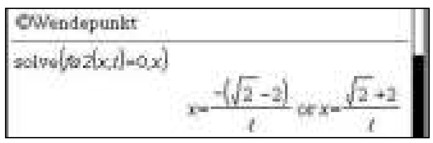
a) Untersuchen Sie den Graph von f_t auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte
b) Geben Sie eine Gleichung für den Graphen an, auf dem alle Hochpunkte der Graphen von f_t liegen.

Definition im Calculator Öffnen Sie eine Seite mit dem *Calculator* und definieren Sie die Funktion durch Eingabe von f(x, t):= $x^2 \cdot e^{1-tx}$ oder define f(x, t) = ….. Sie wird als Funktion mit zwei Variablen eingegeben. Der Vorteil wird im weiteren Verlauf deutlich. Weiter können Sie auch gleich die ersten beiden Ableitungsfunktionen bestimmen und definieren. Sie finden den Befehl unter menu 4 1: Ableitung oder schneller mit dem Tastenkürzel. Als Namen wählen Sie z.B. fa1 (x, t) und fa2 (x, t).	
Darstellung der Graphen Um sich einen ersten Überblick über den Verlauf zu schaffen, öffnen Sie eine Seite mit *Graphs & Geometry*. Um die Graphen für z.B. t = 0,5; 1 und 2 darzustellen geben Sie in der Eingabezeile f1(x)= f(x, {0.5, 1, 2}) ein. Es werden alle drei Graphen gezeichnet. Eventuell können Sie noch eine geschicktere Achseneinteilung wählen. Man erkennt, dass die x-Achse (y = 0) waagrechte Asymptote ist, d.h. für $x \to \infty$ geht $f(x) \to 0$. Weiter kann man sehen das bei den drei gewählten Graphen die Nullstelle unabhängig von t immer bei x = 0 und gleichzeitig eine Minimalstelle ist. Man erkennt, dass die Graphen je einen von t abhängigen Hochpunkt und Wendepunkt besitzen.	
Berechnung im Calculator Öffnen Sie eine Seite mit dem Calculator. Berechnen Sie mit dem solve - Befehl die möglichen Nullstellen. Man erkennt, dass für alle t gilt: x = 0. Die Berechnung der möglichen Extremstellen mit Hilfe der 1. Ableitung liefert, wie erwartet x = 0 für die Minima und $x = \frac{2}{t}$ für die Maximalstelle. Die Überprüfung z.B. mit der 2. Ableitung ist durch die Visualisierung überflüssig, kann aber ebenfalls leicht gemacht werden. (siehe rechts). Zur Berechnung der möglichen Wendepunkte wird die 2. Ableitung 0 gesetzt. Die Lösung ist rechts zu sehen.	

Aufgabe

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = x^2 \cdot e^{1-tx}$ mit t > 0.

a) Untersuchen Sie den Graph von f_t auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte
b) Geben Sie eine Gleichung für den Graphen an, auf dem alle Hochpunkte der Graphen von f_t liegen.

Definition im Calculator Öffnen Sie eine Seite mit dem Calculator und definieren Sie die Funktion durch Eingabe von f(x, t):= $x^2 \cdot e^{1-tx}$ oder define f(x, t) = … . Sie wird als Funktion mit zwei Variablen eingegeben. Der Vorteil wird im weiteren Verlauf deutlich. Weiter können Sie auch gleich die ersten beiden Ableitungsfunktionen bestimmen und definieren. Sie finden den Befehl unter (menu)(4)(1): Ableitung oder schneller mit dem Tastenkürzel (shift)(−). Als Namen wählen Sie z.B. fa1 (x, t) und fa2 (x, t).	
Darstellung der Graphen Um sich einen ersten Überblick über den Verlauf zu schaffen, öffnen Sie eine Seite mit Graphs. Um die Graphen für z.B. t = 0,5; 1 und 2 darzustellen geben Sie in der Eingabezeile f1(x)= f(x, {0.5, 1, 2}) ein. Es werden alle drei Graphen gezeichnet. Eventuell können Sie noch eine geschicktere Achseneinteilung wählen. Man erkennt, dass die x-Achse (y = 0) waagrechte Asymptote ist, d.h. für $x \to \infty$ geht $f(x) \to 0$. Weiter kann man sehen das bei den drei gewählten Graphen die Nullstelle unabhängig von t immer bei x = 0 und gleichzeitig eine Minimalstelle ist. Man erkennt, dass die Graphen je einen von t abhängigen Hochpunkt und Wendepunkt besitzen.	 
Berechnung im Calculator Öffnen Sie eine Seite mit dem Calculator. Berechnen Sie mit dem solve - Befehl die möglichen Nullstellen. Man erkennt, dass für alle t gilt: x = 0. Die Berechnung der möglichen Extremstellen mit Hilfe der 1. Ableitung liefert, wie erwartet x = 0 für die Minima und $x = \frac{2}{t}$ für die Maximalstelle. Die Überprüfung z.B. mit der 2. Ableitung ist durch die Visualisierung überflüssig, kann aber ebenfalls leicht gemacht werden. (siehe rechts). Zur Berechnung der möglichen Wendepunkte wird die 2. Ableitung 0 gesetzt. Die Lösung ist rechts zu sehen.	  

Funktionenscharen

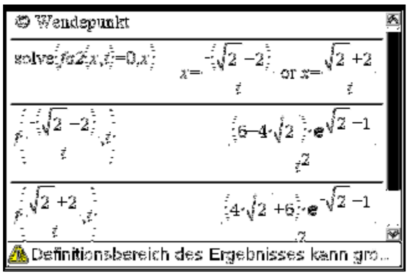
Berechnung der zugehörigen Funktionswerte

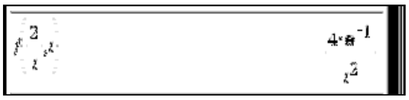
Um die besonderen Punkte anzugeben, müssen noch die zugehörigen Funktionswerte im Calculator berechnet werden. In neben stehender Abbildung ist das geschehen. Es beginnt mit den Wendepunkten W_t.

$$W_{1/2}\left(\frac{\pm\sqrt{2}+2}{t}\middle|\frac{\pm(4\cdot\sqrt{2}+6)\cdot e^{\sqrt{2}-1}}{t^2}\right)$$

Die Schnittpunkte mit der x-Achse, bzw. Tiefpunkte liegen für alle t bei T(0 | 0).

Die Hochpunkte sind $H_t\left(\frac{2}{t}\middle|\frac{4}{e\cdot t^2}\right)$





Ortskurve aller Hochpunkte

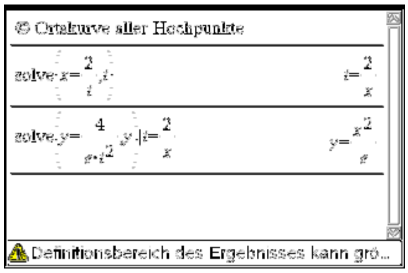
Aus $H_t\left(\frac{2}{t}\middle|\frac{4}{e\cdot t^2}\right)$ ergeben sich die Gleichungen für die x- und die y-Koordinate: $x=\frac{2}{t}$ und $y=\frac{4}{e\cdot t^2}$.

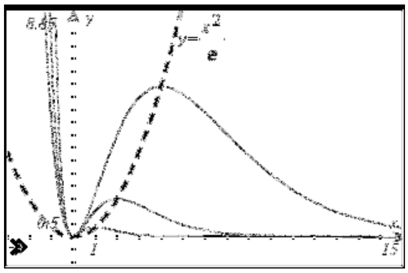
Zur Bestimmung der Kurve auf der alle Hochpunkte liegen, geht man am besten so vor:

Die erste Gleichung wird nach t aufgelöst und in die 2. Gleichung eingesetzt (siehe rechts).

Somit wird t eliminiert und man erhält als Ortskurve aller Hochpunkte die Gleichung $y=\frac{1}{e}\cdot x^2$.

Es handelt sich um eine Parabel die man ebenfalls mit einzeichnen kann.





<table>
<tr>
<td>

Berechnung der zugehörigen Funktionswerte

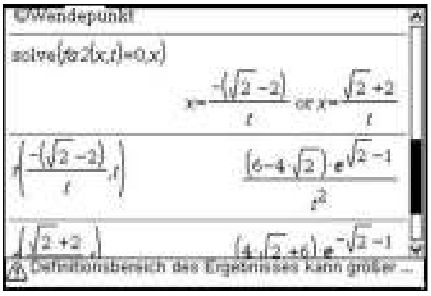
Um die besonderen Punkte anzugeben, müssen noch die zugehörigen Funktionswerte im Calculator berechnet werden. In neben stehender Abbildung ist das geschehen. Es beginnt mit den Wendepunkten W_t.

$$W_{1/2}\left(\frac{\pm\sqrt{2}+2}{t}\middle|\frac{\pm(4\cdot\sqrt{2}+6)\cdot e^{\sqrt{2}-1}}{t^2}\right)$$

Die Schnittpunkte mit der x-Achse, bzw. Tiefpunkte liegen für alle t bei T(0 | 0).

Die Hochpunkte sind $H_t\left(\frac{2}{t}\middle|\frac{4}{e\cdot t^2}\right)$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Ortskurve aller Hochpunkte

Aus $H_t\left(\frac{2}{t}\middle|\frac{4}{e\cdot t^2}\right)$ ergeben sich die Gleichungen für die x- und die y-Koordinate: $x=\frac{2}{t}$ und $y=\frac{4}{e\cdot t^2}$.

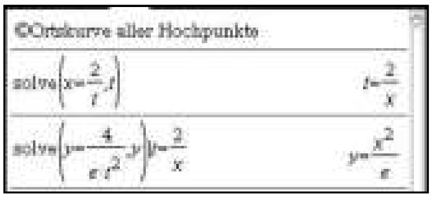
Zur Bestimmung der Kurve auf der alle Hochpunkte liegen, geht man am besten so vor:

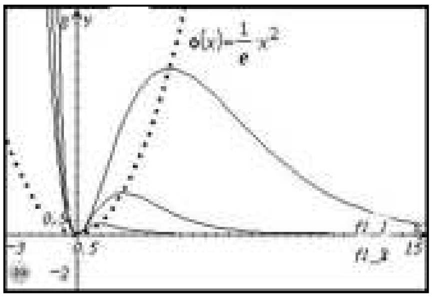
Die erste Gleichung wird nach t aufgelöst und in die 2. Gleichung eingesetzt (siehe rechts).

Somit wird t eliminiert und man erhält als Ortskurve aller Hochpunkte die Gleichung $y=\frac{1}{e}\cdot x^2$.

Es handelt sich um eine Parabel die man ebenfalls mit einzeichnen kann.

</td>
<td>





</td>
</tr>
</table>

Das Integral

Aufgabe

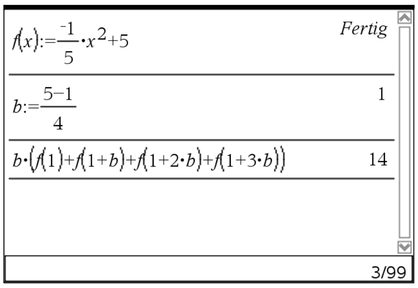
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 5$.

a) Nähern Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [1; 5] mit Hilfe einer Rechtecksumme an.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Rechtecksumme aus a) das Integral $\int_1^5 f(x)dx$.

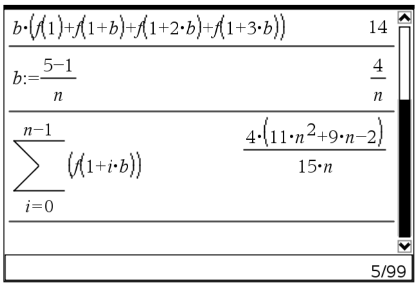
a) Vorüberlegung (4 Rechtecke)

Der Flächeninhalt soll zuerst durch eine Rechtecksumme angenähert werden, die sich aus 4 Rechtecken der Breite $b = \frac{5-1}{4}$ zusammensetzt. Als Höhe der Rechtecke soll jeweils der Funktionswert der linken Intervallgrenze gewählt werden.
Für den Flächeninhalt dieser Rechtecksumme gilt:
$A = b \cdot f(1) + b \cdot f(1+b) + b \cdot f(1+2\cdot b) + b \cdot f(1+3\cdot b)$
$A = b \cdot \big(f(1) + f(1+b) + f(1+2\cdot b) + f(1+3\cdot b)\big)$.
Definieren Sie zur Berechnung der Fläche die Funktion f und die Intervallbreite b und geben Sie anschließend obigen Ausdruck in den Rechner ein.

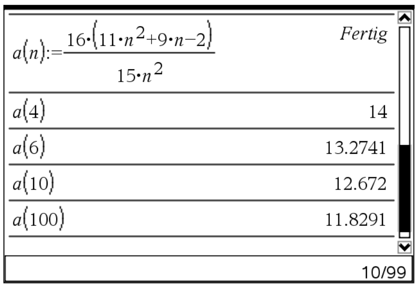


Verallgemeinerung (n Rechtecke)

Nun soll der Flächeninhalt durch eine Rechtecksumme aus n Rechtecken angenähert werden.
Die Breite dieser Rechtecke ist $b = \frac{5-1}{n}$.
Für den Flächeninhalt dieser Rechtecke gilt:
$A = b \cdot \big(f(1) + f(1+b) + \dots + f(1+(n-1)\cdot b)\big)$.
Um diesen Ausdruck in den Rechner einzugeben, verwendet man den Befehl „Summe" (menu 4 4).
Die Notation kann der nebenstehenden Abbildung entnommen werden.



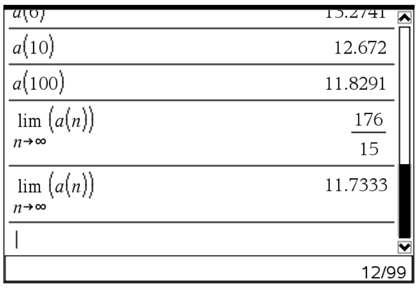
Der Flächeninhalt der Rechtecke hängt von der Anzahl der Rechtecke n ab. Definieren Sie deshalb die Funktion a(n), die jedem n den Inhalt der Gesamtfläche der Rechtecke zuordnet.
Bestimmen Sie nun durch Einsetzen verschiedener Werte für n eine Näherungslösung für Teilaufgabe a).



b) Bestimmung des Integrals

Das obige Integral entspricht der exakten Fläche unter der Kurve. Diese erhält man als Grenzwert der Funktion a(n):
$\int_1^5 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} a(n)$.

