Die Behandlung von Kettenbrüchen mit einem GTR

Heinz Pichler

1. Der Wert eines homogenen Kettenbruchs

Für einen Kettenbruch der Art

$$K+\cfrac{1}{K+\cfrac{1}{K+\cfrac{1}{K+\ddots}}}$$

lässt sich der zahlenmäßige Wert mit dem Taschenrechner auf vielfältige Weise eruieren.

Rekursion: Steigt man Schritt für Schritt im Bruch von unten nach oben, folgt die Rekursion dem Prinzip:

$$N_j = K + \frac{1}{N_{j-1}}$$

Überantwortet man dieses für den Koeffizienten $K = 1$ dem Rechner, indem man im `MODE` <Seq> die Einstellungen gemäß Abb.1a,b vornimmt, erhält man mit `TRACE` einen Werte-Graph (Abb.1c).

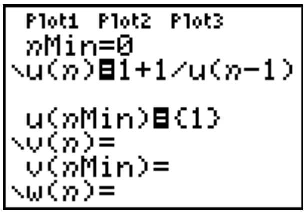

Abb. 1a

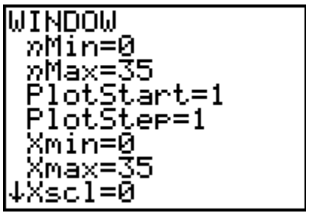

Abb. 1b

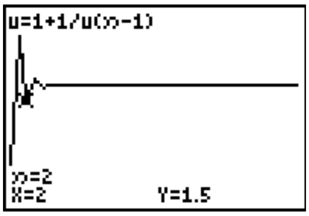

Abb. 1c

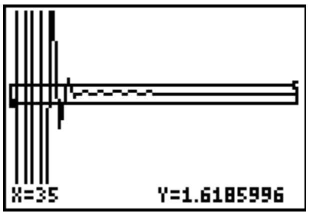

Abb. 1d

Der Index n zählt - von unten nach oben gelesen - die Anzahl der erfassten Bruchstriche. Man sieht am Verlauf der Ordinatengröße *Y*, die den Wert des *n*-stufigen Kettenbruchs verrät, die alternierende Annäherung an den Wert des unendlichen Kettenbruchs! Umrahmt man nach `ZOOM` <1> den "Auslauf" des Graphen mit einem schmalen Streifen (Abb.1d) und vergrößert mit ENTER mehrmals dessen Inhalt, so zeigt sich, wie drastisch die Werte mit zunehmender Schachtelung konvergieren!

Substitution: Zur Beobachtung des Konvergenzverhaltens in Abhängigkeit der Koeffizientengröße wird das Werte-Gefüge des Kettenbruchs vorteilhaft mit diskreten Standardfunktionen unter Einsatz einer kaskadenhaften Simulation zu erfassen sein. Die Funktionenschar aus Abb.2a ermittelt die Kettenbruchwerte für Tiefen von $n = 0, \ldots, 5$. Möchte man zur Vermeidung zu hoher Kurvendichten den nächsten Ast erst 11 Schachtelungsstufen später ansiedeln, hat man den dazwischenliegenden Termteil penibel auszuformulieren (Abb.2b). Auf die schließenden Klammern darf man dabei verzichten. Mit den Funktionen Y_7 und Y_8 werden also die Wertverläufe von Kettenbrüchen mit 17 bzw. 18 Koeffizienten beschrieben!

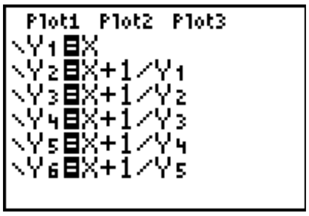

Abb. 2a

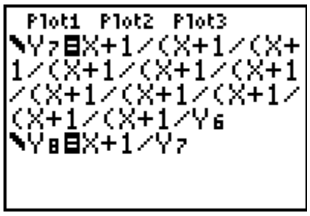

Abb. 2b

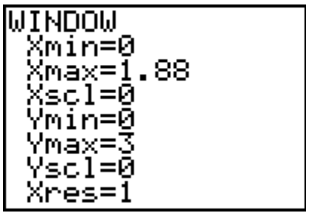

Abb. 2c

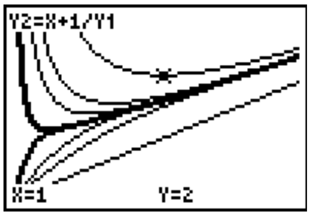

Abb. 2d

Bei dieser Art der Bruchaufbereitung lässt sich das Fortschreiten im Kettenbruch sowohl "von unten nach oben" als auch "von oben nach unten" deuten! In der Tat sind bei homogenen Kettenbrüchen beide Leseweisen identisch!

