

Thema: Die Eulersche Zahl – eine der Primadonnen der Mathematik

Aumayr Gertrud

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Zahlen, Zinseszinsrechnung, Modellieren, Grenzwert, Eulersche Zahl

Unterrichtsmaterial

Die Eulersche Zahl – Eine Primadonna der Mathematik

Prominenz:

Unter den Menschen ist Prominenz relativ und vergänglich. Ganz anders im Zahlenreich. Hier ist Prominenz eine bleibende Eigenschaft: Nur fünf Zahlen zählen dazu.

Galerie der mathematischen Prominenz:

Null, **Eins**, die Zahl **Pi**, die imaginäre Einheit **i** und zu guter Letzt die Eulersche Zahl **e**.

Im Reich der Zahlen ist Prominenz allein durch Relevanz zu erreichen.

Zwischen diesen Zahlen herrscht ähnlich wie oft bei prominenten Menschen eine Beziehung, nämlich die **Eulersche Identität**:

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

Aufgabe: Entdecke eine der vielen Besonderheiten von e.

Der etwas schrullige Herr Zopf denkt sehr langfristig. Er möchte ein Kapital von 1000 € 100 Jahre binden und holt bei diversen Banken Angebote ein:

Angebot A: 100% Verzinsung, einmal nach 100 Jahren verzinst

Angebot B: 50% Verzinsung, alle 50 Jahre verzinst

Angebot C: 10% Verzinsung, alle 10 Jahre verzinst

Angebot D: 1% Verzinsung, jährlich verzinst

Angebot E: 0.5% Verzinsung, halbjährlich verzinst

Angebot F: $\frac{1}{12}$ % Verzinsung, monatlich verzinst

- Überlege zuerst, wodurch sich die einzelnen Angebote unterscheiden und entscheide, welches das günstigste Angebot ist!
- Berechne das Kapital, über das die Erben nach 100 Jahren verfügen können für alle 6 Angebote und stelle das Endkapital in Abhängigkeit der Anzahl der Verzinsungen graphisch dar!

- c) Der Faktor, mit dem das Anfangskapital multipliziert wird, um das Endkapital zu erhalten, soll als Funktion $f(x)$ graphisch dargestellt werden. x sei dabei die Anzahl der Verzinsungen.
- d) Lese aus einer geeigneten Wertetabelle die ersten fünf Ziffern jener Zahl ab, an die sich diese Funktion für größer werdende x unbegrenzt annähert!