Der „Limes"- Befehl kann mit menu 4 3 aufgerufen werden.



Aufgabe

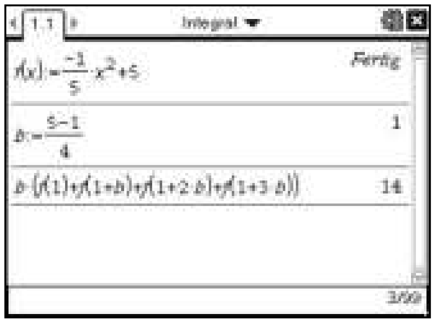
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 5$.

a) Nähern Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [1; 5] mit Hilfe einer Rechtecksumme an.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Rechtecksumme aus a) das Integral $\int_1^5 f(x)dx$.

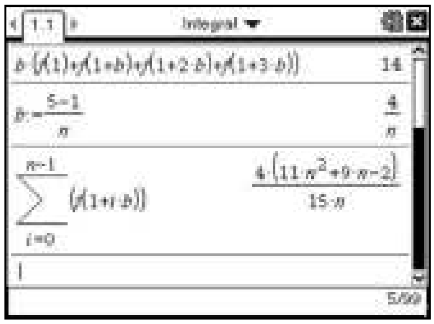
a) Vorüberlegung (4 Rechtecke)

Der Flächeninhalt soll zuerst durch eine Rechtecksumme angenähert werden, die sich aus 4 Rechtecken der Breite $b = \frac{5-1}{4}$ zusammensetzt. Als Höhe der Rechtecke soll jeweils der Funktionswert der linken Intervallgrenze gewählt werden.
Für den Flächeninhalt dieser Rechtecksumme gilt:
$A = b \cdot f(1) + b \cdot f(1+b) + b \cdot f(1+2\cdot b) + b \cdot f(1+3\cdot b)$
$A = b \cdot \big(f(1) + f(1+b) + f(1+2\cdot b) + f(1+3\cdot b)\big)$.
Definieren Sie zur Berechnung der Fläche die Funktion f und die Intervallbreite b und geben Sie anschließend obigen Ausdruck in den Rechner ein.

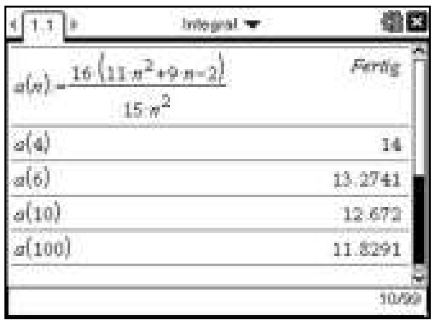


Verallgemeinerung (n Rechtecke)

Nun soll der Flächeninhalt durch eine Rechtecksumme aus n Rechtecken angenähert werden.
Die Breite dieser Rechtecke ist $b = \frac{5-1}{n}$.
Für den Flächeninhalt dieser Rechtecke gilt:
$A = b \cdot \big(f(1) + f(1+b) + \cdots + f(1+(n-1)\cdot b)\big)$.
Um diesen Ausdruck in den Rechner einzugeben, verwendet man den Befehl „Summe" (menu 4 5).
Die Notation kann der nebenstehenden Abbildung entnommen werden.



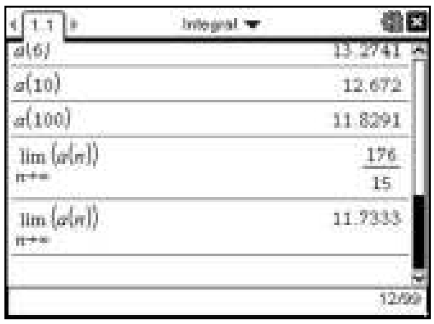
Der Flächeninhalt der Rechtecke hängt von der Anzahl der Rechtecke n ab. Definieren Sie deshalb die Funktion a(n), die jedem n den Inhalt der Gesamtfläche der Rechtecke zuordnet.
Bestimmen Sie nun durch Einsetzen verschiedener Werte für n eine Näherungslösung für Teilaufgabe a).



b) Bestimmung des Integrals

Das obige Integral entspricht der exakten Fläche unter der Kurve. Diese erhält man als Grenzwert der Funktion a(n):
$\int_1^5 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} a(n)$.

Der „Limes"- Befehl kann mit menu 4 4 aufgerufen werden.



Flächenberechnung

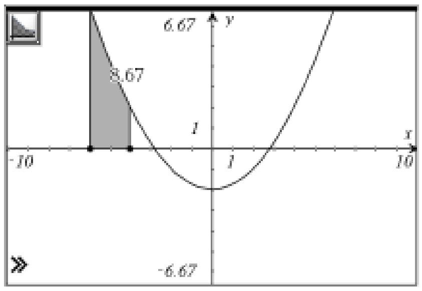
Aufgabe

Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ und den Geraden

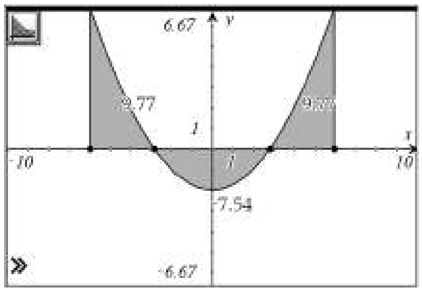
a) $x = -6$ und $x = -4$
b) $x = -6$ und $x = 6$

Näherungsweise Bestimmung der Fläche anhand des Graphen

Zeichne den Graphen von f. Mit menu 7 5 wird das Hilfsmittel zur Integralbestimmung aktiviert. Klicken Sie auf den Graphen unter dem die Fläche bestimmt werden soll. Mit zwei weiteren Klicks auf die x-Achse werden untere und obere Grenze des Integrals festgelegt (hier -6 und -4). Der Flächeninhalt wird näherungsweise bestimmt und angegeben.
Nach dem Verlassen des „Integral-Modus“ (mit esc) können die die Grenzen verändert werden, in dem die Punkte auf der x-Achse verschoben werden (ctrl).

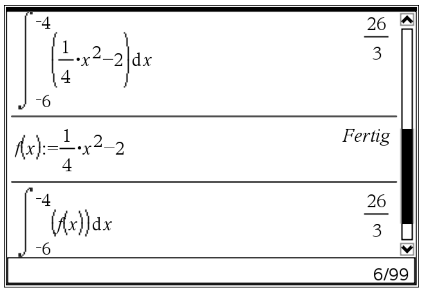


Zur Bestimmung der Flächen zwischen $x = -6$ und $x = 6$ kann nicht einfach -6 als untere und 6 als obere Grenze verwendet werden, da ein Teil des Graphen unterhalb der x-Achse verläuft.
Die drei Teilflächen müssen separat bestimmt und anschließend addiert werden. Eine Hilfe dabei ist, dass der Rechner im „Integral-Modus“ die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse anzeigt.
Zur Lösung der Aufgabe b) aktiviert man also den „Integral-Modus“ legt -6 als untere Grenze fest und fährt solange der x-Achse entlang, bis die Anzeige „Schnittpunkt“ erscheint. Diesen Punkt legt man als obere Grenze für das erste Integral und als untere Grenze für das zweite Integral fest. Entsprechend wird weiter verfahren.

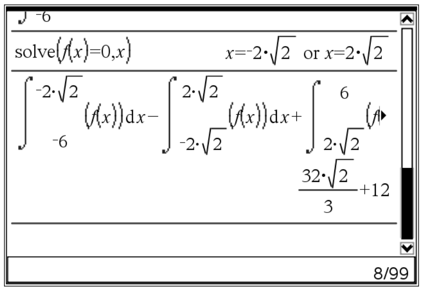


Berechnung von Integralen im Calculator

Zur exakten Lösung von Teilaufgabe a) wählt man im Calculator menu 4 2. Alternativ ist auch möglich.
Grenzen und Funktionsterm werden in üblicher Weise eingegeben.
Die Funktion f kann auch zuerst definiert werden und dann entsprechend der Definition in den Integralausdruck eingesetzt werden.



Zur Lösung der Aufgabe b) müssen zuerst die Schnittpunkte von f mit der x-Achse, also die Nullstellen von f, bestimmt werden. Dann werden die Integrale für die so erhaltenen Intervalle berechnet und anschließend addiert.
Dies kann auch in einem Schritt erledigt werden, dann muss allerdings das negative Vorzeichen des zweiten Integrals beachtet werden.



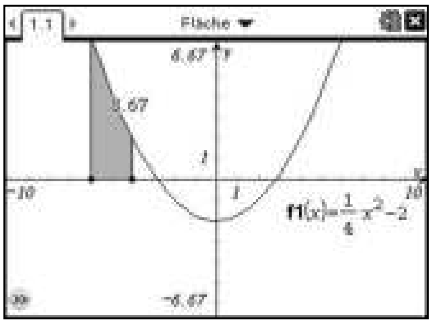
Aufgabe

Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ und den Geraden

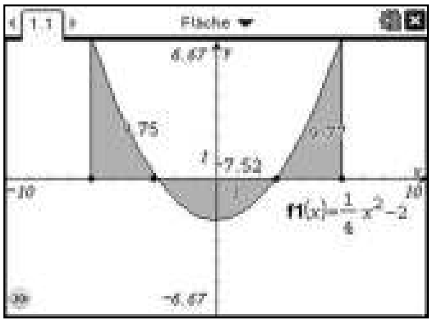
a) $x = -6$ und $x = -4$
b) $x = -6$ und $x = 6$

Näherungsweise Bestimmung der Fläche anhand des Graphen

Zeichne den Graphen von f. Mit (menu)(6)(7) wird das Hilfsmittel zur Integralbestimmung aktiviert. Klicken Sie auf den Graphen unter dem die Fläche bestimmt werden soll. Mit zwei weiteren Klicks auf die x-Achse werden untere und obere Grenze des Integrals festgelegt (hier -6 und -4). Der Flächeninhalt wird näherungsweise bestimmt und angegeben.
Nach dem Verlassen des „Integral-Modus“ (mit (esc)) können die die Grenzen verändert werden, in dem die Punkte auf der x-Achse verschoben werden ((ctrl)).

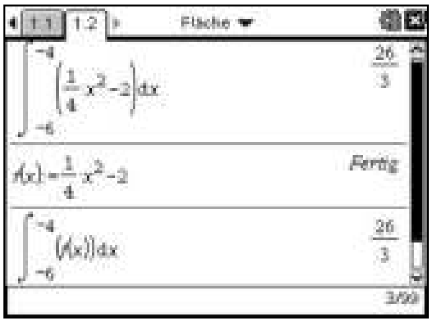


Zur Bestimmung der Flächen zwischen $x = -6$ und $x = 6$ kann nicht einfach -6 als untere und 6 als obere Grenze verwendet werden, da ein Teil des Graphen unterhalb der x-Achse verläuft.
Die drei Teilflächen müssen separat bestimmt und anschließend addiert werden. Eine Hilfe dabei ist, dass der Rechner im „Integral-Modus“ die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse anzeigt.
Zur Lösung der Aufgabe b) aktiviert man also den „Integral-Modus“ legt -6 als untere Grenze fest und fährt solange der x-Achse entlang, bis die Anzeige „Schnittpunkt“ erscheint. Diesen Punkt legt man als obere Grenze für das erste Integral und als untere Grenze für das zweite Integral fest. Entsprechend wird weiter verfahren.

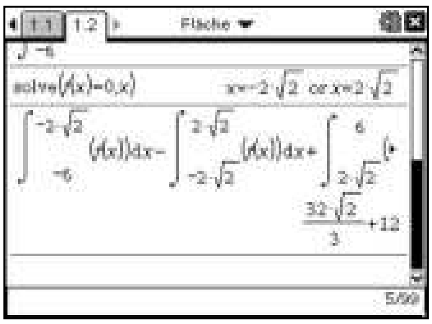


Berechnung von Integralen im Calculator

Zur exakten Lösung von Teilaufgabe a) wählt man im Calculator (menu)(4)(3).
Grenzen und Funktionsterm werden in üblicher Weise eingegeben.
Die Funktion f kann auch zuerst definiert werden und dann entsprechend der Definition in den Integralausdruck eingesetzt werden.



Zur Lösung der Aufgabe b) müssen zuerst die Schnittpunkte von f mit der x-Achse, also die Nullstellen von f, bestimmt werden. Dann werden die Integrale für die so erhaltenen Intervalle berechnet und anschließend addiert.
Dies kann auch in einem Schritt erledigt werden, dann muss allerdings das negative Vorzeichen des zweiten Integrals beachtet werden.



Folgen

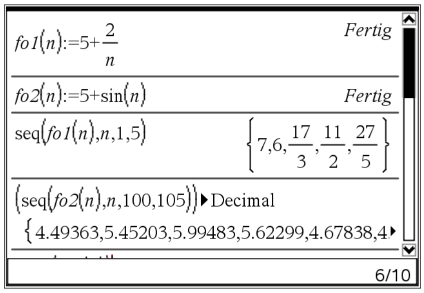
Aufgabe

Stellen Sie die Folgen $f_1(n) = 5 + \frac{2}{n}$ und $f_2(n) = 5 + \sin(n)$ graphisch dar und untersuchen Sie sie auf Grenzwerte. Untersuchen Sie dann weitere Folgen auf Grenzwerte.

Folgen im Calculator definieren
Man kann Folgen wie Funktionen im Calculator definieren. Dabei muss man nur im Auge behalten, dass die Definitionsmenge die Menge der Natürlichen Zahlen ist.
Die Funktion \`seq´ erlaubt es, dann Teilstücke der Folge als Liste auszugeben. Der Aufruf hat die Form

\`seq(term,variable,startwert,endwert)´

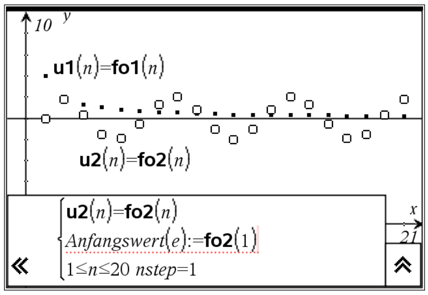
Als Ergebnis werden dazu alle Werte von \`term´ berechnet, die man durch Ersetzen von \`variable´ durch die natürlichen Zahlen von \`startwert´ bis \`endwert´ erhält.

