Wachstumsmodelle – logistisches Wachstum

Wie schnell breiten sich Gerüchte aus? Wie schnell füllt sich ein Fußball-Stadion vor einem ausverkauften Bundesliga-Spiel? Wie wächst die Erdbevölkerung in den nächsten Jahrzehnten?
Alle diese Fragen berühren letztlich Wachstums-Probleme, bei denen nach der Art und Weise gefragt wird, wie eine gewisse Größe – informierte Personen, Zuschauerzahl, Bevölkerungszahl – mit der Zeit anwächst. Ein typisches Beispiel ist das Wachstum einer Hefepopulation:

t in Std.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N in mg	9,6	18,3	29	47,2	71,1	119,1	174,6	257,3	350,7	441,0

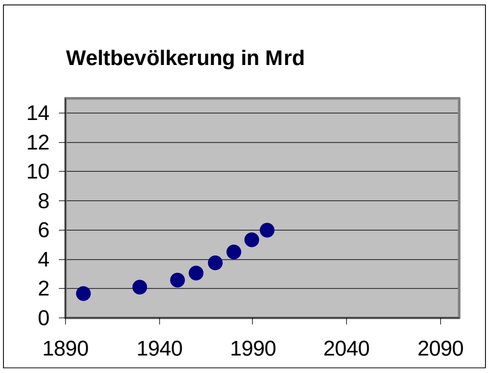
t in Std.	10	11	12	13	14	15	16	17	18
N in mg	513,3	559,7	594,8	629,4	640,8	651,1	655,9	659,6	661,8

Problemfelder:

1) Stelle die Daten mit Hilfe der Tabellenkalkulation graphisch dar. Diskutiert untereinander, durch welche Gründe dieses Verhalten festgelegt sein könnte. Überlegt euch, in welchen Zusammenhängen entsprechende Wachstums-Kurven auch auftauchen könnten.

Zur Modellierung dieses Verhaltens kann man folgende Annahmen machen: Die Kultur kann nur bis zu einer Grenze S anwachsen. Das prozentuale Wachstum nimmt umso stärker ab, je näher die Größe der Population an die Grenze heranwächst.

2) Vergleicht den rekursiven Ansatz $u_{n+1} = u_n \cdot (1 + c \cdot (S - u_n))$ mit den rekursiven Ansätzen und Modellannahmen zum exponentiellen und begrenzen Wachstum.
   Welches Modell eignet sich, um das Hefe-Wachstum zu beschreiben? Findet geeignete Parameterwerte. Vergleicht das Wachstum der Hefekultur in den ersten neun Stunden mit dem Modell des exponentiellen Wachstums. Welcher Wachstumsfaktor ist geeignet?
3) Untersucht, welchen Einfluss Variationen der Parameterwerte c und S auf das Verhalten der Folgeglieder haben. Wie wirken sich Veränderungen am Startwert u_0 aus?
4) Verwendet das Modell des logistischen Wachstums, um die Eingangsfragen für verschiedene Situationen zu modellieren:
   Wie schnell breitet sich nach diesem Modell ein Gerücht in eurer Schule aus? Wann ist ein Stadion zur Hälfte gefüllt? Welche Prognosen zur Bevölkerungs-Entwicklung könnt ihr mit Hilfe des Modells machen?



Analyse:

Das Wachstum von Populationen stößt immer an Grenzen. Unbegrenztes exponentielles Wachstum findet in der Realität kaum statt, wie er im Ansatz $u_{n+1} = u_n \cdot (1 + p)$ angenommen wird. Eine sinnvolle Annahme wäre, dass das Wachstum in jedem Zyklus um einen festen Prozentsatz einer Grenzdifferenz fortschreitet: $u_{n+1} = u_n + p \cdot (S - u_n)$.

Beim *begrenzten Wachstum* vollzieht sich mit $0 < p < 1$ eine exponentielle Annäherung an die durch S vorbestimmte Grenze. Das Wachstum ist für große Differenzen stark und nimmt dann ab. Diese Modellierung bleibt in sofern unrealistisch, als dass in kleinen Populationen zunächst ein geringes Wachstum beobachtet werden kann, das anfangs noch zunimmt. Im Ansatz

$$u_{n+1} = u_n \cdot (1 + c \cdot (S - u_n)) = u_n \cdot (1 + k - c \cdot u_n))$$

sind beide Aspekte berücksichtigt: Beim Anwachsen einer Population ist zunächst aufgrund kleiner Werte u_n ein geringes Wachstum mit hoher Wachstumsrate zu erwarten. Die Wachstumsrate selbst nimmt ab, wenn sich die Größe der Population der Grenze nähert. Diese Modellierung wird als *logistisches Wachstum* bezeichnet.
Biologen züchten Hefepopulationen auf einer Nährlösung. Das Wachstum könnte räumlich oder aufgrund fehlenden Nährstoffs begrenzt sein. Die Hefe hemmt durch den entstehenden Alkohol auch selbst ihr Wachstum.

