Abstand windschiefer Geraden

Am 23.07.2019 kam es südlich von Lübeck zu einem Beinahezusammenstoß zwischen einem Segelflugzeug und einem A321 der Lufthansa. Es war einer von über einhundert Beinahezusammenstößen im deutschen Luftraum in den Jahren 2018/2019.
Für alle nachstehenden Aufgaben gilt, dass eine Einheit im Koordinatensystem 100m in der Realität entspricht.

Modellierung der Realsituation mit dem Tower als Koordinatenursprung
Der A321 meldet seine Positionsdaten an den Tower in Lübeck. Bei der ersten Meldung ist er bei $P\langle -5|-3{,}5|5\rangle$, das nächste Signal erhält der Tower vom Datenpunkt $Q\langle -1|-1{,}4|4\rangle$. Ein Segelflugzeug meldet befindet sich am Punkt $A\langle -3|-4|4\rangle$ und am Punkt $B\langle -2|-1|4\rangle$ genau dann als sich der Airbus vom Punkt Q meldet.

Aufgaben:

a) Geben Sie Gleichungen für die Geraden an durch A, B sowie durch P, Q, auf denen sich das Segelflugzeug und der Airbus bewegen.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade durch A und B windschief zur Geraden durch P und Q liegt.

c) Für die Berechnung des Abstandes werden folgende Überlegungen angestellt:

Anna:

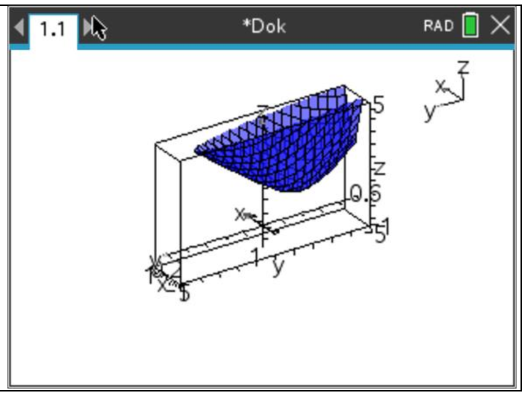
> Ich weiß, dass der Abstand die Länge einer Strecke sein muss. Diese Strecke muss orthogonal zu beiden Geraden stehen. Dies gilt aber nur für die Strecke, deren Länge den minimalen Abstand zwischen g und h besitzt.

Ben:

> Zwei windschiefe Geraden liegen nicht in einer Ebene. Ich kann aber eine Ebene E_1 finden, in der g liegt und die zusätzlich den Richtungsvektor von h enthält. Analog erhält man E_2 indem man zur Gleichung von h den Richtungsvektor von g hinzufügt. Nun liegen E_1 und E_2 offenbar parallel, der Abstand dieser Ebenen ist der gesuchte.

Chris

> Wenn man den Anstand zwischen den beiden Geraden direkt bestimmt, erhält man eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Bestimmt man einmal das lokale Minimum in Abhängigkeit von x und zusätzlich in Abhängigkeit von y, so müsste man den gesuchten Abstand auch erhalten.



Beurteilen Sie, ob die Lösungsvorschläge richtig und plausibel sind unter Angabe eines rechnerischen Ansatzes.

d) Berechnen Sie den minimalen Abstand zwischen den beiden Flugbahnen mithilfe eines Ansatzes und erläutern Sie, wie groß die Gefahr eines Zusammenstoßes war auf der Basis der in **M1** gegebenen Daten.

e) Vergleichen Sie die Ansätze mathematisch bezüglich der Aspekte Anzahl der Rechenschritte, erhaltene Ergebnisse, Komplexität und Fehleranfälligkeit.

f*) Leiten Sie für beliebige Geraden g und h, die windschief zueinander sind, einen mathematischen Berechnungsansatz für den Abstand her.

g*) Schreiben Sie ein Programm in Python oder TI Basic, mit dem es möglich ist, den Abstand beliebiger windschiefer Geraden zu bestimmen.

M1: Technische Daten A321 und Segelflugzeug

Name des Flugzeugs	**A321**	**Segelflugzeug (ASK 21)**
(Höchst-)Geschwindigkeit	$904\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$	$280\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$
Länge	44,5 m	8 m
Spannweite	34,09 m	17 m
Mittlere Sinkgeschwindigkeit	$4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	$1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Lehrermaterial:

Das vorliegende Material ist für Schülerinnen und Schüler der Qualifikationsphase gedacht. Es ist dem Sachgebiet Lineare Algebra und Analytische Geometrie zuzuordnen, Aspekte auch dem Sachgebiet Analysis (Vorschlag C).

