Ein Fußball-Fan an der BERNOULLI-Kette

Herr Kurz besucht seit Jahren jedes Heimspiel seiner Lieblingsmannschaft. Im Grunde – so ist er sich sicher – kann das Team jeden Gegner schlagen. Allerdings ist festzuhalten, dass häufig genug der Gegner gewinnt! Herr Kurz räumt ein, dass nach seiner Erfahrung etwa jedes zweite Spiel gewonnen wird.

Problemfelder

1) Herr Kurz hofft auf drei Siege aus den nächsten drei Spielen. Klärt Herrn Kurz darüber auf, wie groß die Wahrscheinlichkeit für drei [zwei] Siege oder für keinen [einen] Sieg ist. Zeichnet ein Baumdiagramm.

Wir können jedes Spiel als Zufallsversuch interpretieren und immer nur zwei Ereignisse, *gewinnen* oder *nicht gewinnen*, betrachten. Dabei idealisieren wir, dass in einer Serie von 3 oder mehr Spielen die Gewinn-Wahrscheinlichkeit unverändert bleibt (unabhängige Versuche).

BERN	A	B	C
1	P=	.5	
2	SIEGE	P(K)	
3	0	.125	
4	1	.375	
5	2	.375	
6	3	.125	

B6: =B1^3 Menu

2) Untersucht die Fragestellung auch für andere (realistische) Gewinn-Wahrscheinlichkeiten, z.B. für euren Lieblingsverein.
   Verwendet dazu die Tabellenkalkulation. Bei welchen Gewinnwahrscheinlichkeiten ist es vernünftig, drei Siege in Folge zu erwarten?
3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für drei Heimsiege in 4 [5, 6, ...] Spielen?
   Entsprechende Baumdiagramme werden nun schnell unübersichtlich – stellt sie euch einfach vor: Wie müsste die entsprechende Wahrscheinlichkeit abgelesen bzw. berechnet werden? Verallgemeinert euer Vorgehen für n Spiele.
4) Pro Halbserie gibt es 8 oder 9 Heimspiele, über die Saison gerechnet sind es 17. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, jeweils etwa die Hälfte aller Spiele zu gewinnen? Erstellt mit der Tabellenkalkulation für diese und ähnliche Fragen ein Rechenblatt, mit dem die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Anzahl von Siegen ermittelt werden kann. Variiert die Gewinnwahrscheinlichkeiten wie zur Problemstellung aus Teil 2).
5) Herr Kurz wettet, dass von allen 17 Heimspielen mindestens 10 gewonnen werden. Herr Lang hält dagegen; er tippt auf höchstens 10 Heimsiege. Für welche Wette seht ihr bessere Chancen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen beide Aussagen zu?

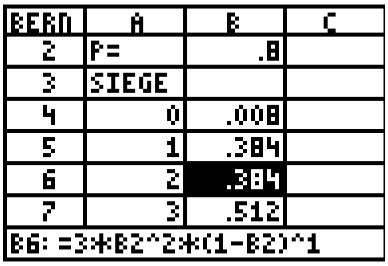
Analyse:

BERNOULLI-Experimente sind Zufallsversuche mit nur zwei möglichen Ausgängen. Häufig betrachtet man ein bestimmtes Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit p und das Gegenereignis mit der Wahrscheinlichkeit q = 1 – p. Bei mehrfacher unabhängiger Wiederholung des Zufalls-Versuchs spricht man von einer BERNOULLI-Kette. Für die Wahrscheinlichkeit, dass in n unabhängigen Versuchen das betrachtete Ereignis genau k mal eintritt, gilt nach der Formel von BERNOULLI:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

Die Binomial-Koeffizienten geben die Zahl der Möglichkeiten an, k Erfolge auf n Versuche aufzuteilen – dies entspricht der Zahl der Pfade im entsprechenden Baumdiagramm. Jedes dieser Elementar-Ereignisse tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein – dies entspricht der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades im Baumdiagramm.
Die Zufallsvariable X gibt die Zahl der Treffer bzw. Erfolge an. Die Wahrscheinlichkeits-Verteilung hängt von der Versuchzahl und der Wahrscheinlichkeit p ab.