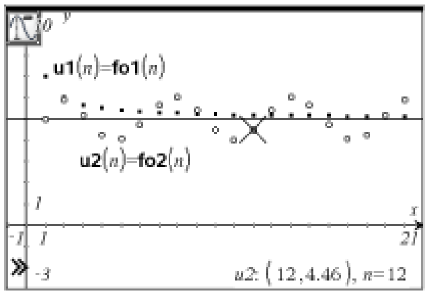


Folgen in Graphs & Geometry
Um die im Calculator definierten beiden Folgen anzuzeigen, wird zunächst die Fenstereinstellungen mit 5 1 aufgerufen und auf $-1 \leq x \leq 21$ sowie auf $-3 \leq y \leq 10$ eingestellt. Der Grafiktyp wird mit menu 3 5 auf Folgen eingestellt. Im Eingabefenster können dann die Folgen angezeigt werden.

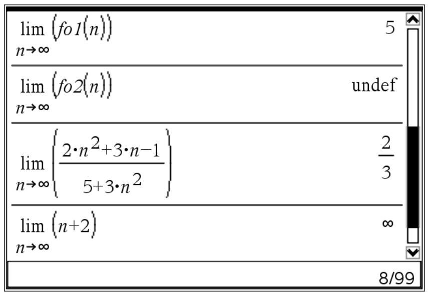
Hinweis: Man kann die Definitionen auch direkt bei u(n) eingeben, dann muss man aber den Startwert selbst berechnen.

Für die Eingabe der Geraden y = 5 muss man mit menu 3 1 wieder auf den Graphiktyp \`Funktionen´ umschalten.
Fährt man mit dem Zeiger auf einen Punkt einer Folge, so erhält man mit (ctrl menu) ein Menu mit dem man Beschriftung (2) und Attribute (3) bestimmen kann.
Mit 6 kann man einen Spur-Zeiger auf den Punkt setzen, der Folgennummer und Wert des Punktes anzeigt und mit dem Wippschalter auf die Nachbarpunkte bewegt werden kann.

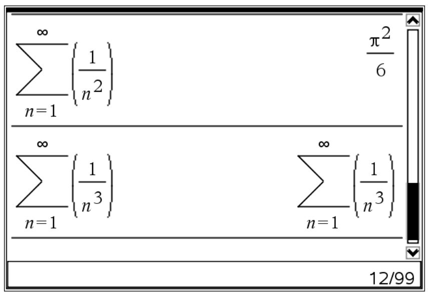




Grenzwerte von Folgen
Grenzwerte berechnet der Limes-Operator. Man erhält eine Schablone des Operators mit ctrl. Unter dem lim-Zeichen trägt man n → ∞ ein, in der Klammer den von n abhängigen Folgenterm.
Wenn der Grenzwert existiert (oder die Folge unbeschränkt wächst oder fällt), wird ein Ergebnis ausgegeben.
Ist kein Grenzwert vorhanden, wird \`undef´ angezeigt.



Summenfolgen
Grenzwerte von Summenfolgen werden mit dem Summen-Operator berechnet (ctrl). Man muss dabei als obere Grenze ∞ eingeben. Wenn die unendliche Summe existiert und der Rechner sie berechnen kann, gibt er das Ergebnis aus. Ist der Rechner nicht in der Lage, die Summe zu berechnen, so gibt er den eingegebenen Term unausgewertet zurück. Daraus kann man allerdings nicht schließen, dass der Grenzwert nicht existiert.
Der nicht berechnete zweite Grenzwert im Beispiel existiert nämlich ($\xi(3) \approx 1{,}2020569$).



Folgen

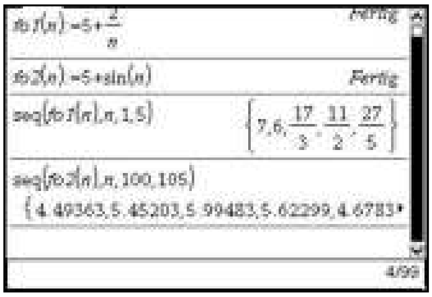
Aufgabe

Stellen Sie die Folgen $f_1(n) = 5 + \frac{2}{n}$ und $f_2(n) = 5 + \sin(n)$ graphisch dar und untersuchen Sie sie auf Grenzwerte. Untersuchen Sie dann weitere Folgen auf Grenzwerte.

Folgen im Calculator definieren
Man kann Folgen wie Funktionen im Calculator definieren. Dabei muss man nur im Auge behalten, dass die Definitionsmenge die Menge der Natürlichen Zahlen ist.
Die Funktion \`seq´ erlaubt es, dann Teilstücke der Folge als Liste auszugeben. Der Aufruf hat die Form

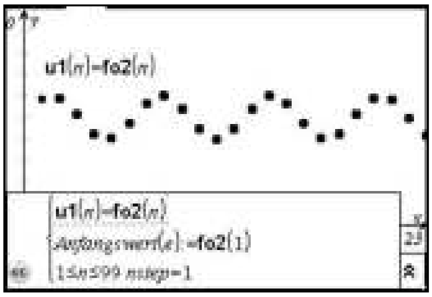
\`seq(term,variable,startwert,endwert)´

Als Ergebnis werden dazu alle Werte von \`term´ berechnet, die man durch Ersetzen von \`variable´ durch die natürlichen Zahlen von \`startwert´ bis \`endwert´ erhält.

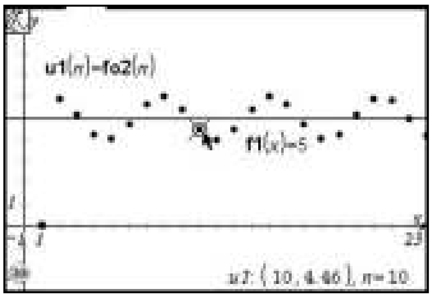


Folgen in Graphs
Um die im Calculator definierten beiden Folgen anzuzeigen, wird zunächst die Fenstereinstellungen mit (menu)(4)(1) aufgerufen und auf $-1 \le x \le 21$ sowie auf $-3 \le y \le 10$ eingestellt. Der Grafiktyp wird mit (menu)(3)(5) auf Folgen eingestellt. Im Eingabefenster können dann die Folgen angezeigt werden.

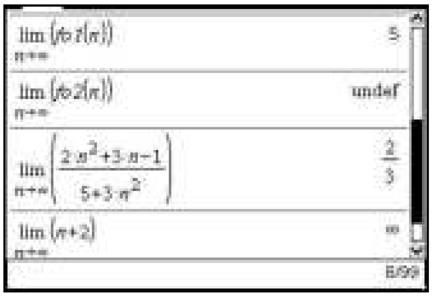
Hinweis: Man kann die Definitionen auch direkt bei u(n) eingeben, dann muss man aber den Startwert selbst berechnen.



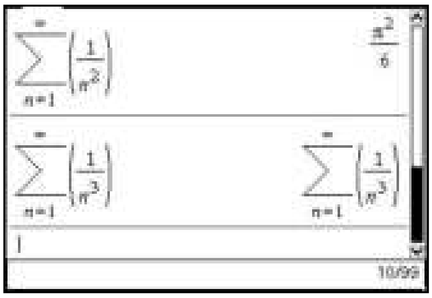
Für die Eingabe der Geraden y = 5 muss man mit (menu)(3)(1) wieder auf den Graphiktyp \`Funktionen´ umschalten.
Fährt man mit dem Zeiger auf einen Punkt einer Folge, so erhält man mit (ctrl)(menu) ein Menu mit dem man Beschriftung ((2)) und Attribute ((3)) bestimmen kann.
Mit (7) kann man einen Spur-Zeiger auf den Punkt setzen, der Folgennummer und Wert des Punktes anzeigt und mit dem Wippschalter auf die Nachbarpunkte bewegt werden kann.



Grenzwerte von Folgen
Grenzwerte berechnet der Limes-Operator. Man erhält eine Schablone des Operators mit (menu)(4)(4). Unter dem lim-Zeichen trägt man n → ∞ ein, in der Klammer den von n abhängigen Folgenterm.
Wenn der Grenzwert existiert (oder die Folge unbeschränkt wächst oder fällt), wird ein Ergebnis ausgegeben.
Ist kein Grenzwert vorhanden, wird \`undef´ angezeigt.



Summenfolgen
Grenzwerte von Summenfolgen werden mit dem Summen-Operator berechnet ((menu)(4)(5)). Man muss dabei als obere Grenze ∞ eingeben. Wenn die unendliche Summe existiert und der Rechner sie berechnen kann, gibt er das Ergebnis aus. Ist der Rechner nicht in der Lage, die Summe zu berechnen, so gibt er den eingegebenen Term unausgewertet zurück. Daraus kann man allerdings nicht schließen, dass der Grenzwert nicht existiert.
Der nicht berechnete zweite Grenzwert im Beispiel existiert nämlich ($\xi(3) \approx 1{,}2020569$).



Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Aufgabe

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme (LGS).

a)
$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= -7 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 &= 13 \end{aligned}$$

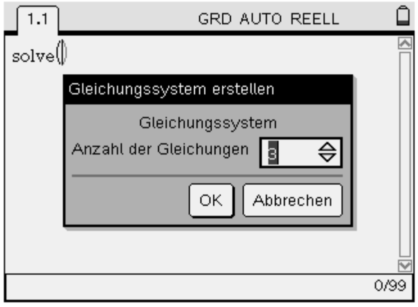
b)
$$\begin{aligned} -4x_1 - 3x_2 - x_3 &= -5 \\ -6x_1 - 2x_2 + 10x_3 &= -7 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Erstellen eines Linearen Gleichungsystems

Zum Lösen eines LGS wird zuerst der „solve“-Befehl aufgerufen (menu 3 1). Mit ctrl öffnet sich ein Menü.

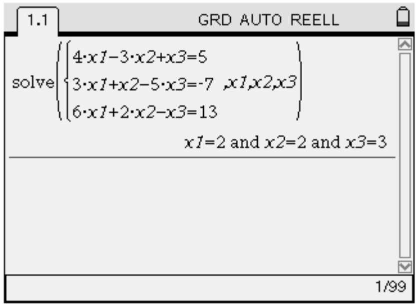
Wählen Sie das letzte Symbol in der ersten Zeile aus und geben Sie die Anzahl der Zeilen Ihres LGS ein (3 ist die Standardeinstellung).
Sollten Sie versehentlich eine Zeile zu wenig haben, lässt sich das nachträglich bei der Eingabe der Gleichungen noch mit ↵ korrigieren.



Lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung

Geben Sie nun die Gleichungen ein.

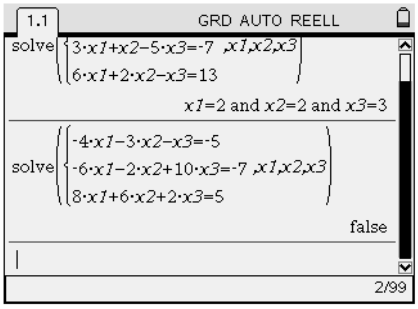
Die „·“-Zeichen müssen nicht eingegeben werden, d.h. 4x1 ist ausreichend und wird vom Rechner zu 4·x1 ergänzt.
Abgetrennt durch Kommata müssen noch die Variablen angegeben werden. Mit enter erhält man die Lösung.



Lineare Gleichungssysteme die keine Lösung besitzen

Die Vorgehensweise ist dieselbe wie oben.

Besitzt ein LGS jedoch keine Lösung, so zeigt der Rechner „false“ an.

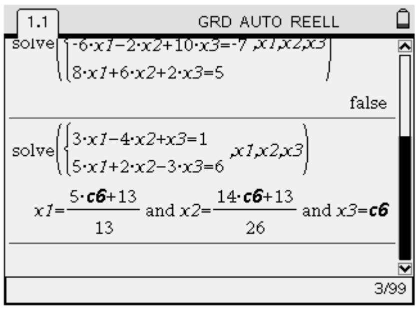


Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen

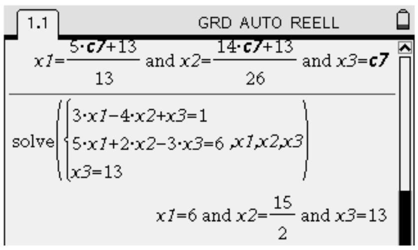
Die Vorgehensweise ist dieselbe wie oben.

Besitzt ein LGS jedoch unendlich viele Lösungen, so zeigt der Rechner diese mit Hilfe eines Parameters an.

Hinweis: In der Abbildung „c6“. Diese „c“ werden durchnummeriert. Es kann also bei Ihnen eine andere Nummer auftauchen.



Wird jedoch nur eine dieser Lösungen benötigt, kann man x_3 auch (geschickt) vorgeben, in dem man das LGS nun nach unten kopiert (markieren und enter), eine Zeile hinzufügt (an das Ende der letzten Gleichung fahren und ↵) und x_3 entsprechend wählt.



Aufgabe

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme (LGS).

a)

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= -7 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 &= 13 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -4x_1 - 3x_2 - x_3 &= -5 \\ -6x_1 - 2x_2 + 10x_3 &= -7 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Erstellen eines Linearen Gleichungsystems

Zum Lösen eines LGS wird zuerst der „solve"-Befehl aufgerufen (menu 3 1). Mit ⊞ öffnet sich ein Menü.

Wählen Sie das letzte Symbol in der ersten Zeile aus und geben Sie die Anzahl der Zeilen Ihres LGS ein (3 ist die Standardeinstellung).

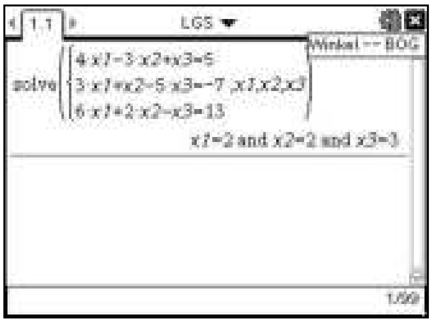
Sollten Sie versehentlich eine Zeile zu wenig haben, lässt sich das nachträglich bei der Eingabe der Gleichungen noch mit ↵ korrigieren.

