Luftballons – Potenz-Funktionen/Regression

Wenn man einen Luftballon aufbläst, ändert sich mit dem Volumen auch der Umfang. Gibt es einen funktionalen Zusammenhang bzw. eine Funktionsgleichung, der diese Vermutung (näherungsweise) bestätigt?

Problemfelder:

1) Führe ein entspechendes Experiment durch: Mehrere Luftballons werden (bis zum Platzen) aufgeblasen, dabei werden bei jedem Atemstoß der zugehörige Umfang des Ballons mit einem Maßband gemessen. Man ist bemüht, möglichst gleichmäßig zu pusten, um die Anzahl als Maß für das Volumen zu benutzen. Vergleichsweise führt eine Gruppe das Experiment mit einer Ballpumpe durch. Einige Gruppen bemühen sich, den Ballon jedes Mal in Kugelform zu bringen.
2) Die Daten werden in den CellSheet™ eingegeben und anschließend wird ein Datenplot durchgeführt. Welche Vermutungen bzgl. eines funktionellen Zusammenhanges bestehen? Kann es eine Logarithmusfunktion oder eine Wurzelfunktion sein?
3) In CellSheet werden in jeweils einer Zelle Parameter a und b eingegeben und mittels dieser Parameter versucht, eine theoretische Näherungsfunktion der Form $y= a\cdot x^b$ zu erzeugen, die der realen Datenmenge möglichst gut entspricht. Die theoretische Funktion kann in einer Spalte neben den Daten plaziert werden. Ändert man den Parameter, ändern sich bei Aktualisierung auch die theoretischen Funktionswerte.
4) Wie erhält man eine beste theoretische Funktion der Form $y= a\cdot x^b$? Welches Kriterium muss man hierbei wählen?
5) Untersuche die Differenzen der Daten und der theoretischen Funktion. Untersuche auch das Quadrat dieser Differenzen. Summiere diese Differenzen auf. Was fällt hierbei auf? Warum ist die quadratische Differenz besser geeignet?
6) Versuche die Parameter so zu wählen, dass die Summe der quadratischen Differenzen möglichst klein ist.
7) Vergleiche dein Verfahren mit dem, das auf Seite 14 beschrieben ist. Was ist gleich, was ist unterschiedlich?
8) Bestimme mit dem GTR und dem Regressionsmodul mittels der PwrReg (Power-Regression – Potenzfunktion-Regression) die vermeindlich beste theoretische Funktion und vergleiche sie mit deinen experimentellen Werten.
9) Gehe davon aus, dass der Ballon eine ideale Kugel ist. Jetzt kannst du das Problem theoretisch lösen.

Experimentiere mit Hilfe der Tabellenkalkulation. Man kann die Fehlerquadrate auch mittels einer Dynamischer-Geometrie-Software veranschaulichen, überzeugend gelingt das für lineare Ausgleichsfunktionen (siehe S.14/15).

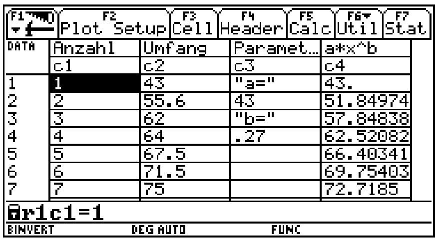
Analyse:

Man kann die Punkte in der Tabellenkalkulation eingeben und sich die Punkte plotten lassen. Hierbei ist es unter Umständen sinnvoll, die Punkte verbinden zu lassen. Dann legt man mittels des y=-Menüs entsprechende Funktionen dadurch. Hierbei kann sich bereits eine Diskussion über die Güte der Ausgleichsfunktion ergeben.

Nach Einführung von Abstandsmaßen sind die Untersuchungen mittels CellSheet™ besonders einfach zu realisieren. Hier kann mit (einfachen) Differenzen, den Absolutbeträgen oder den quadratischen Abständen experimentiert werden.

Will man die Ausgleichsfunktion analytisch bestimmen, muss man eine Funktion von zwei Variablen definieren, die die Abstandssumme von Punkt und Funktion beschreibt. Von dieser Funktion ist das Minimum gesucht, dass sich mittels partieller Ableitungen bei einfachen Funktionen schnell finden lässt. Die ermittelten Werte werden mit denen des Regressionstools für die entsprechende Regression übereinstimmen. Sinnvoll durchführbar ist das für die lineare und quadratische Regression, bei „höheren" Funktionstypen wird das Verfahren in der Schule nur eingeschränkt mittels CAS durchführbar sein. In der Sek I wird man sich nur diesen Werten experimentell nähern können, wobei aber das Grundprinzip trotzdem deutlich wird. So kann man die Black.Box zur Regression etwas erhellen.
Die analytische Untersuchung der minimalen (Fehler-)Quadratsumme führt bei diesem Ansatz mit partieller Differentiation nicht mehr auf ein lineares Gleichungssystem, was die Lösung mit schulischen Mittel stark einschränkt.