1.3 Das Grenzwert-Kalkül

Bislang hat man sich dem Grenzwert L eines unendlichen, homogenen Kettenbruchs bestenfalls genähert. Man fängt ihn durch eine geschickte Betrachtung ein, nämlich der, dass sich der Limes mit (einer) weiteren Schachtelung(en) nicht mehr ändern kann! In Anlehnung an die Rekursion aus Kapitel 1.1 oder die Substitutionen aus Kapitel 1.2 gilt:

$$K + \frac{1}{L} = L$$

Die numerische Lösung der quadratischen Gleichung liefert für $K = 1$ den Wert aus Abb.3, wobei der Schätzwert 1,5 der Abb.1e entnommen ist. Die algebraische Lösung erbringt den Ausdruck in Abb.3,Zl.4.

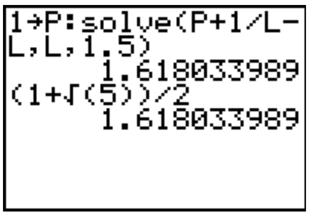

Abb. 3

2. Verwandlung einer Dezimalzahl in einen Kettenbruch

Jede reelle Zahl R lässt sich als inhomogener Kettenbruch

$$R = G_0 + \cfrac{1}{G_1 + \cfrac{1}{G_2 + \cfrac{1}{G_3 + \ddots}}}$$

darstellen, in dem die Größe G_0 den Ganzzahlteil der Zahl und die Größen G_1, G_2, G_3, … den Ganzzahlteil des jeweils verbleibenden, reziproken Restes darstellen.

Zur Verfahrensausführung auf dem Rechner hat man die Zahl in Vorkomma- und Nachkommateil zu zerlegen. Nachdem ersterer zur Anzeige gebracht wird (Abb.4a), wird von letzterem der Kehrwert gebildet, wodurch erneut eine zerlegungsfähige Dezimalzahl entsteht, mit der in derselben Weise zu verfahren ist (Abb.4a, b). Die Routine wird mit wiederholendem ENTER so lange ausgeführt, bis eine ungewöhnlich große Ganzzahl oder gar die Fehlermeldung ERR:DIVIDE BY 0 auftaucht. Sie ist Zeichen dafür, dass der zugrundeliegende Nachkommateil verschwindend klein war und die Kettenbruchbildung daher beendet ist! (In Anbetracht der begrenzten Rechengenauigkeit wird die Abbruch-Marke in der Regel umso bescheidener ausfallen, je mehr Ganzzahlteile bereits bezogen wurden und je größer diese waren.)

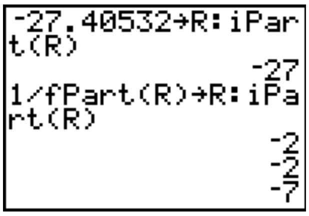

Abb. 4a

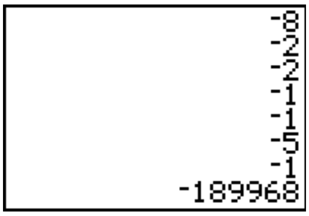

Abb. 4b

2.1 Kontrolle der Wandlung
Die rückführende Rechnung zur Dezimalzahl läuft im gewonnenen Kettenbruch wiederum von unten nach oben hin nach dem in Kapitel 1.1 dargelegten Rekursionsprinzip ab. Die unterschiedlichen Koeffizienten erfordern aber die ständige Anpassung der Rekursion. Ob die abbrechende Großzahl anfangs miteinbezogen wird, ist ziemlich unerheblich. In Abb.5a-c wird darauf verzichtet.

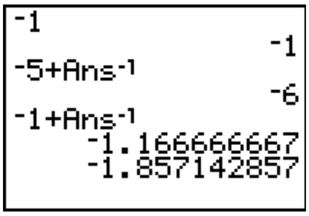

Abb. 5a

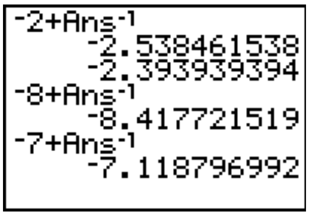

Abb. 5b

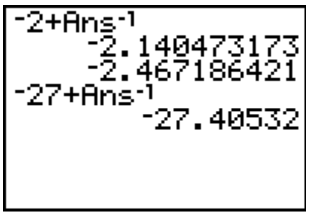

Abb. 5c

2.2 Vereinfachung des Kettenbruchs
Die Auflösung des Kettenbruchs zu einem einfachen Bruch erfolgt wieder von seiner tiefsten Stelle aus. Im Unterschied zum Prozess in Abb.5, bei dem die Zwischenergebnisse im Dezimalformat erscheinen, ist diesmal eine explizite Darstellung mit Zähler und Nenner vonnöten. Die Rekursion hat gegenüber jener in Kapitel 1.1 und jener in Abb.5 die umständlichere Form

$$\frac{Z_j}{N_j} = G_j + \frac{1}{\frac{Z_{j-1}}{N_{j-1}}} = \frac{G_j \cdot Z_{j-1} + N_{j-1}}{Z_{j-1}}$$

mit den Anfangswerten $Z_0 = G_0$ und $N_0 = 1$ und einer von unten nach oben laufenden Indizierung j.