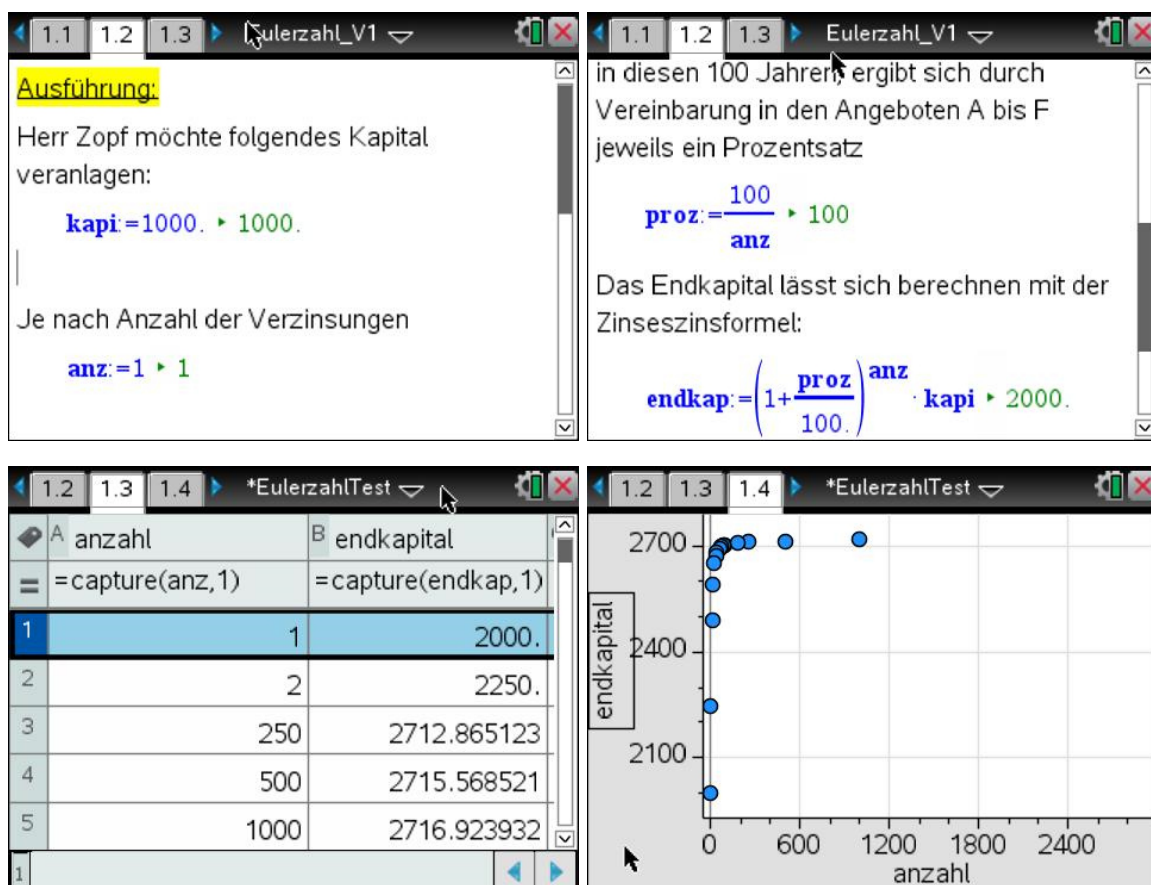


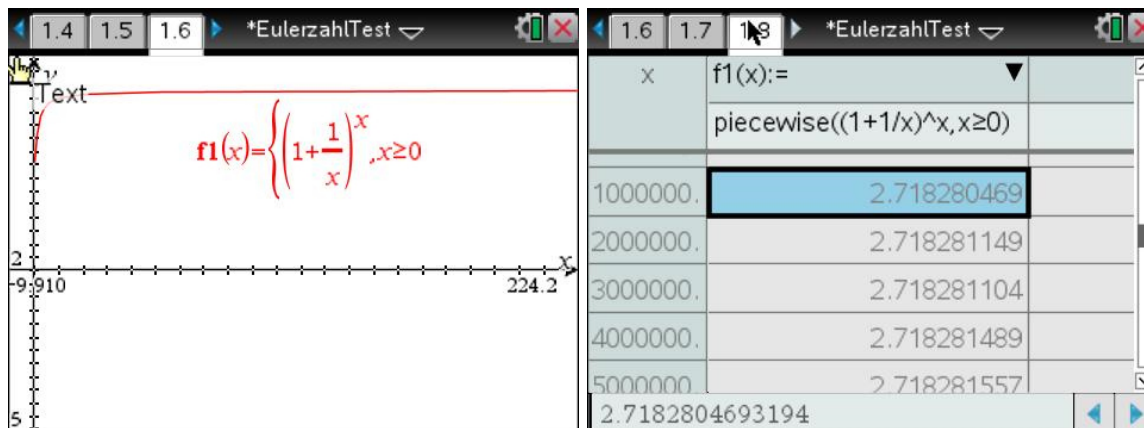
Vorschlag zur Umsetzung

Mögliche Screenshots:

Gearbeitet wird im Folgenden zunächst mit einer *Notes*-Applikation. Hier können die Werte für das Kapital und die Anzahl der Verzinsungen im betrachteten Zeitraum beliebig geändert werden und die Ergebnisse beobachtet werden.

Die Ergebnisse dieser Experimente werden in einer Tabelle mitgeschrieben und gleichzeitig in einem Diagramm aufgetragen.





Technologiehilfe

`capture(variable, 1)` ist der Befehl für automatische Datenerfassung. Bei Veränderung der Variable wird der neue Wert automatisch in eine Liste eingetragen. 1 steht für automatische Datenerfassung.



fügt in einer Graphikapplikation die Wertetabelle zur Funktion ein

Grundsätzlich kann auch das mitgelieferte tns-file zum Experimentieren verwendet werden.

Didaktischer Kommentar

Das Beispiel setzt die Kenntnis der Zinseszinsformel voraus.

Die Aufgabe soll dazu dienen den Schülern bewusst zu machen, dass es Zahlen gibt, die „sonderbare“ Eigenschaften haben und soll motivieren diese ausgezeichneten Zahlen näher kennenzulernen.

Auch wenn die Schülerinnen und Schüler an dieser Stelle die komplexen Zahlen noch nicht gelernt haben, kann man an dieser Stelle die Definition von i erwähnen und den Schülern bewusst machen, dass es Zahlen gibt, die über die reellen Zahlen hinausgehen.

Die Erwähnung der Eulerschen Identität soll hier den Lernenden zeigen, dass es "geheimnisvolle" Zusammenhänge gibt, die es für sie noch zu entdecken gilt.

Es bietet sich an, im Anschluss an dieses Beispiel die Grenzwertdefinition der Eulerschen Zahl einzuführen, das ist aber nicht zwingend.

Die Notes-Applikation bietet die Möglichkeit zum Probieren und zum selbstentdeckenden Lernen.

Viele Schülerinnen und Schüler werden selbst eigene Verzinsungszeiträume probieren wollen, etwa im Nanosekundentakt. Hier werden sie dann an die Grenzen des Rechners stoßen. Irgendwann wird „1+ etwas sehr, sehr kleines“ auf 1 gerundet und man erhält den Wert 1. Auch solche Diskussionen sind lehrreich. Will man sie vermeiden, muss man die Probiermöglichkeiten einschränken.

CAS – Projekt T³ Österreich