Inhaltliche Voraussetzungen	Methodische/Technische Voraussetzungen
Schülerinnen und Schüler können…	
… Geradengleichungen aus Punkte bestimmen	…arbeiten in kooperativen Arbeitsformen konstruktiv zusammen
… Ebenengleichungen auch in Normalenform bestimmen	… Ergebnisse fachsprachlich korrekt präsentieren
… das Skalarprodukt sicher anwenden	… verschiedene mathematische Ansätze nachvollziehen und vergleichen
… lineare Gleichungssysteme lösen	… LGS, partielle Ableitungen und Skalarprodukt mithilfe der Technologie lösen, bestimmen und berechnen

Mathematischer Hintergrund und Lösungen:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Da die Richtungsvektoren der Geraden g und h nicht kollinear sind, müssen die Geraden windschief oder schneidend liegen. Der Ansatz g = h liefert:
$\begin{pmatrix} -5 \\ -3{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \; liefert \; \begin{matrix} l = 4 \\ -1{,}4 \neq 8 \\ k = 1 \end{matrix}$
Da keine Lösungsmenge erhalten wird, liegen g und h windschief zueinander.

c) Hier werden die allgemeinen Ansätze gezeigt, die in f*) gefordert werden. Damit ist dann auch ein Vergleich allgemeiner Natur sinnvoll möglich:
Sei $g: \vec{x} = \overrightarrow{o_1} + k \cdot \overrightarrow{r_1}$ und $h: \vec{x} = \overrightarrow{o_2} + l \cdot \overrightarrow{r_2}$ mit $k, l \,\epsilon\, \mathbb{R}$ und $\overrightarrow{o_1}, \overrightarrow{o_2}, \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2} \,\epsilon\, \mathbb{R}^3$ sowie $\overrightarrow{r_1} \neq c \cdot \overrightarrow{r_2}$, $g \cap h = \{\quad\}$:
<u>Ansatz Anna</u>:
Für G $\epsilon\ g$ und H $\epsilon\ h$ gilt dann:
$\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH} = -(\overrightarrow{o_1} + k \cdot \overrightarrow{r_1}) + \overrightarrow{o_2} + l \cdot \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{o_2} - \overrightarrow{o_1} + l \cdot \overrightarrow{r_2} - k \cdot \overrightarrow{r_1}$

Da die gesuchte Strecke $\overline{GH}$ orthogonal zu beiden Geraden steht, gilt zudem:
$\overrightarrow{r_1} * (\overrightarrow{o_2} - \overrightarrow{o_1} + l \cdot \overrightarrow{r_2} - k \cdot \overrightarrow{r_1}) = 0 \; und \; \overrightarrow{r_2} * (\overrightarrow{o_2} - \overrightarrow{o_1} + l \cdot \overrightarrow{r_2} - k \cdot \overrightarrow{r_1}) = 0$

<u>Ansatz Ben</u>:
$E_1: \vec{x} = \overrightarrow{o_1} + k \cdot \overrightarrow{r_1} + \; l \cdot \overrightarrow{r_2}$ und $E_2: \vec{x} = \overrightarrow{o_2} + \kappa \cdot \overrightarrow{r_1} + \; \lambda \cdot \overrightarrow{r_2}$ liegen parallel.
Zudem gibt es einen Normalenvektor $\vec{n}$ mit $\vec{n} * \overrightarrow{r_1} = 0 = \vec{n} * \overrightarrow{r_2}$ und $\vec{n} = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2}$
Damit erhält man die Normalendarstellungen der Ebenen:
$E_1^n: (\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2}) * \overrightarrow{o_1} = c_1$ und $E_2^n: (\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2}) * \overrightarrow{o_1} = c_2$
Daraus folgt der Abstand direkt mit:

$d = \frac{|c_2 - c_1|}{|\vec{r_1} \times \vec{r_2}|} = \left| \frac{(\vec{r_1} \times \vec{r_2}) * \vec{o_1} - (\vec{r_1} \times \vec{r_2}) * \vec{o_1}}{\vec{r_1} \times \vec{r_2}} \right|$

<u>Ansatz Chris:</u>
Den Abstand kann man auch als Funktion in Abhängigkeit der Variablen k und l darstellen. Mit $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} r_{1a} \\ r_{1b} \\ r_{1c} \end{pmatrix}$, $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} r_{2a} \\ r_{2b} \\ r_{2c} \end{pmatrix}$, $\vec{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \sigma_{1a} \\ \sigma_{1b} \\ \sigma_{1c} \end{pmatrix}$ und $\vec{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \sigma_{2a} \\ \sigma_{2b} \\ \sigma_{2c} \end{pmatrix}$ gilt:
$f(k,l) = \sqrt{(\sigma_{2a} - \sigma_{1a} - k \cdot r_{1a} + l \cdot r_{2a})^2 + (\sigma_{2b} - \sigma_{1b} - k \cdot r_{1b} + l \cdot r_{2b})^2 + (\sigma_{2c} - \sigma_{1c} - k \cdot r_{1c} + l \cdot r_{2c})^2}$
für den Anstand f(k,l) in Abhängigkeit der Parameter k und l .
Nun müssen partielle Ableitungen gebildet werden, an dieser Stelle kann der Rechner zur Unterstützung eingesetzt werden, da dies den normalerweise geforderten Inhalt überschreitet.
Mit $z = (\sigma_{2a} - \sigma_{1a} - k \cdot r_{1a} + l \cdot r_{2a})^2 + (\sigma_{2b} - \sigma_{1b} - k \cdot r_{1b} + l \cdot r_{2b})^2 + (\sigma_{2c} - \sigma_{1c} - k \cdot r_{1c} + l \cdot r_{2c})^2$ erhält man:
$\frac{f(k,l)}{dk} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{z}} \cdot (2r_{1a}\sigma_{2a} - 2r_{1a}\sigma_{1a} + 2l \cdot r_{1a}r_{2a} + 2k \cdot (r_{1a})^2 + 2r_{1b}\sigma_{2b} - 2r_{1b}\sigma_{1b} + 2l \cdot r_{1b}r_{2b} + 2k \cdot (r_{1b})^2 + 2r_{1c}\sigma_{2c} - 2r_{1c}\sigma_{1c} + 2l \cdot r_{1c}r_{2c} + 2k \cdot (r_{1c})^2)$