Für den "Kettenbruch" aus Abb.4 nehmen die bruchlösenden Umformungen den in Abb.6a-d festgehaltenen Kanon ein. Der Speicher A dient darin als kurze Zwischenablage. Die wiederkehrende Mehrfachanweisung ordert man alsbald mit ENTRY und bessert sie an ihrem Anfang nach! Die listenhaften Ergebnisse stellen Zähler und Nenner des aktuellen Sub-Bruches dar. Letztendlich entspricht die Zahl -27,40532 also dem Bruch -685133/25000.

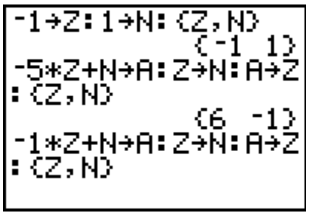

Abb. 6a

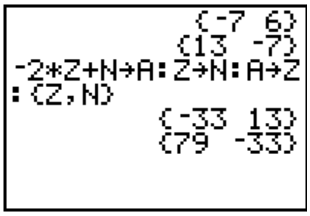

Abb. 6b

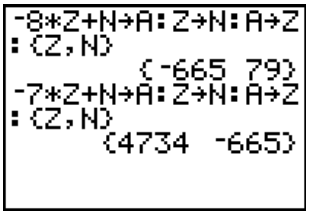

Abb. 6c

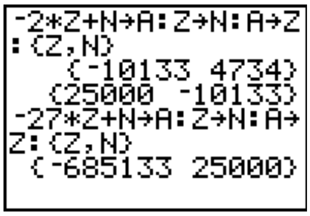

Abb. 6d

Die genannte Eigenschaft und das ausgeprägte Konvergenzverhalten machen dieses Verfahren zur Wandlung einer Dezimalzahl in einen Bruch so attraktiv! Einstweilen hat es noch den Nachteil, dass der Kettenbruch in seiner vollen Länge vorliegen muss, ehe man mit der Bruchvereinfachung beginnen kann! Deshalb wird es im Folgenden verbessert!

3. Rekursive Wandlung einer Dezimalzahl zu einem gekürzten Bruch

Vereinfacht man den am Eingang zu Kapitel 2 stehenden Kettenbruch für die Schachtelungen $n = 0, 1, 2, 3, 4$ zu den Einfachbrüchen

$$\frac{Z_0}{N_0}\ ;\ \frac{Z_1}{N_1}\ ; \ldots ;\ \frac{Z_4}{N_4},$$

ergeben sich in Zähler und Nenner immer umfangreichere Gebilde. Für den letzten Kettenbruch entsteht bereits der Koloss

$$\frac{G_4\Big\{G_3\Big[G_2\big(G_1(G_0)+1\big)+(G_0)\Big]+\big(G_1(G_0)+1\big)\Big\}+\Big[G_2\big(G_1(G_0)+1\big)+(G}{G_4\Big\{G_3\Big[G_2\big(G_1\big)+(1)\Big]+\big(G_1\big)\Big\}+\Big[G_2\big(G_1\big)+(1)\Big]}$$

,

in dem aber alle Klammerterme Zählern und Nennern der -hier nicht aufgeschlüsselten- Vorgänger-Brüche entsprechen. Und zwar stellen die kleinrundgeklammerten Inhalte im Zähler den Wert Z_0 und im Nenner den Wert N_0 dar, die großrundgeklammerten Inhalte im Zähler den Wert Z_1 und im Nenner den Wert N_1, die eckiggeklammerten Inhalte den Wert Z_2 bzw. den Wert N_2 und die geschwungengeklammerten Inhalte den Wert Z_3 bzw. N_3 dar.

Da dieses Schachtelungsprinzip für die weiteren Bruchtiefen dasselbe bleibt, bestehen für Zähler und Nenner die Rekursionen

$$Z_i = G_i \cdot Z_{i-1} + Z_{i-2} \quad \text{mit} \quad Z_0 = G_0;\ Z_{-1} = 1$$
$$N_i = G_i \cdot N_{i-1} + N_{i-2} \quad \text{mit} \quad N_0 = 1;\ N_{-1} = 0$$

mit den nebenstehenden, teils extrapolierten Anfangswerten. (Die Indexzählung *i* verläuft im Kettenbruch diesmal von oben nach unten.)

