Allgemeinbildung oder Glück? – Hypothesen testen!

Fabian ist stolz. Bei einem schweren Allgemeinbildungstest hat er 8 von 10 Fragen richtig beantwortet. *„Glücksache“*, meint Amin, *„du hast ja nur geraten“*. Zu jeder Frage gab es zwei Antwortalternativen zum Ankreuzen.
Können wir als Außenstehende entscheiden, welcher der beiden Standpunkte glaubhafter ist?

Problemfelder

1) Wie viele richtige Antworten sind zu erwarten, wenn jemand aus den Alternativen zufällig auswählt? Simuliert den Allgemeinbildungs-Test eines Raters mit Hilfe einer Münze und vergleicht eure Ergebnisse untereinander.

Amin könnte vorschlagen, dass sich Fabian in einem neuen Tests beweisen soll. Wenn Fabian sich darauf einlässt, wird er vernünftigerweise einfordern, dass vorher festlegt wird, bei wie vielen richtigen Antworten Amin von seiner Hypothese abrückt.

2) Bestimmt die Wahrscheinlichkeit, mit der ein *Nullwisser* bzw. *Zufalls-Ankreuzer* in dem Test mit n=10 Fragen und je 2 Antwortalternativen k=0, 1, ... richtige Treffer erzielt. Erstellt ein CellSheet™ -Rechenblatt, das euch die Beantwortung der Frage erleichtert.
3) Diskutiert untereinander, auf welche Zahl richtiger Antworten Amin bestehen sollte. Bestimmt die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Zufallsrater mehr als 7, 8 oder 9 Treffer bzw. weniger als 3, 2 oder 1 Treffer erzielt. Erweitert euer Rechenblatt geeignet. Untersucht die Fragestellung auch im Hinblick auf andere Tests, z.B. mit n=25 Fragen und 3 Ankreuzmöglichkeiten.

Wenn es zu unwahrscheinlich ist, dass sich eine bestimmte Zahl richtiger Antworten zufällig ergeben hat, ist die Zufalls-Hypothese nicht glaubhaft. In der Statistik ist es üblich, Ablehnungsbereiche festzulegen, innerhalb derer eine bestimmte Treffer-Zahl nur mit einer Wahrscheinlichkeit unterhalb von 5% per Zufall erreicht werden kann.

4) Fabian kommt in einem Überprüfungs-Test mit n=25 Fragen und je 3 Alternativen nur auf 3 richtige Antworten. *„Siehst ’e“*, triumphiert Amin, *„du bist also doch ein Nullwisser!“*. Was meint ihr dazu? Untersucht mit dem CellSheet™ -Rechenblatt, welche Ablehnungsbereiche für diesen Test festzulegen sind.

Analyse:

Das Vorgehen eines *Zufalls-Ankreuzers* kann als n-fach-wiederholter Zufallsversuch mit je zwei möglichen Ausgängen interpretiert werden (BERNOULLI-Kette). Bei jeder Frage antwortet er mit der Wahrscheinlichkeit p richtig und mit der Wahrscheinlichkeit q falsch. Schon wenige Simulationen zeigen, dass Abweichungen vom Erwartungswert $E=n*p$ nach oben und unten auftreten. Mit der Formel von BERNOULLI kann die Wahrscheinlichkeit für die Trefferzahl eines Raters berechnet werden. Die Addition einzelner Trefferwahrscheinlichkeiten ermöglicht Aussagen darüber, wie groß die Wahrscheinlichkeit für eine Trefferzahl innerhalb eines bestimmen Intervalls ist.

Die zu prüfenden Hypothese „Testergebnis beruht auf Wissen“ ist schwierig zu beweisen. Ihr steht die Normal- oder Nullhypothese „Testergebnis beruht auf Raten“ gegenüber, für die Kriterien vereinbart werden können: Die Nullhypothese wird man ablehnen, wenn die Wahrscheinlichkeit, ein Testergebnis durch Zufallsankreuzen zu erreichen, innerhalb des 5% Bereiches liegt. Die Wahrscheinlichkeit, zufällig im 10-Fragen-Test mindestens 9 Fragen richtig zu beantworten, ist kleiner als 2,5%. Aufgrund der Symmetrie ist es ebenso unwahrscheinlich, eine Trefferzahl im Intervall [0;1] zu erzielen. Die Wahrscheinlichkeiten beim 25-Fragen-Test nicht sind nicht symmetrisch verteilt. Der Statistiker wird Trefferzahlen im Intervall [4;13] einem Rater zuschreiben, andernfalls das Testergebnis dem Wissen oder einem Boykott der Testperson zuschreiben.

