Das NEWTON-sche Näherungsverfahren

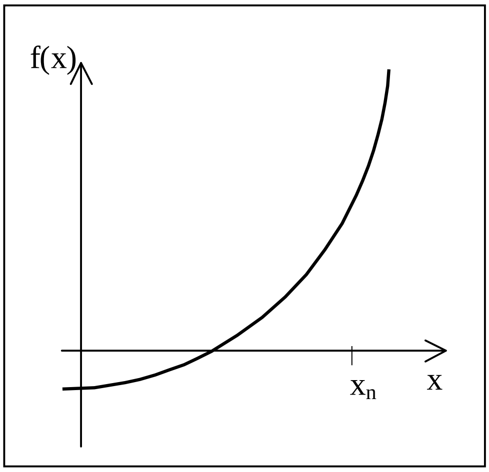
Analysieren Sie das NEWTON-sche Näherungsverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit einem Startwert x_0 zur Bestimmung von Nullstellen ganzrationaler Funktion.

Problemfelder

1) Wie lässt sich das Newtonsche Näherungsverfahren graphisch beschreiben? Zeichnen Sie in den nebenstehenden Ausschnitt aus einem Funktionsgraphen den Punkt $P(x_n \mid f(x_n))$ sowie die Tangente an den Graphen im Punkt P ein. Bezeichnen Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse mit x_{n+1}. Wie lässt sich aus der Skizze die Formel des Newton-Verfahrens ableiten? (Vergessen Sie nicht zu iterieren!)



2) Welche Voraussetzung(en) muss (müssen) für die Konvergenz des Verfahrens erfüllt sein?
3) Was müssen Sie demnach bei der Auswahl der Startwerte beachten?
4) Führen Sie mit Hilfe der Tabellenkalkulation das NEWTON-sche Näherungsverfahren für verschiedene ganzrationale Funktion durch
   Betrachten Sie z. B. die Funktion f mit $f(x) = x^3-2x-5$ und $f(x) = x^3-2x+1$)!
5) Welche Nullstellengenauigkeit erreichen Sie mit Hilfe der Tabellenkalkulation?
6) Welche Aussagen können Sie über das Konvergenzverhalten des Verfahrens machen? Vergleichen Sie mit dem Intervallhalbierungsverfahren (vgl. S. 52).
7) Informieren Sie sich über Anwendungsbereiche für das NEWTON-sche und andere Näherungsverfahren!

Analyse:

Die Analyse des NEWTON-Verfahrens ist in jedem Schulbuch zur Analysis nachzulesen.Es basiert auf der Zuhilfenahme der entsprechenden Tangenten. Auf eine weitere Analyse wird hier verzichtet.

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-83)

NEWT	A	B	C
3	N	XN	F(XN)
4	1	5	110
5	2	3.4932	30.637
6	3	2.6078	7.5197
7	4	2.1992	1.2381
8	5	2.1002	.06366
C5: =(B5)³-2B5-5			Menu

Bild 1

NEWT	D	E	F
3	F'(XN)	F(XN)/	XN+1
4	73	1.5068	3.4932
5	34.606	.88531	2.6078
6	18.402	.40863	2.1992
7	12.51	.09897	2.1002
8	11.233	.00567	2.0946
F5: =B5-E5			Menu

Bild 3

NEWT	A	B	C
8	5	2.1002	.06366
9	6	2.0946	2E -4
10	7	2.0946	2.1E -9
11	8	2.0946	0
12	9	2.0946	0
13			

C12: =(B12)³-2B12·→ [Menu]

Bild 2

NEWT	D	E	F
8	11.233	.00567	2.0946
9	11.162	1.8E -5	2.0946
10	11.161	2E -10	2.0946
11	11.161	0	2.0946
12	11.161	0	2.0946
13			

F12: =B12-E12 [Menu]

Bild 4

<u>Hinweise</u>

- Zur Berechung der Nullstelle nach dem NEWTON-schen Näherungsverfahren werden zunächst maximal sechs Spalten mit den Überschriften n, x_n, $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(x_n)/f'(x_n)$ und x_{n+1} eingerichtet. In die Zeile unterhalb der Überschriften werden die benötigten Formeln geschrieben, und zwar (vgl. Bild 1 und 2):
  in Spalte A der fortlaufende Wert für n, nämlich A4:= 1; A5:=A1+1,
  in B4 der zu variierende Ausgangswert (z.B. 4),
  in C4:= B4^3-2*B4-5, d.h. der Funktionsterm von f,
  in D4:= 3*B4^2-2, d.h. der Funktionsterm von f' ,
  in E4:=C4/D4, d.h. der Quotient,
  in F4:=B4-E4, d.h. die Rekursionsformel
  und in B5:=F4, d.h. der ermittelte Wert für x_{n+1}, der zur weiteren Berechnung übernommen wird.
  Diese Formeln werden nun in die darunter liegenden Zellen kopiert. Das Verfahren ist dann sinnvoll beendet, wenn der Funktionswert $f(x_n) \approx 0$ ist. Dann kann die zugehörige Nullstelle in der Spalte F abgelesen werden.
- Durch die Zahl der Spalten wird die Problemlösung schnell unübersichtlich. Gegebenenfalls können einzelne Spalten weggelassen werden. Dies erhöht zugleich die Geschwindigkeit der Berechnung.

Das Display des Ti-92/Voyage 200 gestattet die simultane Darstellung aller sechs Spalten:

F1 File | F2 Plot | F3 Edit | F4 Undo | F5 $ | F6 Funcs | F7 Stat | F8 ReCalc

new	A	B	C	D	E	F	G
2	n	xn	f(xn)	f'(xn)	f(xn)…	xn-f(…	
3	1	5	1.1E2	73.	1.5068	3.5	
4	2.	3.5	31.	35.	.88531	2.6	
5	3.	2.6	7.5	18.	.40863	2.2	
6	4.	2.2	1.2	13.	.09897	2.1	
7	5.	2.1	.06	11.	.00567	2.1	
8	6.	2.1	2.E -4	11.	.00002	2.1	

F8: =B8-E8

TEST RAD APPROX SEQ

Bild 5