Lineare Gleichungssysteme mit genau einer Lösung

Geben Sie nun die Gleichungen ein.

Die „·"-Zeichen müssen nicht eingegeben werden, d.h. 4x1 ist ausreichend und wird vom Rechner zu 4·x1 ergänzt.

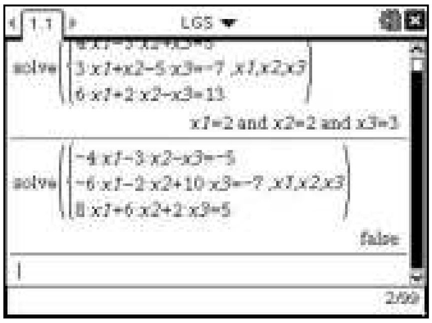
Abgetrennt durch Kommata müssen noch die Variablen angegeben werden. Mit enter erhält man die Lösung.



Lineare Gleichungssysteme die keine Lösung besitzen

Die Vorgehensweise ist dieselbe wie oben.

Besitzt ein LGS jedoch keine Lösung, so zeigt der Rechner „false" an.

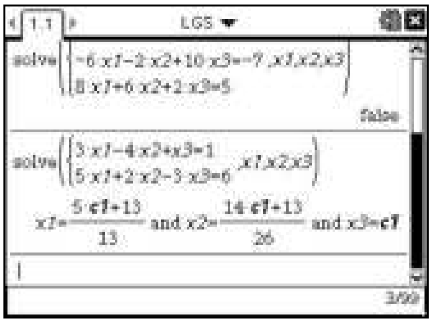


Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen

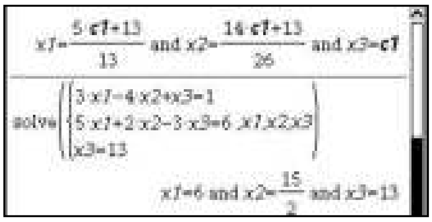
Die Vorgehensweise ist dieselbe wie oben.

Besitzt ein LGS jedoch unendlich viele Lösungen, so zeigt der Rechner diese mit Hilfe eines Parameters an.

Hinweis: In der Abbildung „c1". Diese „c" werden durchnummeriert. Es kann also bei Ihnen eine andere Nummer auftauchen.



Wird jedoch nur eine dieser Lösungen benötigt, kann man x_3 auch (geschickt) vorgeben, in dem man das LGS nun nach unten kopiert (markieren und enter), eine Zeile hinzufügt (an das Ende der letzten Gleichung fahren und ↵) und x_3 entsprechend wählt.



Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Aufgabe

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat den Hochpunkt H (-2 I -1) und besitzt im Wendepunkt W (1 I -3) die Tangentensteigung 3.
Bestimmen Sie den Funktionsterm exakt.

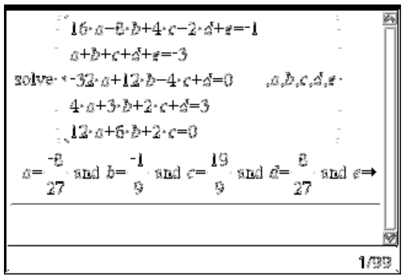
„Klassischer“ Lösungsweg

Sie können die Aufgabe lösen, indem Sie zuerst auf dem Papier die notwendigen fünf Gleichungen mit Hilfe der obigen Angaben formulieren und das so erhaltene LGS mit dem Rechner lösen.

Dazu wird der „solve“-Befehl aufgerufen (menu 3 1). Mit ctrl × öffnet sich ein Menü. Wählen Sie das letzte Symbol in der ersten Zeile aus und geben Sie die Anzahl der Gleichungen Ihres LGS ein (hier 5). Geben Sie nun die Gleichungen ein. Abgetrennt durch Kommata müssen noch die Variablen angegeben werden.

Mit enter erhält man die Lösung.

$$f(x) = -\frac{8}{27}x^4 - \frac{1}{9}\cdot x^3 + \frac{19}{9}\cdot x^2 + \frac{8}{27}\cdot x + 5$$



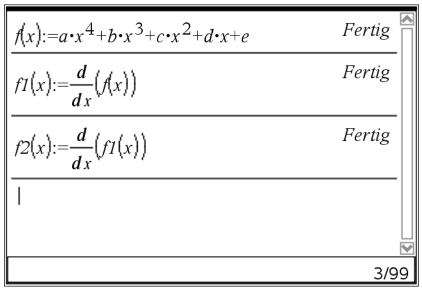
„Alternativer“ Lösungsweg

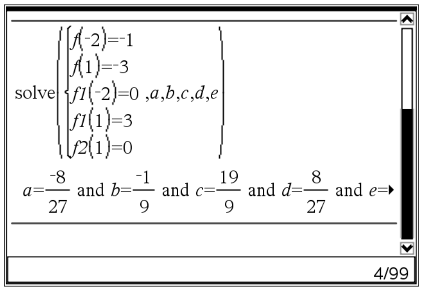
Da beim Aufstellen der Gleichungen aus den oben gegebenen Angaben, sowohl eine allgemeine Formulierung der Funktion f, wie auch deren erste und zweite Ableitungen benötigt werden, sollen diese zuerst definiert werden.

Es bietet sich an die erste Ableitung als f1(x) und die zweite Ableitung als f2(x) zu definieren.

Hinweis: Die Rechenzeichen „·“ (×) müssen bei der Definition mit eingegeben werden, damit der Rechner nicht mit Variablen \`ax´, \`bx´, usw. … rechnet.

Nun können die Gleichungen in „Funktionsschreibweise“ eingegeben werden.

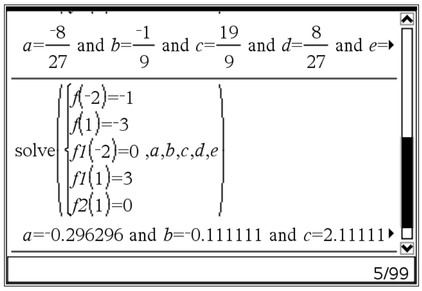




Dokumenteneinstellungen „EXAKT“, „AUTO“ und „APPRX“

Mit (home 8 1) lässt sich einstellen, ob exakte Lösungen, oder evtl. gerundete Dezimalzahlen als Ergebnis ausgegeben werden sollen.
Möchte man eine Näherungslösung mit Dezimalzahlen, so muss „Approximiert“ gewählt werden. Die Anzahl der ausgegebenen Nachkommastellen lässt sich ebenfalls mit (home 8 1) einstellen.

Die Einstellung „Exakt“ liefert das exakte Ergebnis.
Mit der Einstellung „Auto“ wird das Ergebnis in Dezimalzahlen geliefert, wenn bei der Eingabe Dezimalzahlen verwendet wurden, also z.B. 0,25 anstatt $\frac{1}{4}$.



Aufgabe

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat den Hochpunkt H (-2 I -1) und besitzt im Wendepunkt W (1 I -3) die Tangentensteigung 3.
Bestimmen Sie den Funktionsterm exakt.

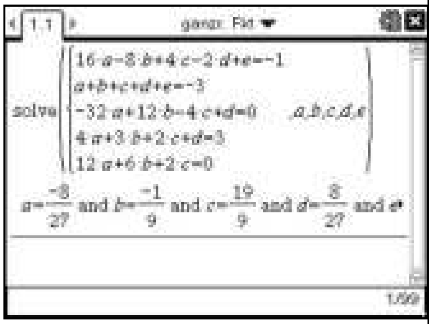
„Klassischer“ Lösungsweg

Sie können die Aufgabe lösen, indem Sie zuerst auf dem Papier die notwendigen fünf Gleichungen mit Hilfe der obigen Angaben formulieren und das so erhaltene LGS mit dem Rechner lösen.

Dazu wird der „solve“-Befehl aufgerufen (menu 3 1). Mit ⁘ öffnet sich ein Menü. Wählen Sie das letzte Symbol in der ersten Zeile aus und geben Sie die Anzahl der Gleichungen Ihres LGS ein (hier 5). Geben Sie nun die Gleichungen ein. Abgetrennt durch Kommata müssen noch die Variablen angegeben werden.

Mit enter erhält man die Lösung.

$$f(x) = -\frac{8}{27}\cdot x^4 - \frac{1}{9}\cdot x^3 + \frac{19}{9}\cdot x^2 + \frac{8}{27}\cdot x + 5$$



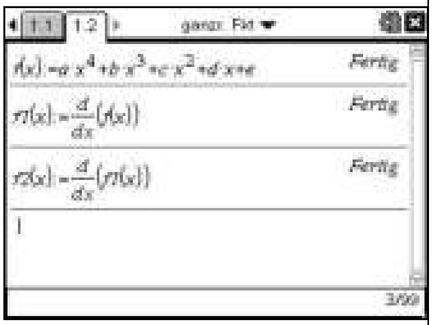
„Alternativer“ Lösungsweg

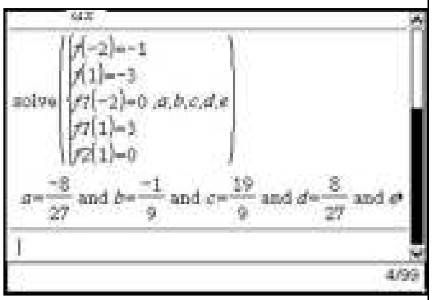
Da beim Aufstellen der Gleichungen aus den oben gegebenen Angaben, sowohl eine allgemeine Formulierung der Funktion f, wie auch deren erste und zweite Ableitungen benötigt werden, sollen diese zuerst definiert werden.

Es bietet sich an die erste Ableitung als f1(x) und die zweite Ableitung als f2(x) zu definieren.

Hinweis: Die Rechenzeichen „·“ (×) müssen bei der Definition mit eingegeben werden, damit der Rechner nicht mit Variablen \`ax´, \`bx´, usw. … rechnet.

Nun können die Gleichungen in „Funktionsschreibweise“ eingegeben werden.

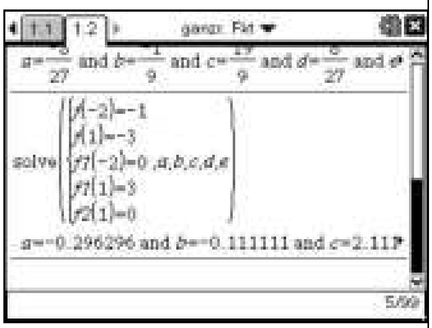




Dokumenteneinstellungen „EXAKT“, „AUTO“ und „APPRX“

Mit on 5 2 lässt sich einstellen, ob exakte Lösungen, oder evtl. gerundete Dezimalzahlen als Ergebnis ausgegeben werden sollen.
Möchte man eine Näherungslösung mit Dezimalzahlen, so muss „Approximiert“ gewählt werden. Die Anzahl der ausgegebenen Nachkommastellen lässt sich ebenfalls mit on 5 2 einstellen.

Die Einstellung „Exakt“ liefert das exakte Ergebnis.
Mit der Einstellung „Auto“ wird das Ergebnis in Dezimalzahlen geliefert, wenn bei der Eingabe Dezimalzahlen verwendet wurden, also z.B. 0,25 anstatt $\frac{1}{4}$.

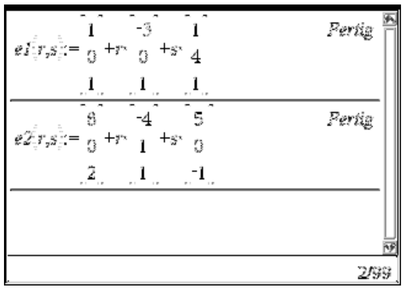
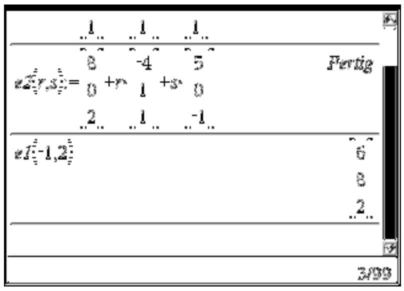
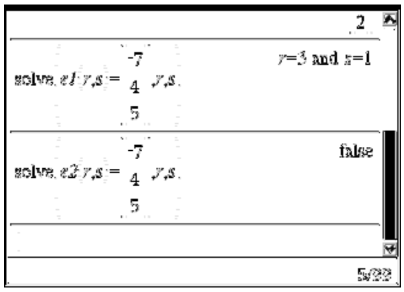
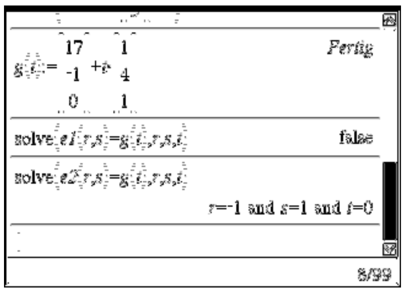
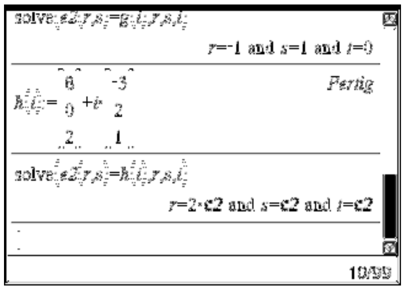


Parametergleichung einer Ebene

Aufgabe: Gegeben seien die Ebenen E_1 und E_2, sowie die Gerade g und h.

$$E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\ ,\ E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$$