Die schrittweise Abspaltung der Kettenbruch-Koeffizienten aus einer Dezimalzahl, gepaart mit der Entwicklung des zugehörigen, gekürzten Bruches, wird in den Abb.7a-c an der Zahl -27,40532 durchgespielt. Die Speicher *X*, *Y*, *Z* dienen als Depots für die Zähler Z_{i-2}, Z_{i-1}, Z_i, die Speicher *L*, *M*, *N* als solche für die Nenner N_{i-2}, N_{i-1}, N_i.

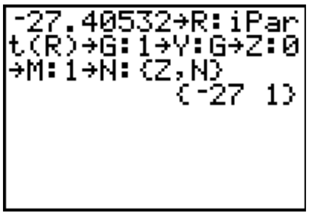

Abb. 7a

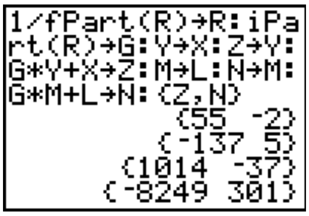

Abb. 7b

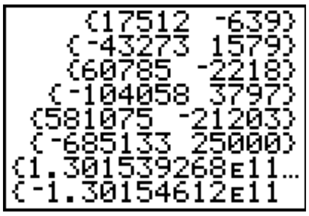

Abb. 7c

Als Folge der beschränkten Rechengenauigkeit schleichen sich in die Bruchentwicklung alsbald Fehler ein, die in vielen Fällen durch starken Resultatzuwachs (Abb.7c,Zl.7) oder die Fehlermeldung ERR:DIVIDE BY 0 auffallen.

3.1 Automatisation

Das beiliegende Programm `ANSFRAC.8xp` führt für den aktuell im Ans-Speicher stehenden Skalarwert eine Bruchbildung nach dem vorhin erörterten Prinzip durch. Der Auswurf von Zwischenresultaten unterbleibt; der Schleifen-Lauf wird automatisch an passender Stelle beendet. So wird die Kreiszahl beispielsweise auf die Anweisung

`π:prgmANSFRAC`

hin in der Form der Abb.9a und im mit `STAT<1>` aufzurufenden Listeneditor in jener der Abb.9b präsentiert.

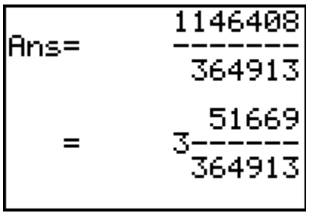

Abb. 9a

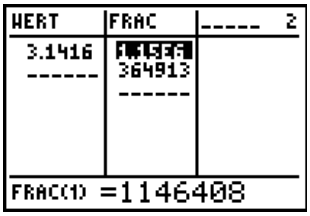

Abb. 9b

Wenn man auf die Darstellung als Gemischte Zahl verzichten kann und Zähler, wie Nenner nicht abgespeichert haben muss, empfiehlt sich zur Wandlung in einen gekürzten Bruch natürlich die im Rechner eingebaute Funktion ▸Frac. Sie arbeitet geringfügig anders, wie das erste Beispiel in Abb.10a zeigt, und hat neben der raschen Verfügbarkeit auch den Vorzug, über reelle Skalare hinaus auch Komplexe Zahlen, ja sogar Listen und Matrizen wandeln zu können (Abb.10b)!

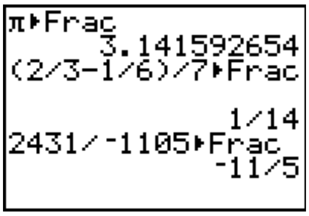

Abb. 10a

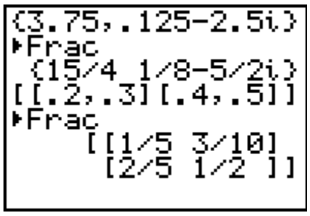

Abb. 10b

Die Funktion ▸Frac verläuft derart verlässlich und für den Nutzer unkompliziert, dass "Bruchrechnen" mit dem Taschenrechner längst in dieser Weise abläuft, dass eingetippte Brüche vom Rechner durch Division sofort in eine Dezimalzahl verwandelt werden, als solche innerhalb des Terms weiterverrechnet werden und als Endresultat wieder in einen Bruch verwandelt werden (Abb.10a). Selbst der "reine Kürzungsprozess" läuft über diesen Umweg ab!

Autor:
Heinz Pichler, Spittal (AT)
pichler_h@lycos.at