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-83)

BERN	A	B	C
1	N	10	
2	P	.5	
3	TREFF	P(K)	
4	0	9.8E-4	
5	1	.00977	
6	2	.04395	

B4: =B1nCrA4*B2^

Bild 1

BERN	A	B	C
1	N	10	
2	P	.5	
3	TREFF	P(K)	SUMME
4	0	9.8E-4	9.8E-4
5	1	.00977	.01074
6	2	.04395	.05469

C5: =C4+B5 Menu

Bild 2

BERN	A	B	C
1	N	25	
2	P	.33333	
3	TREFF	P(K)	SUMME
4	0	4E-5	4E-5
5	1	5E-4	5.3E-4
6	2	.00297	.0035

C6: =C5+B6 Menu

Bild 3

BERN	A	B	C
1	N	10	
2	P	.5	
3	TREFF	P(K)	SUMME
4	0	9.8E-4	9.8E-4
5	1	.00977	.01074
6	2	.04395	.05469

C4: =binompdf(B1,B2,A4)-

Bild 4

BERN	A	B	C
10	6	.20508	.82813
11	7	.11719	.94531
12	8	.04395	.98926
13	9	.00977	.99902
14	10	9.8E-4	1
15	11	0	1

C12: =C11+B12 Menu

Bild 5

BERN	A	B	C
14	10	.12642	.82201
15	11	.08619	.90821
16	12	.05028	.95849
17	13	.02514	.98363
18	14	.01077	.9944
19	15	.00395	.99835

C17: =C16+B17 Menu

Bild 6

Hinweise:

- Bild 1 zeigt, wie man die Formel von BERNOULLI zur Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeiten explizit eingibt. Mit nCr werden die Binomialkoeffizienten berechnet. In Bild 4 wurde alternativ die Funktion binompdf(verwendet. In beiden Fällen kann die Formel mit kopierfähigen Zellbezügen definiert werden.
- Zur Ermittlung der Ablehnungs-Intervalle sind kumulierte Summen wie in Spalte C aus Bild 2 und Bild 5 geeignet. Markiert sind dort jeweils die Zellen, die eine Festlegung des Ablehnungs-Bereiches für die 5%-Grenze begründen.
- Das Rechenblatt kann so angelegt werden, dass es bei der Variation der Fragestellung flexibel bleibt. Wie die Bilder 3 u. 6 zeigen, lässt sich die Treffer-Wahrscheinlichkeit oder die Anzahl der Fragen leicht anpassen.
- Der Problem-Kontext sowie das Rechenblatt in CellSheet™ lassen sich leicht erweitern. Fragestellungen nach dem Aufbau geeigneter Tests, Variationen in der Größe des Ablehnungsbereiches sowie die Verwendung des Rechenblattes in anderen Zusammenhängen könnten sich anschließen.

- Das Beispiel ist geeignet, um mit Schülerinnen und Schülern die Grundfragen des Hypothesen-Tests zu diskutieren. Die Anordnung der einzelnen Aspekte deutet an, wie ein entsprechender Unterrichtsgang aussehen könnte. Eine erste, einfache Simulation des Tests ist wichtig, damit eine Erfahrungsbasis geschaffen wird.
- CellSheet™ kann auch eingesetzt werden, um eine Simulation des *Nullwissers* durchzuführen. Für kleine Versuchszahlen kann der Test auch experimentell z.B. mit Münzen oder Würfeln simuliert werden. Für größere Versuchszahlen ist der PC und ein entsprechendes TKP leistungsstärker.
- Im Unterricht sollte mit Schülerinnen und Schülern ein entsprechender Allgemeinbildungs-Test durchgeführt werden. Vor der Auswertung der Ergebnisse kann dann die Erarbeitung der Problemfelder stehen, dadurch ist ein persönlicher Bezug zum Unterrichts-Inhalt hergestellt.
  Der Unterrichtsgang kann darauf ausgelegt sein, den Ansatz von BERNOULLI an geeigneter Stelle zu erarbeiten; die Idee zur Aufgabe geht auf Wolfgang Riemer zurück (vgl. Literatur-Liste).