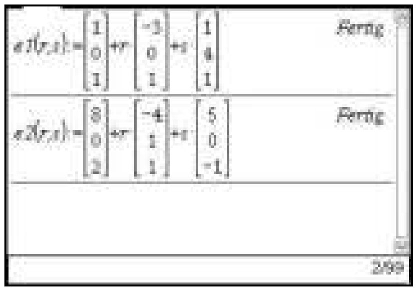
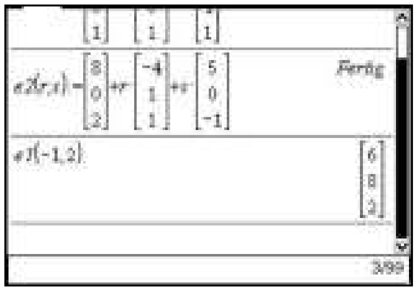
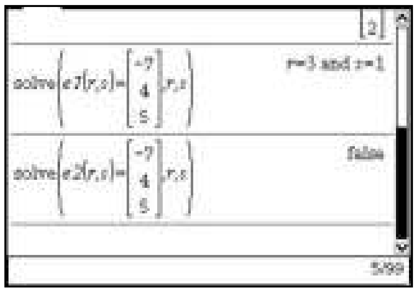
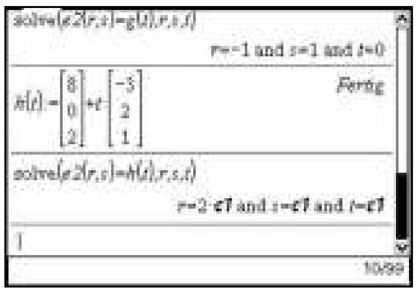
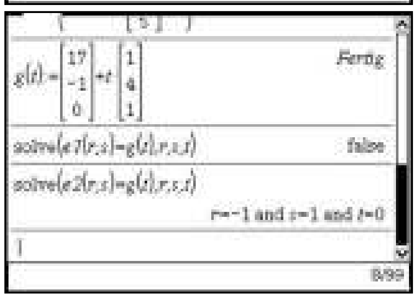
$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}17\\-1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\ ,\ g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

Eingabe einer Ebenengleichung in Parameterform Eine Ebene kann als vektorwertige Funktion mit zwei Parametern definiert werden, d.h. der Funktionswert (in diesem Fall der jeweilige Punkt der Ebene) ist abhängig vom Wert der Parameter r und s in der Gleichung.	
Berechnung von Punkten in der Ebene Um nun Punkte zu ermitteln, die in einer Ebene liegen, können beliebige Werte für r und s eingesetzt werden. Der Rechner liefert den zugehörigen Ortsvektor des Punkts.	
Punktprobe Um zu überprüfen, ob ein Punkt P, z.B. P (-7 I 4 I 5), in der Ebene E_1 liegt, wird der solve-Befehl verwendet. Gibt der Rechner Werte für die Parameter (hier r und s) aus, so liegt der Punkt in der Ebene. Zeigt er „false“ an, so liegt der Punkt nicht in der Ebene.	
Gegenseitige Lage einer Ebene und einer Gerade Mit Hilfe des solve-Befehls lässt sich bestimmen, ob eine Ebene und eine Gerade keinen, einen oder unendlich viele gemeinsame Punkte besitzen. Im Falle der Parallelität existiert kein gemeinsamer Punkt, der Rechner liefert „false“. Existiert ein Schnittpunkt, so liefert der Rechner Werte für die Parameter. Der Ortsvektor des Schnittpunktes kann durch Einsetzen erhalten werden. Liegt die Gerade in der Ebene, existieren unendlich viele gemeinsame Punkte. Der Rechner liefert Ergebnisse für r, s und t in Abhängigkeit einer Variablen, z.B. c2.	 

Aufgabe: Gegeben seien die Ebenen E_1 und E_2, sowie die Gerade g und h.

$$E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\ ,\ E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}17\\-1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\ ,\ \ g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

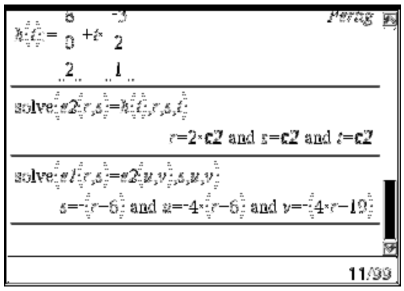
Eingabe einer Ebenengleichung in Parameterform Eine Ebene kann als vektorwertige Funktion mit zwei Parametern definiert werden, d.h. der Funktionswert (in diesem Fall der jeweilige Punkt der Ebene) ist abhängig vom Wert der Parameter r und s in der Gleichung.	
Berechnung von Punkten in der Ebene Um nun Punkte zu ermitteln, die in einer Ebene liegen, können beliebige Werte für r und s eingesetzt werden. Der Rechner liefert den zugehörigen Ortsvektor des Punkts.	
Punktprobe Um zu überprüfen, ob ein Punkt P, z.B. P (-7 I 4 I 5), in der Ebene E_1 liegt, wird der solve-Befehl verwendet. Gibt der Rechner Werte für die Parameter (hier r und s) aus, so liegt der Punkt in der Ebene. Zeigt er „false“ an, so liegt der Punkt nicht in der Ebene.	
Gegenseitige Lage einer Ebene und einer Gerade Mit Hilfe des solve-Befehls lässt sich bestimmen, ob eine Ebene und eine Gerade keinen, einen oder unendlich viele gemeinsame Punkte besitzen. Im Falle der Parallelität existiert kein gemeinsamer Punkt, der Rechner liefert „false“. Existiert ein Schnittpunkt, so liefert der Rechner Werte für die Parameter. Der Ortsvektor des Schnittpunktes kann durch Einsetzen erhalten werden. Liegt die Gerade in der Ebene, existieren unendlich viele gemeinsame Punkte. Der Rechner liefert Ergebnisse für r, s und t in Abhängigkeit einer Variablen, z.B. c2.	

Parametergleichung einer Ebene

Bestimmung der Schnittgerade zweier Ebenen

Gleichsetzen der Ebenengleichungen liefert den Ansatz zur Bestimmung der Schnittgeraden. Dabei ist zu beachten, dass in den beiden Ebenengleichungen vier verschiedene Parameter auftreten müssen, denn für jeden Parameter kann eine andere beliebige reelle Zahl stehen.

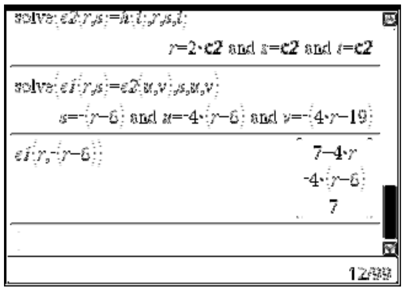
Gibt es eine Schnittgerade (und damit unendlich viele Lösungen der Gleichung), dann ist es günstig, sich die Lösungen gleich in Abhängigkeit eines der Parameter angeben zu lassen. Dies erreicht man, indem man diesen Parameter im solve-Befehl **nicht** zu den Variablen schreibt, nach denen der Rechner die Gleichung lösen soll.



Einsetzen von $-(r-6)$ für s in die Gleichung von E_1 liefert die Geradengleichung, denn

$$\begin{pmatrix} 7-4\cdot r \\ -4\cdot(r-6) \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+r\cdot(-4) \\ 24+r\cdot(-4) \\ 7+r\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 7 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

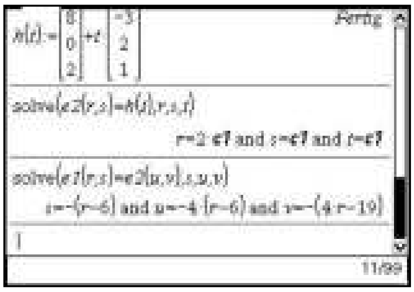
Es macht keinen Sinn $u=-4\cdot(r-6)$ oder $v=-(4\cdot r-19)$ zu verwenden, da u und r bzw. v und r Parameter verschiedener Ebenengleichungen sind.



Bestimmung der Schnittgerade zweier Ebenen

Gleichsetzen der Ebenengleichungen liefert den Ansatz zur Bestimmung der Schnittgeraden. Dabei ist zu beachten, dass in den beiden Ebenengleichungen vier verschiedene Parameter auftreten müssen, denn für jeden Parameter kann eine andere beliebige reelle Zahl stehen.

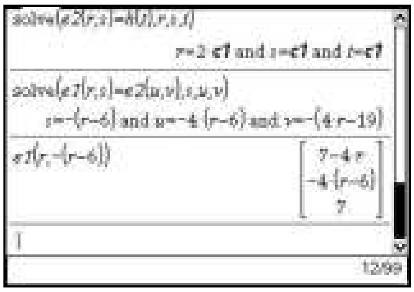
Gibt es eine Schnittgerade (und damit unendlich viele Lösungen der Gleichung), dann ist es günstig, sich die Lösungen gleich in Abhängigkeit eines der Parameter angeben zu lassen. Dies erreicht man, indem man diesen Parameter im solve-Befehl **nicht** zu den Variablen schreibt, nach denen der Rechner die Gleichung lösen soll.



Einsetzen von $-(r-6)$ für s in die Gleichung von E_1 liefert die Geradengleichung, denn

$$\begin{pmatrix} 7-4\cdot r \\ -4\cdot(r-6) \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+r\cdot(-4) \\ 24+r\cdot(-4) \\ 7+r\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 7 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

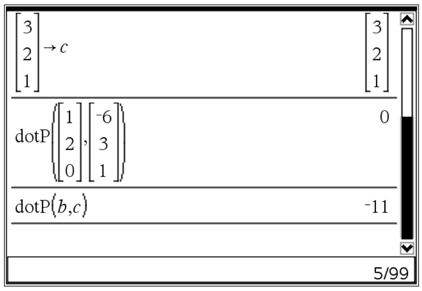
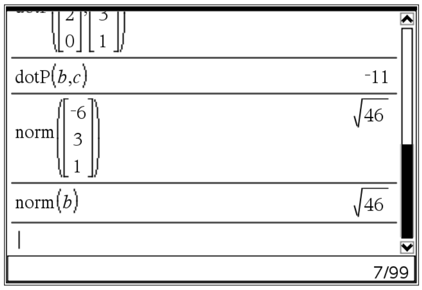
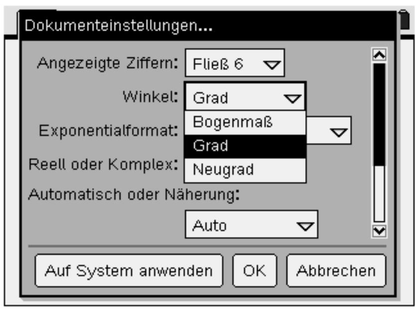
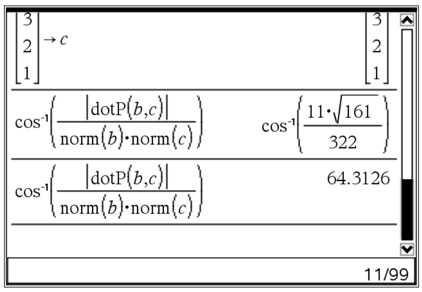
Es macht keinen Sinn $u=-4\cdot(r-6)$ oder $v=-(4\cdot r-19)$ zu verwenden, da u und r bzw. v und r Parameter verschiedener Ebenengleichungen sind.



Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren

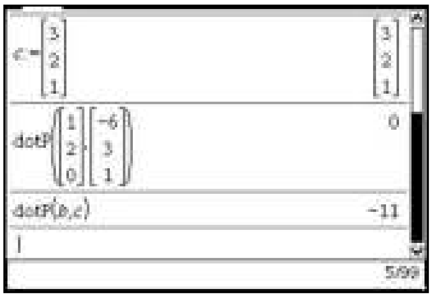
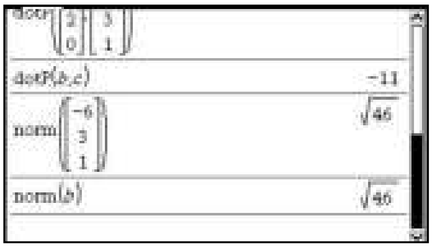
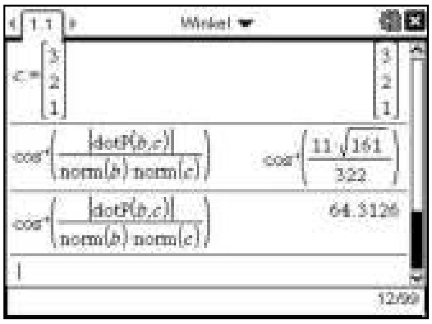
Aufgabe: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-6\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander sind.
b) Bestimmen Sie die Länge des Vektors $\vec{b}$.
c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Skalarprodukt Zur Berechnung des Skalarprodukts zweier Vektoren verwendet man den Befehl „dotP“ (menu 7 C 3). Die Vektoren werden, durch ein Komma getrennt, eingegeben. Die Vektoren können auch zuerst eingegeben und unter z.B. a, b und c abgespeichert werden und dann auf diese Weise in den dotP-Befehl eingegeben werden. Da das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Null ist, folgt die Orthogonalität.	
Betrag eines Vektors Um den Betrag bzw. die Länge eines Vektors zu bestimmen, wird der Befehl „norm“ (menu 7 7 1) verwendet. Der Vektor kann auch zuerst eingegeben und unter z.B. b abgespeichert werden und dann auf diese Weise in den norm-Befehl eingegeben werden.	
Wechsel zwischen Gradmaß und Bogenmaß Um Winkel zwischen Vektoren berechnen zu können, muss im Rechner das Gradmaß eingestellt sein. Steht in der Kopfzeile des Bildschirms „GRD“, ist dies der Fall. Steht dort BOG ist das Bogenmaß eingestellt. Ein Wechsel dieser Einstellungen ist in den Dokumenteinstellungen möglich (home 8 1). Klickt man abschließend auf „OK“, so ist die Einstellung nur für das aktuelle Dokument verändert, klickt man auf „Auf System anwenden“, so wird die Einstellung auch für neue Dokumente beibehalten.	
Berechnung von Winkeln zwischen zwei Vektoren Für den Winkel α zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\lvert\vec{b}\cdot\vec{c}\rvert}{\lvert\vec{b}\rvert\cdot\lvert\vec{c}\rvert}$, d.h. $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{\lvert\vec{b}\cdot\vec{c}\rvert}{\lvert\vec{b}\rvert\cdot\lvert\vec{c}\rvert}\right)$. Dabei muss beachtet werden, dass das Rechenzeichen „·“ im Zähler für ein Skalarprodukt steht (hier werden Vektoren skalar multipliziert), das „·“ im Nenner steht für die „normale“ Multiplikation zweier Zahlen (nämlich der Beträge der Vektoren). Die Betragstriche für den Zähler erhält man mit ctrl × (mittlere Zeile links). Beträge von Vektoren berechnet man mit norm (s.oben). Es ist sinnvoll die Vektoren zuerst einzugeben um in der Formel dann nur noch mit ihren Bezeichnungen arbeiten zu müssen. Um für den Winkel einen Näherungswert zu erhalten wählt man statt enter die Tastenkombination ctrl enter.	

