Nullstellenberechnung durch Intervallhalbierung

Die Nullstellen ganzrationaler Funktionen lassen sich mit Hilfe verschiedener algebraischer Verfahren ermitteln: Ausklammern, Wurzelziehen, Anwendung der p-q-Formel, Polynomdivision. Bei vielen Funktionen ist jedoch keines dieser Verfahren anwendbar (Beispiel: $f(x)=x^3-2x-5$. Warum versagen hier die genannten Verfahren, insbesondere die Polynomdivision?).
Im *trace*-Modus können Nullstellen derartiger Funktionen graphisch näherungsweise bestimmt werden. Algebraisch ließe sich dies durch die Aufstellung einer immer genaueren Wertetabelle (durch „Probieren“) verwirklichen. Wie kann man *gezielt* eine solche Wertetabelle bis zur gewünschten Genauigkeit berechnen?

<u>Problemfelder</u>

1) Man kann rechnerisch abschätzen, dass die Funktion $f(x) = x^3-2x-5$ zwischen $x_{links} = 2$ und $x_{rechts} = 2{,}5$ eine Nullstelle haben muss (woran erkennt man das?). (Bem. Eine gröbere, aber ebenso richtige Abschätzung wäre $x_{links} = 0$ und $x_{rechts} = 5$!)
2) Suchen Sie die Mitte des genannten Intervalls. Die Nullstelle muss entweder links oder aber rechts von der Intervallmitte liegen. In welcher Hälfte des Intervalls liegt sie tatsächlich? Rechnen Sie unter Zuhilfenahme des x-Wertes der Intervallmitte!
3) Sie haben soeben die Größe des Intervalls halbiert und können jetzt die Lage der Nullstelle genauer angeben als vorher. Rechnen Sie weiter!
4) Automatisieren Sie Ihr Rechenverfahren durch eine geeignete Programmierung in CellSheet!
5) Welche Nullstellengenauigkeit erreichen Sie mit Hilfe der Tabellenkalkulation?
6) Was müssen Sie bei der Auswahl der Startwerte beachten?
7) Welche Aussagen können Sie über das Konvergenzverhalten des Verfahrens machen?

<u>Analyse:</u>

- Die Eingangsfrage soll zur Reflexion über die Tatsache anregen, dass die bisher bekannten Lösungsverfahren im Grunde nur für Sonderfälle ganzrationaler Funktionen anwendbar sind. Dies gilt auch für die Polynomdivision.
- In allgemeineren Fällen müssen numerische Approximationsverfahren herangezogen werden. Die Intervallhalbierung ist sowohl algebraisch als auch graphisch gut zu durchschauen und eignet sich sehr für die Umsetzung mit Hilfe einer Tabellenkalkulation.
- Besonderer Wert sollte auf den Vergleich unterschiedlicher Näherungsverfahren gelegt werden (vgl. NEWTON-Verfahren, Regula falsi).

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-89/92/Voyage 200)

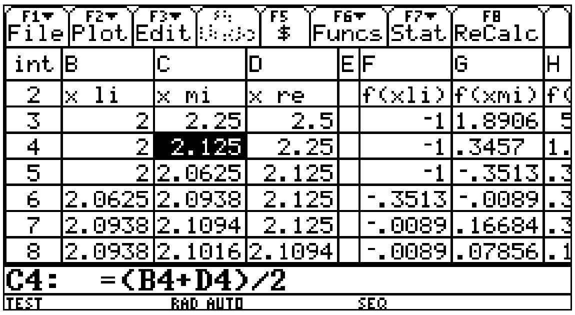

Bild 1

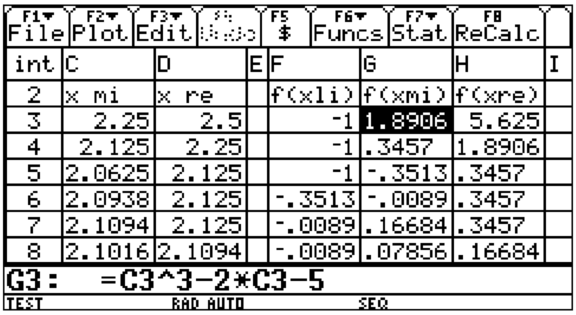

Bild 2

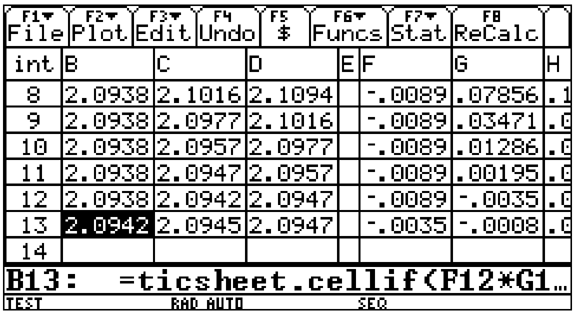

Bild 3

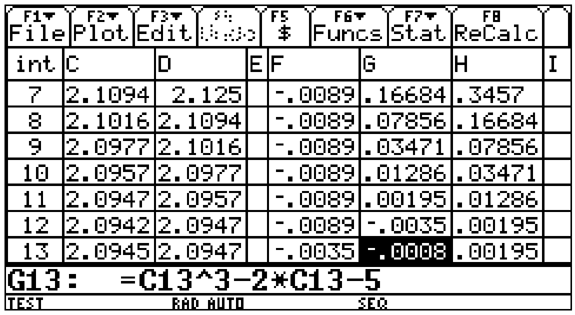

Bild 4

Hinweise

- Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist das Arbeitsblatt in der Version für den TI-89/92/Voyage200 dargestellt. Die Umsetzung für den TI-83 Plus ist analog.
- Da dies Verfahren recht langsam konvergiert, bietet es sich für eingehendere Betrachtungen an, dass die Schülerinnen und Schüler das Rechenblatt in der Schule oder zu Hause mittels des Programms *TI CellSheet Konverter*™ nach MS-Excel™ exportieren und sich dort geeignet darstellen lassen.
- Zudem empfiehlt es sich, die automatische Rechenblattberechnung (unter *format*) für diese Betrachtungen auszuschalten, da durch die Größe des Tabellenblattes sonst immer wieder längere Rechenzeiten entstehen. Bei Bedarf ermöglicht *recalc* die Neuberechnung aller (veränderten) Zellbezüge.
- Die Bilder 1 und 2 bzw. 3 und 4 zeigen die übersichtliche Nebeneinanderstellung der sechs verwendeten Werte. In Zeile 3 müssen nur x_links und x_rechts eingegeben werden. Daraus wird das arithmetische Mittel x_mitte berechnet (s. Bild 1).
  In den Spalten F, G, H werden die jeweils zugehörigen Funktionswerte berechnet. In der hier vorgestellten Form kann die Funktionsgleichung nicht problemlos variiert werden, da ihre Koeffizienten direkt und nicht als Zellbezug eingegeben werden.
- Mit Hilfe der Funktion *cellif* kann entschieden werden, ob die Intervallmitte als neue linke oder neue rechte Intervallgrenze in die nächste Zeile übernommen wird: *cellif(F3*G3<0,B3,C3)* für x_links bzw. *cellif(G3*H3>0,C3,D3)*. Hintergrund ist, dass jeweils einer der Funktionswerte an den Intervallgrenzen negativ sein muss, der andere positiv. So ist gewährleistet, dass im Intervall eine Nullstelle liegt.
- Es bietet sich eine Diskussion der erzielten Rechengenauigkeit im Zusammenhang mit der Zahl der Iterationsschritte an.