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-83)

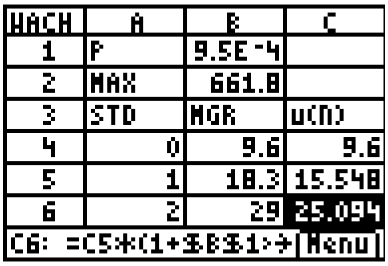


Bild 1

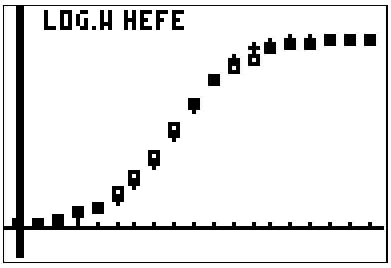


Bild 2

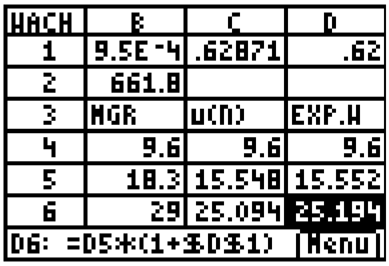


Bild 3

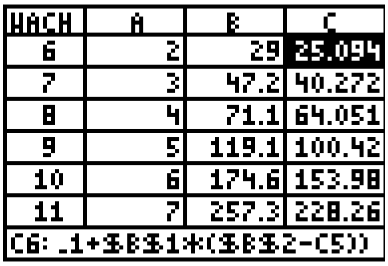


Bild 4

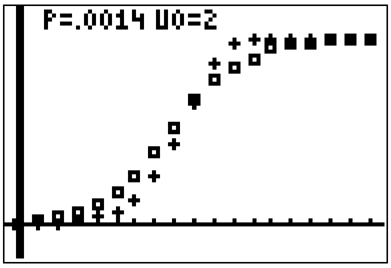


Bild 5

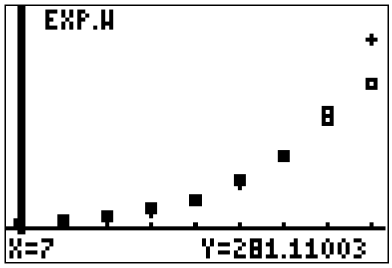


Bild 6

Hinweise:

- Aus den Bildern 1 u. 4 wird ersichtlich, wie ein mögliches Tabellenblatt aufgebaut werden könnte. CellSheet™ bietet die Möglichkeit, bis zu drei Datenreihen gleichzeitig darzustellen. Im Vergleich der realen Daten mit den berechneten Werten sind letztere in Bild 2 als Kreuze dargestellt.
- Mit dem Modell des logistischen Wachstums lässt sich das Hefewachstum nur annähernd beschreiben. Die Modellannahmen erweisen sich aber als vernünftig. Dies wird auch im Vergleich mit dem exponentiellen Wachstum nach Bild 3 bzw. Bild 6 deutlich.
- An den Beispielen können Schülerinnen und Schüler das Modell des logistischen Wachstums in unterschiedlichen Zusammenhängen diskutieren und erproben. Die Schülerinnen und Schüler sollten im Vorfeld schon Erfahrungen mit dem begrenzten Wachstum gesammelt haben.
- Mit MS-Excel™ kann der Einfluss der Modell-Parameter auch visuell-dynamisch simuliert werden; Parameter-Variationen wirken sich unmittelbar auf die Graphik aus. Arbeitsblätter mit sogenannten Schiebereglern sind im Internet zu finden, lassen sich aber auch mit wenig Aufwand selbst erstellen. Auf diese Weise kann den Schülerinnen und Schülern auch ein Zugang zum chaotischen Verhalten der Rekursion eröffnet werden.
- Datenbasis nach Kohorst/Portscheller, vgl. Literaturliste; im Diagramm zur Weltbevölkerung wurden folgende Werte verwendet:

Jahr	1900	1930	1950	1960	1970	1980	1990	1998
Zahl in Mrd.	1,608	2,07	2,52	3,021	3,697	4,444	5,285	5,926