Quadratisch, praktisch, gut – Das HERON-Verfahren

Wie lässt sich ein beliebiges Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln?

Problemfelder

1) Betrachte dazu ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $A = 27\ cm^2$ und der Seitenlänge $x_0 = 9\ cm$. (Preisfrage: Wie lang ist die Seite y_0?) Wie kannst du herausbekommen, welche Seitenlänge x_n das passende Quadrat annähernd haben muss?
2) Erprobe deine Überlegungen auch an einem weiteren Rechteck deiner Wahl. Kannst du eine Formel entwickeln, mit der du aus dem Flächeninhalt und der Länge des Rechtecks die Quadratseitenlänge zunehmend präziser bestimmen kannst?
(Tipp: Überlege dir dazu zunächst, wie du die Breite des Rechtecks aus diesen beiden Angaben berechnen kannst. Wie kannst du dann aus Rechtecklänge und –breite eine ‚verbesserte' Rechteckslänge bestimmen, so dass das Rechteck ‚quadratischer' wird?)
3) *Ein* mögliches Iterationsverfahren zur näherungsweise Berechnung der Seitenlänge des Quadrates für Rechtecke mit dem Flächeninhalt A (wobei x_0 die Länge der Rechteckseite ist) stammt von HERON (um 50 v. Chr.). Er gab folgende Formel an:
$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}}\right),\ n \in \mathrm{IN}.$$
Erkläre das Vorgehen HERON´s in einem kurzen Text.
4) Erstelle mit Hilfe von CellSheet™ ein Rechenblatt, welches mittels des HERON-Verfahrens die Seitenlänge des Quadrats x_n aus der Fläche des Rechtecks A und der Rechtecklänge x_0 berechnet.
5) Experimentiere mit deinem CellSheet, indem du Rechtecksflächeninhalt und –länge variierst. Nutze auch die graphische Darstellung. Stimmen die Ergebnisse mit deinen Vorüberlegungen überein? Sind negative Werte für x_0 zulässig? Und/oder für A? Wie ‚genau' ist das Ergebnis der Iteration? Wie viele Schritte braucht das Verfahren, um ‚genau' zu sein?
6) Das HERON-Verfahren ermöglicht die Berechnung von *Quadrat*wurzeln aus einer beliebigen Zahl. (Warum?)
Kannst du die Iterationsvorschrift aus 3) so verändern, dass man auch $\sqrt[3]{A}$ näherungsweise berechnen kann?
Vergleiche je eine Iteration für $\sqrt{A}$ und $\sqrt[3]{A}$ mit möglichst vielen Iterationsschritten.
7) Lässt sich das HERON-Verfahren auf die n-te Wurzel verallgemeinern? Gibt es Alternativen?

Analyse

- Der anschauliche Einstieg in das HERON-Verfahren soll den Schülerinnen und Schülern das Verständnis der abstrakten Iterationsformel erleichtern.
- Die Tabelle mit der Tabellenkalkulation sollte sinnvollerweise so angelegt werden, dass a und x_0 ohne weitere Eingaben geändert werden können (vgl. Bild 1).
- In Frage 3) liefert das Ersetzen von x_{n-1} durch x_n für den Grenzfall $x_{n-1} = x_n$ die Aussage $x_n^2 = A$. In der Tabelle kann dies Gleichsetzen gut nachvollzogen werden.
Ausgehend von $x_n^3 = A$ findet man durch Umformung analog zu 3) die Formel $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}^2}\right)$. (Bemerkung: Eine Erklärung für die Notwendigkeit der Summe

liefert z. B. die graphische Untersuchung des HERON-Verfahrens mit Hilfe des Zahlenstrahls, indem man die iterierten Werte einzeichnet.)
Ab der vierten Wurzel wird das Verfahren instabil.

- In Aufgabe 5) zeigt sich die Stabilität des HERON -Verfahrens, das für beliebige (auch negative) x_0 recht schnell konvergiert. Die dritte Wurzel ist auch für negative A berechenbar; für Quadratwurzeln aus negativen A divergiert das Verfahren natürlich (Warum?).
- Die graphische Betrachtung des HERON -Verfahrens verdeutlicht das Intervallschachtelungsverfahren. Zusätzlich kann die Monotonie der Konvergenz untersucht werden (Frage 6)); der Vergleich zwischen der einfachen Konvergenz beim Wurzelziehen, dem konvergierenden Hin- und Herspringen bei der dritten Wurzel und dem Divergieren beim Wurzelziehen aus einer negativen Zahl bietet sich an.

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-83)

QHER	A	B	C
1	A=	53	
2	X0=	1	
3	n	Xn	
4	1	27	
5	2	14.481	
6	3	9.0707	

B6: =.5*(B5+$B$1/B5)

Bild 1

QHER	A	B	C
6	3	9.0707	
7	4	7.4568	
8	5	7.2822	
9	6	7.2801	
10	7	7.2801	
11	8	7.2801	

B11: =.5(B10+$B$1/B10)

Bild 2

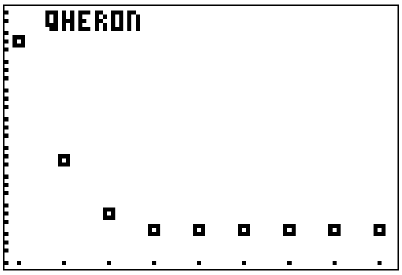

Bild 3

KHER	A	B	C
1	A=	250	
2	X0=	6.5	
3	n	Xn	
4	1	6.2086	
5	2	6.3471	
6	3	6.2764	

B5: =.5*(B4+$B$1/B4^2)

Bild 4

KHER	A	B	C
12	9	6.2992	
13	10	6.2998	
14	11	6.2995	
15	12	6.2997	
16	13	6.2996	
17	14	6.2996	

B17: =.5*(B16+B→ Menu

Bild 5

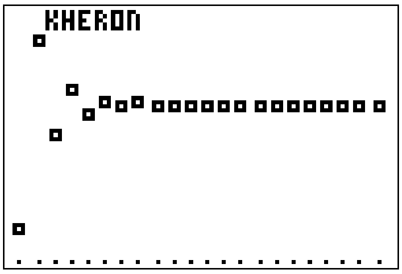

Bild 6

Hinweise

- Bild 1 und 2 geben ein Beispiel für die Programmierung des normalen HERON-Verfahrens (Die Wahl von $x_0 = 1$ dient der Anschaulichkeit der Graphik (s. Bild 3)).
- Bild 4 und 5 zeigen die Ausführung für die dritte Wurzel, wobei Bild 6 die dazugehörige alternierende graphische Darstellung ist.
- Die Werte A und x_0 können wie oben beschrieben positiv oder negativ gewählt werden.
- Diese Überlegungen lassen sich gut durch die Programmierung des HERON-Verfahrens mit dem graphikfähigen Taschenrechner ergänzen und vertiefen.
- Die Umsetzung auf dem TI-89/-92/Voyage200 ist analog.