Aufgabe: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander sind.
b) Bestimmen Sie die Länge des Vektors $\vec{b}$.
c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Skalarprodukt Zur Berechnung des Skalarprodukts zweier Vektoren verwendet man den Befehl „dotP“ ([menu] [7] [C] [3]). Die Vektoren werden, durch ein Komma getrennt, eingegeben. Die Vektoren können auch zuerst eingegeben und unter z.B. a, b und c abgespeichert werden und dann auf diese Weise in den dotP-Befehl eingegeben werden. Da das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Null ist, folgt die Orthogonalität.	
Betrag eines Vektors Um den Betrag bzw. die Länge eines Vektors zu bestimmen, wird der Befehl „norm“ ([menu] [7] [7] [1]) verwendet. Der Vektor kann auch zuerst eingegeben und unter z.B. b abgespeichert werden und dann auf diese Weise in den norm-Befehl eingegeben werden.	
Wechsel zwischen Gradmaß und Bogenmaß Um Winkel zwischen Vektoren berechnen zu können, muss im Rechner das Gradmaß eingestellt sein. Steht in der Kopfzeile des Bildschirms „GRD“, ist dies der Fall. Steht dort BOG ist das Bogenmaß eingestellt. Ein Wechsel dieser Einstellungen ist in den Dokumenteinstellungen möglich ([on] [5] [2] [1]). Klickt man abschließend auf „OK“, so ist die Einstellung nur für das aktuelle Dokument verändert, klickt man auf „Standard“, so wird die Einstellung auch für neue Dokumente beibehalten.	
Berechnung von Winkeln zwischen zwei Vektoren Für den Winkel α zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\lvert\vec{b}\cdot\vec{c}\rvert}{\lvert\vec{b}\rvert\cdot\lvert\vec{c}\rvert}$, d.h. $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{\lvert\vec{b}\cdot\vec{c}\rvert}{\lvert\vec{b}\rvert\cdot\lvert\vec{c}\rvert}\right)$. Dabei muss beachtet werden, dass das Rechenzeichen „·“ im Zähler für ein Skalarprodukt steht (hier werden Vektoren skalar multipliziert), das „·“ im Nenner steht für die „normale“ Multiplikation zweier Zahlen (nämlich der Beträge der Vektoren). Die Betragstriche für den Zähler erhält man mit [templates] (mittlere Zeile links). Beträge von Vektoren berechnet man mit norm (s.oben). Es ist sinnvoll die Vektoren zuerst einzugeben um in der Formel dann nur noch mit ihren Bezeichnungen arbeiten zu müssen. Um für den Winkel einen Näherungswert zu erhalten wählt man statt [enter] die Tastenkombination [ctrl] [enter].	

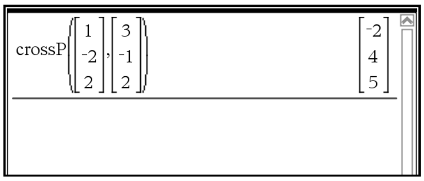
Normalform und Koordinatengleichung einer Ebene

Aufgabe: Gegeben seien die Ebenen

E$_1$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, E$_2$: $5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$ und E$_3$: $3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$

Bestimmung der Normalenform der Ebenengleichung

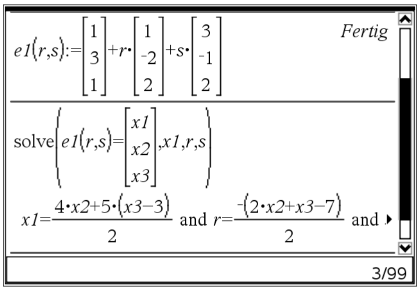
Mit Hilfe des Kreuzprodukts wird ein Normalenvektor der Ebene E$_1$ berechnet. Dazu wird der Befehl „crossP“ (menu 7 C 2) verwendet. Die Vektoren, zu denen ein Normalenvektor berechnet werden soll, werden durch ein Komma abgetrennt eingegeben.
Wählt man nun den Stützvektor als Ortsvektor eines Punktes aus E$_1$, so ist die Normalenform von E$_1$ schnell bestimmt.



Berechnung der Koordinatenform aus der Parameterform

Um eine Koordinatenform der in Parameterform gegebenen Ebene E$_1$ zu erhalten, löst man die Gleichung $e1(r,s) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ nach x$_1$ und den Parametern r und s auf.
Die Lösungen für r und s interessieren nicht, die Lösung für x$_1$ ist die gesuchte Koordinatenform.

Im Beispiel erhält man nach Umformung: E_1: $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 15$.



Bestimmung der Koordinatenform aus drei Punkten

Bsp.: A (1 I 2 I 1), B (2 I 0 I 3), C (4 I 1 I 3)

Vorüberlegung:

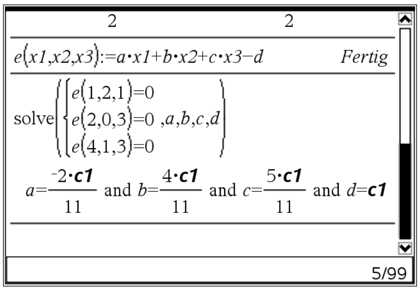
$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ entspricht $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 - d = 0$

Zuerst wird eine Funktion für die allgemeine Form der Koordinatengleichung definiert:
$e(x_1,x_2,x_3) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 - d$

(Das Rechenzeichen „·“ muss hier mit eingegeben werden.)

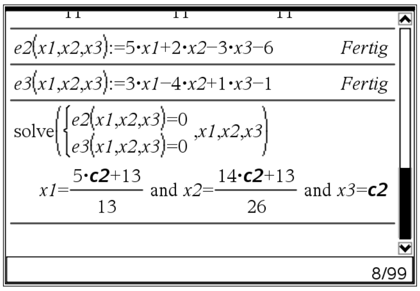
Anschließend kann das übliche LGS gelöst werden.

Man erhält für c1=11 im Beispiel E: $-2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 11$.



Bestimmung der Schnittgeraden zweier Ebenen in Koordinatenform (E$_2$ und E$_3$)

Die Punkte auf der Schnittgeraden liegen sowohl in E$_2$ wie auch in E$_3$. Die beiden Ebenengleichungen bilden also ein LGS, das entsprechend gelöst wird.
Um „schöne“ Zahlen zu erhalten wählen Sie z.B. $x_3 = 13t$,
dann ist $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 + t \cdot 5\\0{,}5 + t \cdot 7\\0 + t \cdot 13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\13\end{pmatrix}$



Gegenseitige Lage zweier Ebenen

Liefert der Nspire bei der Lösung des LGS zur Bestimmung einer Schnittgeraden „false“, so existieren keine gemeinsamen Punkte der Ebenen, d.h. die Ebenen sind parallel.
Liefert der Nspire ein Ergebnis mit zwei verschiedenen Variablen c (z.B. c3 und c4), so sind die betrachteten Ebenen identisch.

Normalenform und Koordinatengleichung einer Ebene

Aufgabe: Gegeben seien die Ebenen

E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, E_2: $5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$ und E_3: $3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$

Bestimmung der Normalenform der Ebenengleichung

Mit Hilfe des Kreuzprodukts wird ein Normalenvektor der Ebene E_1 berechnet. Dazu wird der Befehl „crossP“ (menu 7 C 2) verwendet. Die Vektoren, zu denen ein Normalenvektor berechnet werden soll, werden durch ein Komma abgetrennt eingegeben.
Wählt man nun den Stützvektor als Ortsvektor eines Punktes aus E_1, so ist die Normalenform von E_1 schnell bestimmt.

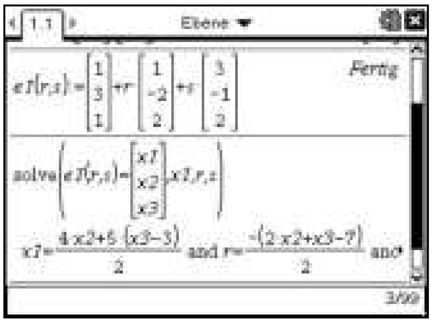
Berechnung der Koordinatenform aus der Parameterform

Um eine Koordinatenform der in Parameterform gegebenen Ebene E_1 zu erhalten, löst man die Gleichung

$e1(r,s) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ nach x_1 und den Parametern r und s auf.

Die Lösungen für r und s interessieren nicht, die Lösung für x_1 ist die gesuchte Koordinatenform.

Im Beispiel erhält man nach Umformung: E_1: $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 15$.



Bestimmung der Koordinatenform aus drei Punkten

Bsp.: A (1 I 2 I 1), B (2 I 0 I 3), C (4 I 1 I 3)

Vorüberlegung:

$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ entspricht $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 - d = 0$

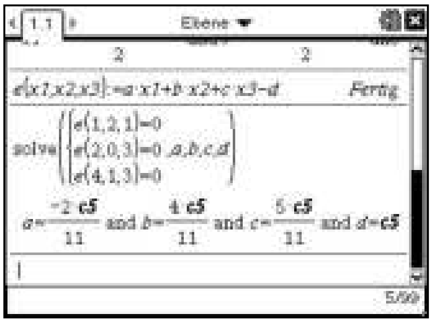
Zuerst wird eine Funktion für die allgemeine Form der Koordinatengleichung definiert:

$e(x_1,x_2,x_3) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 - d$

(Das Rechenzeichen „·“ muss hier mit eingegeben werden.)

Anschließend kann das übliche LGS gelöst werden.

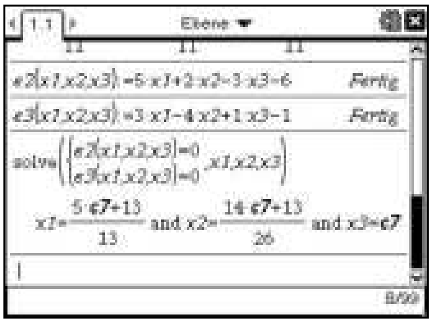
Man erhält für c5=11 im Beispiel E: $-2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 11$.



Bestimmung der Schnittgeraden zweier Ebenen in Koordinatenform (E_2 und E_3)

Die Punkte auf der Schnittgeraden liegen sowohl in E_2 wie auch in E_3. Die beiden Ebenengleichungen bilden also ein LGS, das entsprechend gelöst wird.
Um „schöne“ Zahlen zu erhalten, wählen Sie z.B. $x_3 = 13t$,

dann ist $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 + t \cdot 5\\0{,}5 + t \cdot 7\\0 + t \cdot 13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\13\end{pmatrix}$



Gegenseitige Lage zweier Ebenen

Liefert der Nspire bei der Lösung des LGS zur Bestimmung einer Schnittgeraden „false“, so existieren keine gemeinsamen Punkte der Ebenen, d.h. die Ebenen sind parallel.
Liefert der Nspire ein Ergebnis mit zwei verschiedenen Variablen c (z.B. c3 und c4), so sind die betrachteten Ebenen identisch.

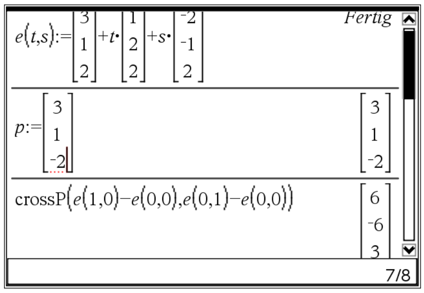
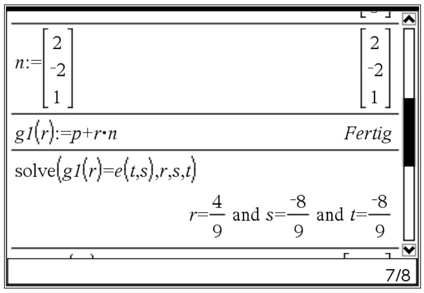
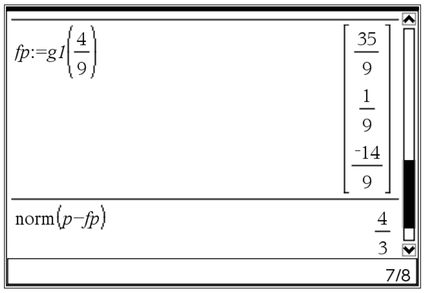
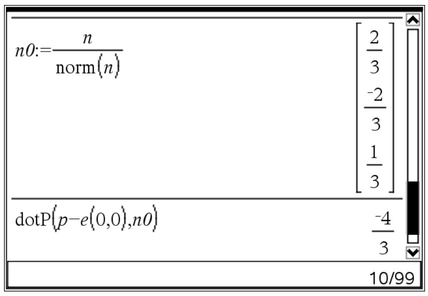
Abstand: Punkt - Ebene

Aufgabe

Gegeben ist die Ebene E durch $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\ f\ddot{u}r\ t, s\ \in\ \mathbb{R}$

und der Punkt $P(3|1|-2)$.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

Berechnung über den Lotfußpunkt Die Ebene wird in Parameterform als Funktion von t und s definiert. Die beiden Richtungsvektoren erhält man durch e(1,0)–e(0,0) bzw. e(0,1)–e(0,0). Mit dem Kreuzprodukt dieser Vektoren erhält man einen Normalenvektor der Ebene, der noch gekürzt werden kann. Mit diesem Normalenvektor kann man die Gleichung einer Geraden g1 definieren, die durch P geht und senkrecht zur Ebene ist. Mit dem „solve“ - Befehl kann man die Parameterwerte für den Schnittpunkt von Ebene und Gerade berechnen. Daraus erhält man durch Einsetzen den Lotfußpunkt $F\left(\frac{35}{9}\middle\vert\frac{1}{9}\middle\vert\frac{-14}{9}\right)$. Der Abstand von P zu E ist gleich dem Abstand von P zu F. Es ergibt für den Abstand d (P, E) = $\frac{4}{3}$.	  
Berechnung mit der Hesse-Form Für die Hesse-Form benötigt man einen Normalenvektor $\vec{n}_0$ der Länge 1. Man erhält ihn, indem man den mit dem Kreuzprodukt ermittelten Normalenvektor durch seine Länge teilt. Den für die Hesse-Form benötigten Stützvektor erhält man mit e(0,0). Das Vorzeichen des Ergebnisses kann man ignorieren.	

Aufgabe

Gegeben ist die Ebene E durch $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $für\ t, s\ \in\ \mathbb{R}$.