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-89/92/Voyage 200 bzw. TI-83)



DATA	Anzahl	Umfang	Paramet…	a*x^b
	c1	c2	c3	c4
1	1	43	"a="	43.
2	2	55.6	43	51.84974
3	3	62	"b="	57.84838
4	4	64	.27	62.52082
5	5	67.5		66.40341
6	6	71.5		69.75403
7	7	75		72.7185

r1c1=1

Bild 1

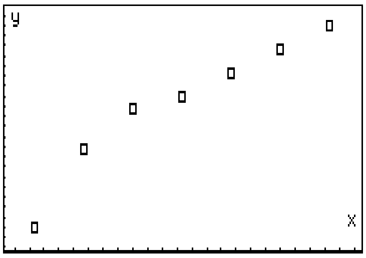
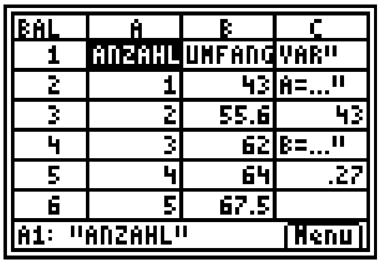


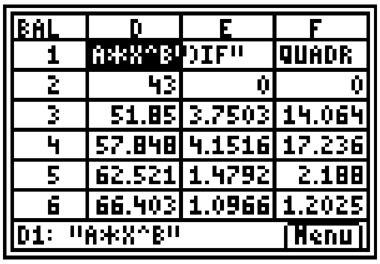
Bild 2



BAL	A	B	C
1	ANZAHL	UMFANG	VAR"
2	1	43	A=..."
3	2	55.6	43
4	3	62	B=..."
5	4	64	.27
6	5	67.5	

A1: "ANZAHL" Menu

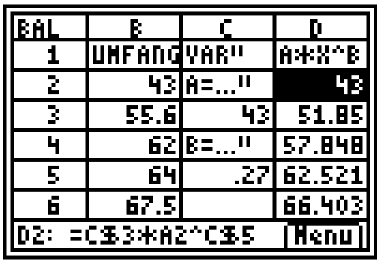
Bild 3



BAL	D	E	F
1	A*X^B	DIF"	QUADR
2	43	0	0
3	51.85	3.7503	14.064
4	57.848	4.1516	17.236
5	62.521	1.4792	2.188
6	66.403	1.0966	1.2025

D1: "A*X^B" Menu

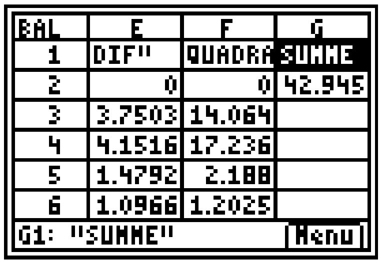
Bild 4



BAL	B	C	D
1	UMFANG	VAR"	A*X^B
2	43	A=..."	43
3	55.6	43	51.85
4	62	B=..."	57.848
5	64	.27	62.521
6	67.5		66.403

D2: =C$3*A2^C$5 Menu

Bild 5



BAL	E	F	G
1	DIF"	QUADRA	SUMME
2	0	0	42.945
3	3.7503	14.064	
4	4.1516	17.236	
5	1.4792	2.188	
6	1.0966	1.2025	

G1: "SUMME" Menu

Bild 6

Hinweise
Diese Untersuchung ist besonders gut in Partnerarbeit durchführbar. Die unterschiedlichen Datenmengen im Rahmen des Experimentes erhöhen noch den Anreiz der Untersuchung!

Die Untersuchung des idealen Körpers Kugel führt auf eine Abhängigkeit von Umfang und Volumen:
$V(r) = 4/3\cdot\pi\cdot r^3 \Leftrightarrow r = (3/4\cdot V/\pi)^{1/3}$
$U(r) = 2\cdot\pi\cdot r = 2\cdot\pi\cdot(3/4\cdot V/\pi)^{1/3} = a\cdot V^b = a\cdot V^{1/3}$

Die Untersuchungen zur quadratischen und linearen Regression verlaufen analog.