Da im Nenner nur positive Zahlen auftreten, kann dieser nie null ergeben Das führt zu:
$0 = k \cdot ((r_{1a})^2 + (r_{1b})^2 + (r_{1c})^2) + l \cdot (r_{1a}r_{2a} + r_{1b}r_{2b} + r_{1c}r_{2c}) + r_{1a}\sigma_{2a} - r_{1a}\sigma_{1a} + r_{1b}\sigma_{2b} - r_{1b}\sigma_{1b} + r_{1c}\sigma_{2c} - r_{1c}\sigma_{1c}$
und analog die partielle Ableitung nach l:
$\frac{f(k,l)}{dl} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{z}} \cdot (2k \cdot r_{1a}r_{2a} + 2\sigma_{2a}r_{2a} - \sigma_{1a}r_{2a} + 2l \cdot (r_{2a})^2 + 2k \cdot r_{1b}r_{2b} - 2r_{2b}\sigma_{1b} + 2\sigma_{2b}r_{2b} + 2l \cdot (r_{2b})^2 + 2k \cdot r_{1c}r_{2c} - 2r_{2c}\sigma_{1c} + 2r_{2c}\sigma_{2c} + 2l \cdot (r_{2c})^2)$
Da im Nenner nur positive Zahlen auftreten, kann dieser nie null ergeben Das führt zu:
$0 = l \cdot ((r_{2a})^2 + (r_{2b})^2 + (r_{2c})^2) + k \cdot (r_{1a}r_{2a} + r_{1b}r_{2b} + r_{1c}r_{2c}) + r_{2a}\sigma_{2a} + r_{2b}\sigma_{2b} + r_{2c}\sigma_{2c} - r_{2a}\sigma_{1a} + r_{2b}\sigma_{1b} - r_{2c}\sigma_{1c}$
Das Gleichungssystem, das sich aus den grau unterlegten Gleichungen ergibt, ist nach Division mit 2 (siehe Nenner) identisch zu dem Ansatz, der sich ergibt, wenn man Annas Ansatz verfolgt.

Spannend ist, dass analytischer und geometrischer Ansatz zu dem gleichen algebraischen Problem führen.

d) Der Abstand beträgt auf vier Nachkommastellen gerundet $d \approx 0{,}3272$, was etwa 32,72 Meter entspricht. Betrachtet man die Spannweiten, wird deutlich, wie knapp es war, selbst wenn man diese halbiert (17,045m + 8,5m = 25,545m). Auch die Länge des Airbus kann hier als Argument angeführt werden, weil man nicht genau weiß, in welcher Position die Flugzeuge einander passierten.

e) Die Ansätze von Ben und Anna lassen es zu, dass man relativ lange mit den Vektoren rechnet, bei Ben ergibt sich ein allgemeiner Lösungsansatz, ohne dass eine Komponente eingesetzt werden muss. Dies macht ihn besonders interessant für die informatische Umsetzung. Allerdings erhält man die Punkte auf der Geraden g und h nicht direkt, bei Anna und Chris erhält man beide Parameter und somit auch die gesuchten Punkte. Bei den partiellen Ableitungen ist der Rechenaufwand per Hand hoch, die Lösung fehleranfällig aufgrund der Indices und führt letztlich zum gleichen LGS wie Annas Ansatz. Bestimmt man die Lösung graphisch, fällt dieser Aufwand aber weg. Die Ergebnisgenauigkeit wird nur verändert, wenn Rundungen vorgenommen werden, das gilt unabhängig vom Ansatz.

f) Alle Ansätze sind in c) mathematisch allgemein ausgeführt.

g) Das Programm ist als Dateianhang verfügbar, Einbindungen einer Schleife würden noch zu Verkürzungen führen.

Autor:
Dirk Schulze

Info:
Dirk Schulze unterrichtet *Mathematik* und *Chemie* an der *Halepaghen-Schule in Buxtehude*