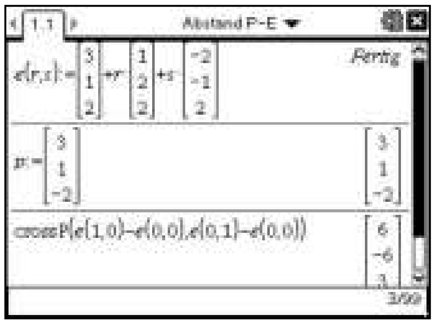
und der Punkt $P(3|1|-2)$.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

Berechnung über den Lotfußpunkt

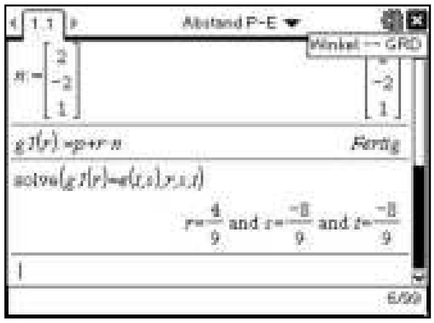
Die Ebene wird in Parameterform als Funktion von t und s definiert.

Die beiden Richtungsvektoren erhält man durch e(1,0)–e(0,0) bzw. e(0,1)–e(0,0).
Mit dem Kreuzprodukt dieser Vektoren erhält man einen Normalenvektor der Ebene, der noch gekürzt werden kann.



Mit diesem Normalenvektor kann man die Gleichung einer Geraden g1 definieren, die durch P geht und senkrecht zur Ebene ist.

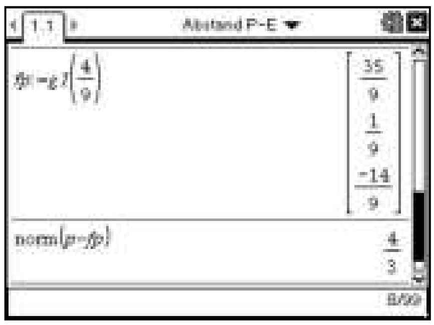
Mit dem „solve“ - Befehl kann man die Parameterwerte für den Schnittpunkt von Ebene und Gerade berechnen.



Daraus erhält man durch Einsetzen den Lotfußpunkt

$$F\left(\frac{35}{9}\middle|\frac{1}{9}\middle|\frac{-14}{9}\right).$$

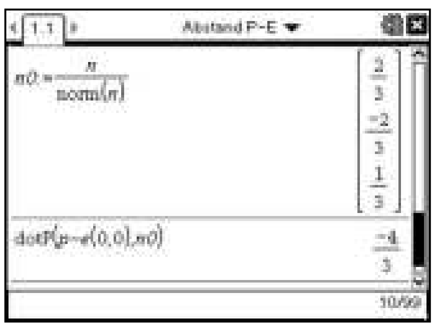
Der Abstand von P zu E ist gleich dem Abstand von P zu F.
Es ergibt für den Abstand d (P, E) = $\frac{4}{3}$.



Berechnung mit der Hesse-Form

Für die Hesse-Form benötigt man einen Normalenvektor $\vec{n}_0$ der Länge 1. Man erhält ihn, indem man den mit dem Kreuzprodukt ermittelten Normalenvektor durch seine Länge teilt.

Den für die Hesse-Form benötigten Stützvektor erhält man mit e(0,0).
Das Vorzeichen des Ergebnisses kann man ignorieren.

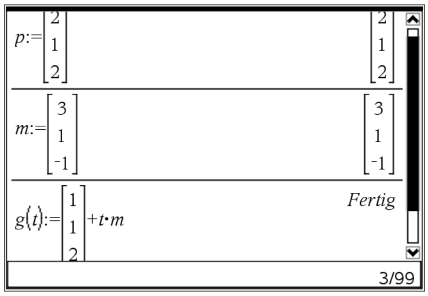
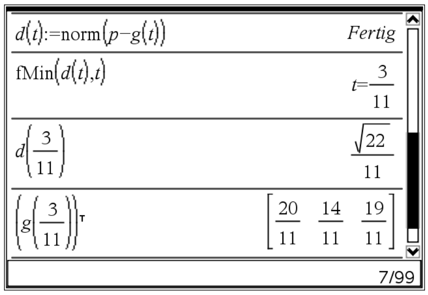
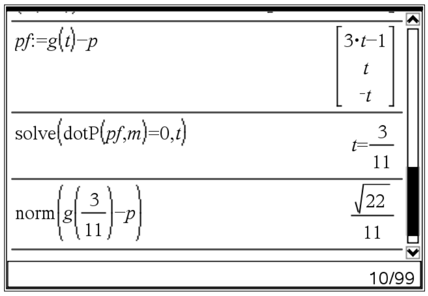
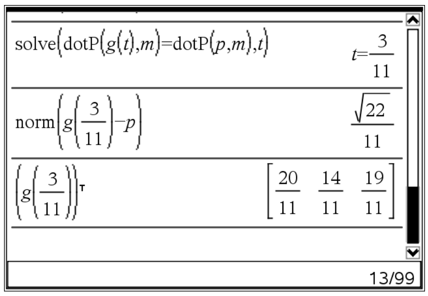


Abstand: Punkt - Gerade

Aufgabe

Gegeben ist die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(2|1|2)$.

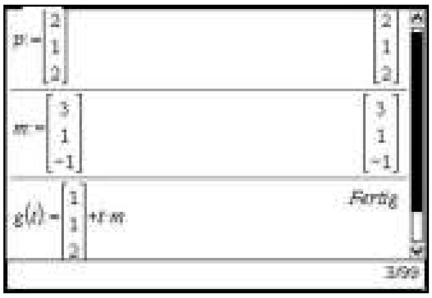
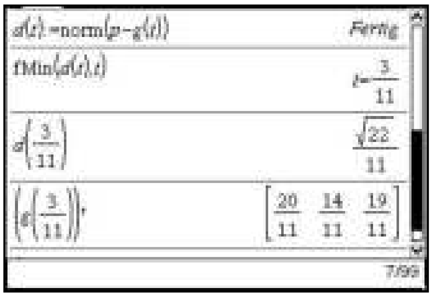
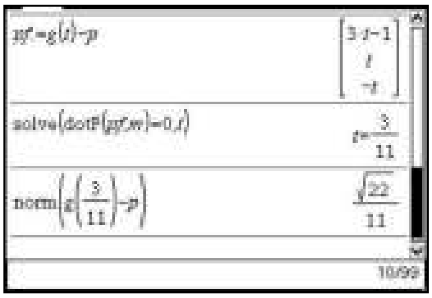
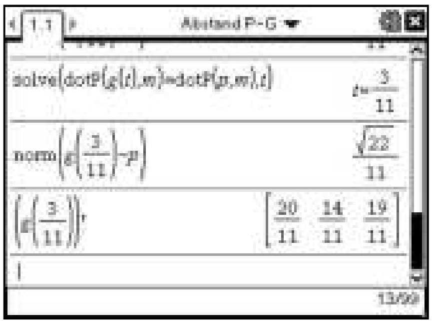
Bestimmen Sie den Abstand von P zur Geraden g.

Eingabe im Calculator Der Richtungsvektor $\vec{m}$ der Geraden, der Punkt P und die Geradengleichung g(t) als Funktion des Parameters werden im Calculator eingegeben. Den Stützvektor der Geraden kann man dann mit g(0) erhalten.	
Berechnung mit der „Abstandsfunktion“ Man definiert die Abstandsfunktion d(t) des Abstandes von P von einem beliebigen Punkt g(t) der Geraden. Mit fMin ermittelt man den Wert von t, für den dieser Abstand minimal wird. Damit hat man dann sowohl den Abstand von P zu g als auch den Fußpunkt des Lots von P auf g. (Die Funktion `ᵀ´ zum Umwandeln in einen Zeilenvektor erhält man mit menu 7 1)	
Berechnung über die Orthogonalität Um den Fußpunkt des Lots von P auf g zu berechnen, bildet man den Vektor $\overrightarrow{PF}$ von P zu einem beliebigen Punkt der Geraden. Es muss gelten: $\overrightarrow{PF} \perp \vec{m}$. Den zu dieser Bedingung gehörenden Wert für t bestimmt man mit `solve´. Damit hat man wie vorher den Fußpunkt F des Lots und den Abstand von P zu g als Länge von $\overrightarrow{PF}$.	
Berechnung mit einer Hilfsebene Die Ebene durch P mit dem Richtungsvektor $\vec{m}$ der Geraden als Normalenvektor schneidet die Gerade im Lotfußpunkt F. Da F in der gleichen Ebene wie P liegt, muss das Skalarprodukt des Ortsvektors von F mit $\vec{m}$ den gleichen Wert liefern, wie das Skalarprodukt des Ortsvektors von P mit $\vec{m}$. Den zugehörigen Wert von t kann man mit `solve´ berechnen.	

Aufgabe

Gegeben ist die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ und der Punkt $P(2|1|2)$.

Bestimmen Sie den Abstand von P zur Geraden g.

Eingabe im Calculator Der Richtungsvektor $\vec{m}$ der Geraden, der Punkt P und die Geradengleichung g(t) als Funktion des Parameters werden im Calculator eingegeben. Den Stützvektor der Geraden kann man dann mit g(0) erhalten.	
Berechnung mit der „Abstandsfunktion" Man definiert die Abstandsfunktion d(t) des Abstandes von P von einem beliebigen Punkt g(t) der Geraden. Mit fMin ermittelt man den Wert von t, für den dieser Abstand minimal wird. Damit hat man dann sowohl den Abstand von P zu g als auch den Fußpunkt des Lots von P auf g. (Die Funktion \`^{T}´ zum Umwandeln in einen Zeilenvektor erhält man mit (menu)(7)(2))	
Berechnung über die Orthogonalität Um den Fußpunkt des Lots von P auf g zu berechnen, bildet man den Vektor $\overrightarrow{PF}$ von P zu einem beliebigen Punkt der Geraden. Es muss gelten:. $\overrightarrow{PF} \perp \vec{m}$ Den zu dieser Bedingung gehörenden Wert für t bestimmt man mit \`solve´. Damit hat man wie vorher den Fußpunkt F des Lots u nd den Abstand von P zu g als Länge von $\overrightarrow{PF}$.	
Berechnung mit einer Hilfsebene Die Ebene durch P mit dem Richtungsvektor $\vec{m}$ der Geraden als Normalenvektor schneidet die Gerade im Lotfußpunkt F. Da F in der gleichen Ebene wie P liegt, muss das Skalarprodukt des Ortsvektors von F mit $\vec{m}$ den gleichen Wert liefern, wie das Skalarprodukt des Ortsvektors von P mit $\vec{m}$. Den zugehörigen Wert von t kann man mit \`solve´ berechnen.	

Abstand windschiefer Geraden

Aufgabe

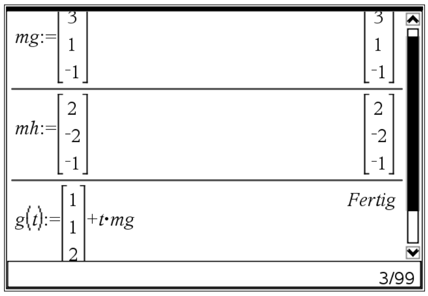
Gegeben sind die Geraden g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ und h durch $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

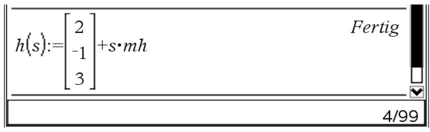
Die Geraden sind windschief. Berechnen Sie ihren Abstand.

Eingabe im Calculator
Die Richtungsvektoren $\overrightarrow{m_g}$ und $\overrightarrow{m_h}$ der beiden Geraden werden im Calculator eingegeben.

Die Geraden werden in Abhängigkeit von den Parametern als g(t) und h(s) eingegeben.

Die Stützvektoren erhält man dann mit g(0) bzw. h(0).

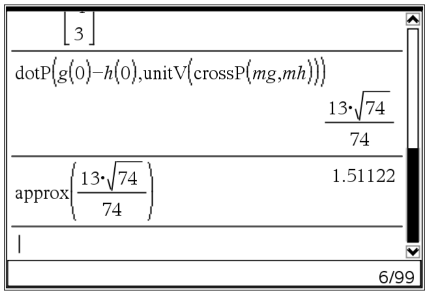




Abstandsberechnung mit einer Hilfsebene
Man kann eine Hilfsebene E durch den Stützpunkt h(0) der Geraden h bilden, mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{m_g}$ und $\overrightarrow{m_h}$ der beiden Geraden als Richtungsvektoren.
Die Gerade g ist dann parallel zu E und jeder ihrer Punkte hat von E den gleichen Abstand, der damit auch der Abstand von g und h ist. Man berechnet diesen Abstand am einfachsten, indem man g(0) in die Hesse-Form der Ebene E einsetzt.

Der Abstand der beiden Ebenen ist ≈ 1,511

Hinweis: Diese Methode liefert nicht die Punkte der beiden Geraden, die diesen Abstand haben.

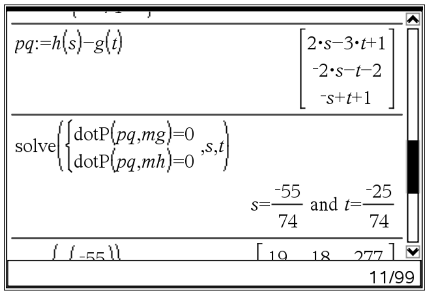


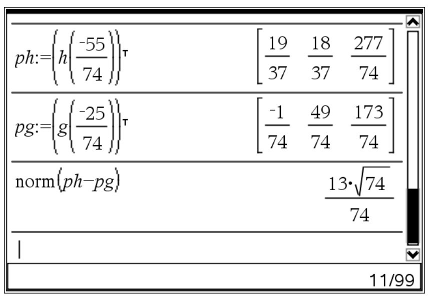
Abstandsberechnung mit Hilfe der Orthogonalität
Man definiert den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ zweier beliebiger Punkte \`Q = h(s)´ auf h und \`P = g(t)´ auf g.
Dieser Vektor muss orthogonal zu $\overrightarrow{m_g}$ und $\overrightarrow{m_h}$ sein, wenn diese Punkte den minimalen Abstand der beiden Geraden annehmen sollen.
Man kann die Werte der Parameter mit einem Gleichungs-system mit zwei Variablen ermitteln.