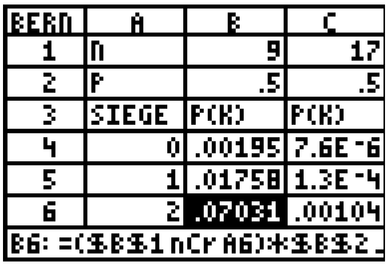
Rechenblatt in CellSheet™ (TI-83)



BERN	A	B	C
2	P=	.8	
3	SIEGE		
4	0	.008	
5	1	.384	
6	2	.384	
7	3	.512	

B6: =3*B2^2*(1-B2)^1

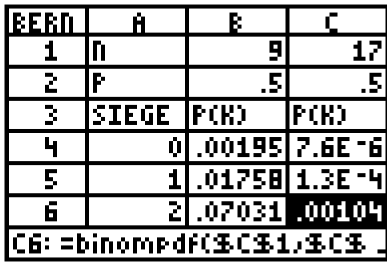
Bild 1



BERN	A	B	C
1	n	9	17
2	P	.5	.5
3	SIEGE	P(K)	P(K)
4	0	.00195	7.6E-6
5	1	.01758	1.3E-4
6	2	.07031	.00104

B6: =(B1 nCr A6)*B2_

Bild 2



BERN	A	B	C
1	n	9	17
2	P	.5	.5
3	SIEGE	P(K)	P(K)
4	0	.00195	7.6E-6
5	1	.01758	1.3E-4
6	2	.07031	.00104

C6: =binompdf(C1,C_

Bild 3

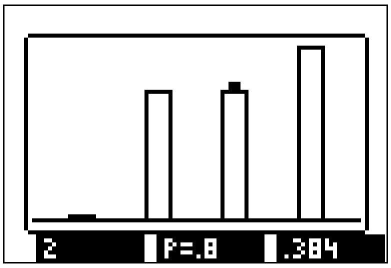


Bild 4

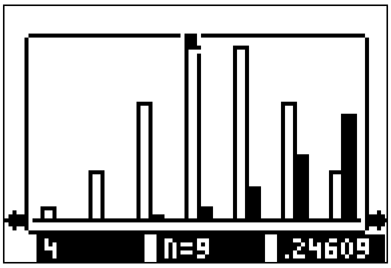


Bild 5

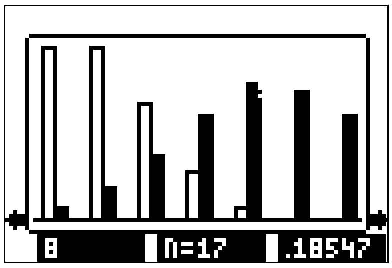


Bild 6

Hinweise:

- Im Tabellenblatt nach Bild 1 kann bei Variation der Erfolgswahrscheinlichkeit die gesuchte Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2 oder 3 Siege unmittelbar abgelesen werden. Die Formel in Zelle B6 können Schülerinnen und Schüler aus dem Baumdiagramm ableiten, die Grund-Struktur der Formel von Bernoulli wird dabei bereits erarbeitet.
- Die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten zeigt das Säulen-Diagramm nach Bild 4. Bei einer Gewinnwahrscheinlichkeit von p=0,8 liegt die Wahrscheinlichkeit für einen oder zwei Siege bei 0,384 – drei Siege treten mit der Wahrscheinlichkeit 0,512 auf.
- In Bild 2 wurden zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten nach der Formel von Bernoulli die Binomial-Koeffizienten direkt angegeben. Statt der Funktion `nCr` kann man auch die Funktion `binompdf(` wie in Bild 3 benutzen. In beiden Fällen können zum Aufbau des Tabellenblattes relative und absolute Bezüge verwendet werden.
- Die Säulendiagramme in den Bildern 5 und 6 zeigen die Wahrscheinlichkeits-Verteilung für p=0,5 und n=9 bzw. n=17. Im `Charts`...-Menü wurde die Option `5:Bar`... gewählt. Die Spalte A enthält die Trefferzahl, der entsprechende Zellbereich ab Zelle A4 wurde im Graphik-Dialog als `Categories` gewählt.
  Es empfiehlt sich, die Formeln in größere Zellbereiche zu kopieren, als für das gezeigt Beispiel nötig ist. Im gezeigten Rechenblatt sind alle Formeln bis auf Zeile 30 ausgedehnt. So können auch andere Verteilungen untersucht bzw. verschiedene Versuchslängen gleichzeitig dargestellt werden.
- Die Wahrscheinlichkeit für 4 bzw. 5 Siege aus neuen Spielen beträgt jeweils ca. 0,25. Beide Verteilungen sind wegen der Wahl p=0,5 symmetrisch. Die Wahrscheinlichkeit, in 17 Spielen 8 bzw. 9 Siege zu erzielen, ist mit ca. 0,185 etwas kleiner.
- Das Beispiel eignet sich, um Schülerinnen und Schülern die Erarbeitung der Formel von Bernoulli zu ermöglichen. Es ist sinnvoll, im Vorfeld Abzählprobleme, die auf Binomial-Koeffizienten führen, zu diskutieren.
- Die Tabellenkalkulation ermöglicht den Vergleich und die Untersuchung verschiedener Verteilungen. Mit der Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten aus betreffenden Zellbereichen zu summieren, können eine Vielzahl von Fragestellungen zügig untersucht werden.