Daraus erhält man die gesuchten Punkte:

$$Q\left(\frac{19}{37}\middle|\frac{18}{37}\middle|\frac{277}{74}\right) \text{ und } P\left(\frac{-1}{74}\middle|\frac{49}{74}\middle|\frac{173}{74}\right)$$

Ihr Abstand ist $\frac{17\cdot\sqrt{74}}{74} \approx 1{,}511$





Aufgabe

Gegeben sind die Geraden g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ und h durch $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Die Geraden sind windschief. Berechnen Sie ihren Abstand.

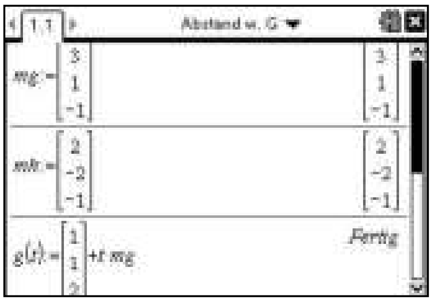
<table>
<tr><td>

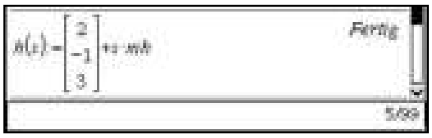
Eingabe im Calculator
Die Richtungsvektoren $\overrightarrow{m_g}$ und $\overrightarrow{m_h}$ der beiden Geraden werden im Calculator eingegeben.

Die Geraden werden in Abhängigkeit von den Parametern als g(t) und h(s) eingegeben.

Die Stützvektoren erhält man dann mit g(0) bzw. h(0).

</td><td>





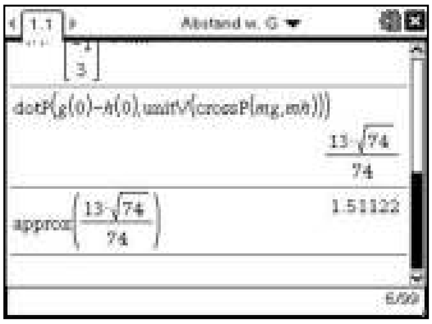
</td></tr>
<tr><td>

Abstandsberechnung mit einer Hilfsebene
Man kann eine Hilfsebene E durch den Stützpunkt h(0) der Geraden h bilden, mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{m_g}$ und $\overrightarrow{m_h}$ der beiden Geraden als Richtungsvektoren.
Die Gerade g ist dann parallel zu E und jeder ihrer Punkte hat von E den gleichen Abstand, der damit auch der Abstand von g und h ist. Man berechnet diesen Abstand am einfachsten, indem man g(0) in die Hesse-Form der Ebene E einsetzt.

Der Abstand der beiden Ebenen ist ≈ 1,511.

Hinweis: Diese Methode liefert nicht die Punkte der beiden Geraden, die diesen Abstand haben.

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

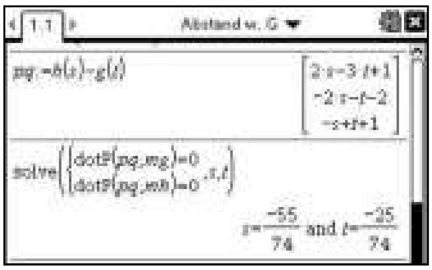
Abstandsberechnung mit Hilfe der Orthogonalität
Man definiert den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ zweier beliebiger Punkte \`Q = h(s)´ auf h und \`P = g(t)´ auf g.
Dieser Vektor muss orthogonal zu $\overrightarrow{m_g}$ und $\overrightarrow{m_h}$ sein, wenn diese Punkte den minimalen Abstand der beiden Geraden annehmen sollen.
Man kann die Werte der Parameter mit einem Gleichungs-system mit zwei Variablen ermitteln.

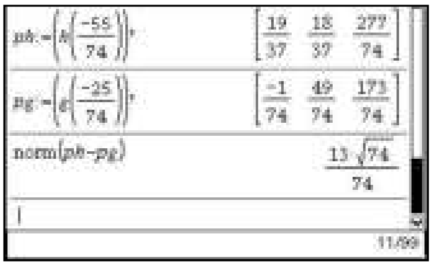
Daraus erhält man die gesuchten Punkte:

$Q\left(\frac{19}{37}\middle|\frac{18}{37}\middle|\frac{277}{74}\right)$ und $P\left(\frac{-1}{74}\middle|\frac{49}{74}\middle|\frac{173}{74}\right)$

Ihr Abstand ist $\frac{17\cdot\sqrt{74}}{74} \approx 1{,}511$

</td><td>





</td></tr>
</table>

Aufgabe

a) Eine Münze soll daraufhin getestet werden, ob sie fair ist. Sie wird dazu 250 mal geworfen. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für die Nullhypothese $H_0 : p = 0{,}5$.
Wie wird entschieden, wenn man 110 mal „Wappen“ erhält?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Münze nicht abgelehnt, obwohl ihre Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ nur p=0,45 beträgt?
Bestimmen Sie die Grenzen Wahrscheinlichkeit für „Wappen“, ab denen die Münze jeweils mit höchstens 5% Wahrscheinlichkeit nicht abgelehnt wird.

c) Stellen Sie den Graphen für die Funktion dar, die die Wahrscheinlichkeit für jedes p angibt, dass eine Münze mit dieser Wahrscheinlichkeit für „Wappen abgelehnt wird (Gütefunktion des Tests).

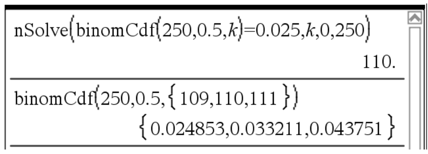
Bestimmung des Ablehnungsbereichs

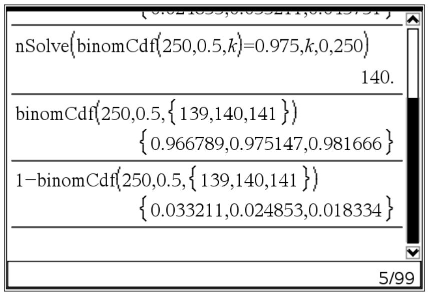
Es handelt sich um einen zweiseitigen Test.
Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der erzielten Wappen.
Mit \`nsolve´ kann man den größten Wert für k bestimmen, für den gilt: $P(X \le k) \le 0{,}025$.
Ebenso erhält man den kleinsten Wert für k mit $P(X \le k) \le 0{,}975$.

a) Der Ablehnungsbereich ist $A = \{k \le 109\} \cup \{k \ge 140\}$.

Ein Ergebnis von 110 Wappen führt nicht zur Ablehnung der Nullhypothese.

Hinweis: Mit nsolve muss das Gleichheitszeichen verwendet werden. Die Bereichsangabe für die Variable k muss eingegeben werden. Am einfachsten verwendet man hier 0 und n. nsolve liefert für die kumulierte Verteilung binomCdf stets den **ersten Wert**, für den die Wahrscheinlichkeit **über** der angegebenen Grenze liegt. Deshalb muss der Wert für p=0,025 um 1 vermindert werden, der Wert für p=0,975 kann übernommen werden.

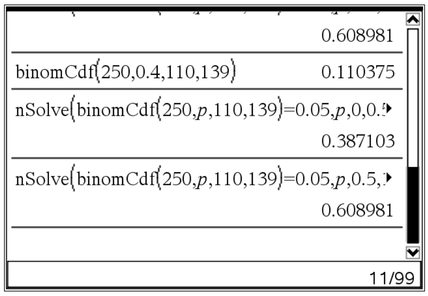




Fehler zweiter Art

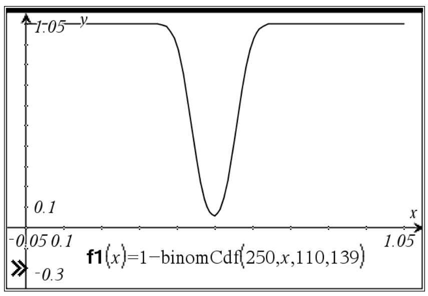
binomCdf kann auch in der Form binomCdf(n,p,ug,og) aufgerufen werden. Die Funktion liefert dann die Wahrscheinlichkeit, ein Ergebnis im Intervall [ug;og] zu erhalten.
Man kann \`nsolve´ auch mit der Wahrscheinlichkeit p als Parameter verwenden.
Um die gesuchte untere Grenze zu erhalten, wird das Intervall [0;0,5] verwendet, für die Obergrenze nimmt man [0,5;1].

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze bei p=0,4 nicht abgelehnt wird, beträgt etwa 11%.
Bei $p \le 38\%$ und bei $p \ge 61\%$ wird die Münze mit eine Wahrscheinlichkeit von weniger als 5% nicht abgelehnt.



Gütefunktion

Man kann die Gütefunktion wie gezeigt in Graphs & Geometry darstellen.
Für die Wahrscheinlichkeit p verwendet man dabei die Variable x.
Soll der Test eine hohe Trennschärfe haben, so muss der nach unten gehende Teil des Graphen möglichst schmal sein.
Dies erreicht man mit größeren Werten für n.



Aufgabe

a) Eine Münze soll daraufhin getestet werden, ob sie fair ist. Sie wird dazu 250 mal geworfen. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich für die Nullhypothese $H_0 : p = 0{,}5$.
Wie wird entschieden, wenn man 110 mal „Wappen“ erhält?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Münze nicht abgelehnt, obwohl ihre Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ nur p=0,45 beträgt?
Bestimmen Sie die Grenzen Wahrscheinlichkeit für „Wappen“, ab denen die Münze jeweils mit höchstens 5% Wahrscheinlichkeit nicht abgelehnt wird.

c) Stellen Sie den Graphen für die Funktion dar, die die Wahrscheinlichkeit für jedes p angibt, dass eine Münze mit dieser Wahrscheinlichkeit für „Wappen abgelehnt wird (Gütefunktion des Tests).

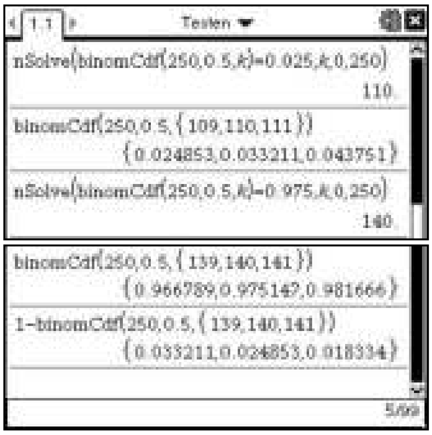
Bestimmung des Ablehnungsbereichs

Es handelt sich um einen zweiseitigen Test.
Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der erzielten Wappen.
Mit \`nsolve´ kann man den größten Wert für k bestimmen, für den gilt: $P(X \leq k) \leq 0{,}025$.
Ebenso erhält man den kleinsten Wert für k mit $P(X \leq k) \leq 0{,}975$.

a) Der Ablehnungsbereich ist $A = \{k \leq 109\} \cup \{k \geq 140\}$.

Ein Ergebnis von 110 Wappen führt nicht zur Ablehnung der Nullhypothese.

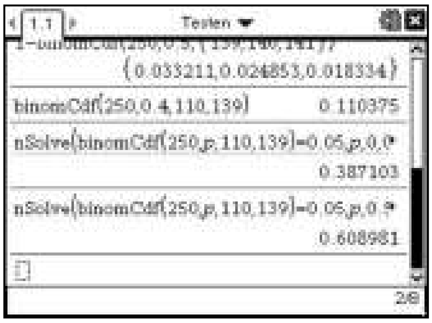
Hinweis: Mit nsolve muss das Gleichheitszeichen verwendet werden. Die Bereichsangabe für die Variable k muss eingegeben werden. Am einfachsten verwendet man hier 0 und n. nsolve liefert für die kumulierte Verteilung binomCdf stets den **ersten Wert**, für den die Wahrscheinlichkeit **über** der angegebenen Grenze liegt. Deshalb muss der Wert für p=0,025 um 1 vermindert werden, der Wert für p=0,975 kann übernommen werden.



Fehler zweiter Art

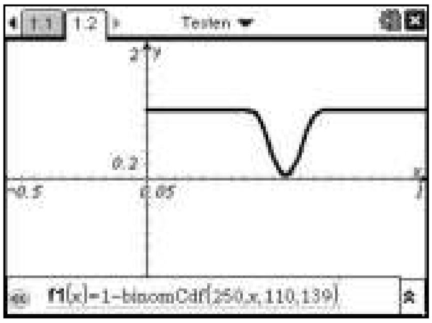
binomCdf kann auch in der Form binomCdf(n,p,ug,og) aufgerufen werden. Die Funktion liefert dann die Wahrscheinlichkeit, ein Ergebnis im Intervall [ug;og] zu erhalten.
Man kann \`nsolve´ auch mit der Wahrscheinlichkeit p als Parameter verwenden.
Um die gesuchte untere Grenze zu erhalten, wird das Intervall [0;0,5] verwendet, für die Obergrenze nimmt man [0,5;1].

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze bei p=0,4 nicht abgelehnt wird, beträgt etwa 11%.
Bei $p \leq 38\%$ und bei $p \geq 61\%$ wird die Münze mit eine Wahrscheinlichkeit von weniger als 5% nicht abgelehnt.



Gütefunktion

Man kann die Gütefunktion wie gezeigt in Graphs darstellen.
Für die Wahrscheinlichkeit p verwendet man dabei die Variable x.
Soll der Test eine hohe Trennschärfe haben, so muss der nach unten gehende Teil des Graphen möglichst schmal sein.
Dies erreicht man mit größeren Werten für n.



Unterrichtsmaterialien zum CAS Einsatz

Schülerarbeitsblätter von KLasse 7–12

Haben Sie Fragen zu Produkten von Texas Instruments? Oder sind Sie an weiteren Unterrichtsmaterialien, der Ausleihe von Rechnern oder einer Lehrerfortbildung interessiert? Viele weitere Materialien finden Sie z.B. auf unserer umfangreichen Materialdatenbank im Internet. Gerne steht Ihnen auch unser Customer Service Center mit Rat und Tat zu Seite. Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:

Customer Service Center:
TEXAS INSTRUMENTS
Telefon: 00 800-4 84 22 737 (Anruf kostenlos)
Telefax: 00 420-2 26 22 17 99
ti-cares@ti.com
education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz