Bungee Jumping
Kräfte, Arbeit und Energieerhaltung

Michael Roser

Vorbemerkung

An den Berufsmaturitätsschulen der Schweiz ist die Differenzial- und Integralrechnung nicht Gegenstand des obligatorischen Stoffplans. Deshalb wird in der folgenden Betrachtung bewusst auf diese Werkzeuge verzichtet und ein anderer Zugang aufgezeigt, um interessante praxisorientierte Fragen beantworten zu können.

Bungee Jumping ist eine Extremsportart, die sowohl bezüglich Sicherheit als auch in physikalischer Hinsicht interessante Fragen aufwirft:

Fragestellungen

(1) Wie lang darf das Seil höchstens sein, um Sicherheit zu gewährleisten?
(2) In welchem Punkt wird die maximale Geschwindigkeit des Sprunges erreicht und wie gross ist diese?
(3) In welchem Punkt des Sprunges verschwindet die resultierende Kraft?
(4) In welchem Punkt ist die springende Person der grössten Beschleunigung ausgesetzt und wie gross ist diese?

Um diese Fragen zu beantworten, werden in den folgenden Betrachtungen vereinfachend und idealisierend zugleich jegliche Reibungskräfte und die Masse des Seiles vernachlässigt. Somit kann im betrachteten Abschnitt der Bewegung (Absprung bis zum ersten Rebound) von der Erhaltung der Energie ausgegangen werden.

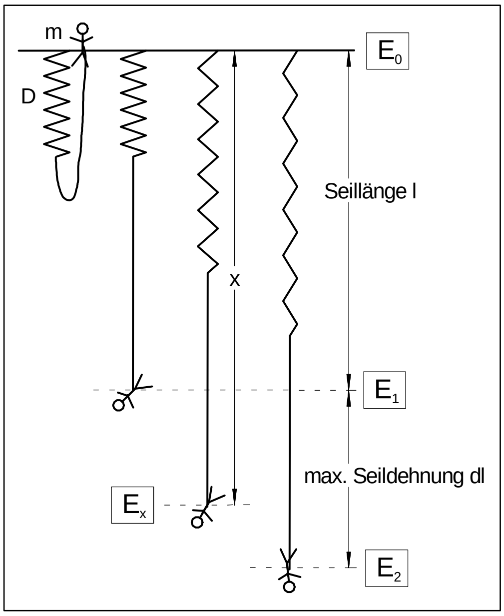

Abb. 1

1. Die Kräfte und die Arbeit

Welche Kräfte wirken während des Sprunges? Der Sprung lässt sich wesentlich in zwei Abschnitte (Abb. 1) unterteilen:

1. Solang das Seil noch entspannt ist, wirkt im freien Fall die konstante Beschleunigung g und somit die konstante Gewichtskraft $G = m \cdot g$ längs der Strecke l (= Seillänge).
2. Das elastische Seil wird nun gedehnt und die Rückstellkraft $F = -D \cdot (x-l)$ wächst gemäss dem Hooke'schen Gesetz proportional zur Dehnungsstrecke $x-l$ an.

2. Das Kraft-Weg-Diagramm

Längs der Fallstrecke l wirkt die konstante Gewichtskraft. Danach wirkt zusätzlich die zu $x-l$ proportional zunehmende Rückstellkraft (Hook'sches Gesetz), die der Gewichtskraft entgegenwirkt (Abb. 2).

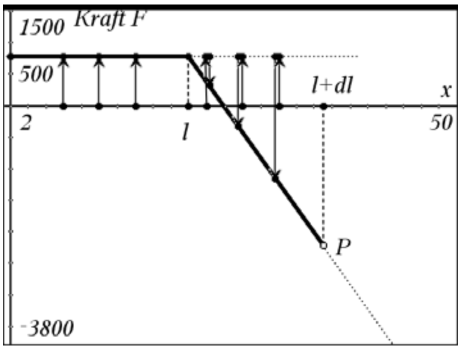

Abb. 2

Um welche Länge dl wird das Seil maximal gedehnt? Die Fläche unter dem Funktionsgraphen (Kraft · Weg) entspricht der Arbeit. Im ersten Abschnitt beschleunigt die Gewichtskraft der springenden Person bis das Seil gestreckt ist. Nun nimmt die Rückstellkraft linear zum Weg zu. Als Folge davon existiert im zweiten Abschnitt ein Punkt, in dem sich die Gewichtskraft und die Rückstellkraft kompensieren und somit keine Beschleunigung vorhanden ist. In diesem Punkt hat die springende Person dann die grösste Geschwindigkeit, da die resultierende Kraft danach der Bewegungsrichtung entgegenwirkt und somit eine Verzögerung verursacht.

Die Arbeit (Kraft · Weg), die die springende Person aus der Ruhe auf die maximale Geschwindigkeit beschleunigt, ist gleich gross wie die Arbeit, die die Bewegung verzögert und danach wieder zur Ruhe bringt. Deshalb müssen die Flächenstücke über und unterhalb der x-Achse gleich gross sein:

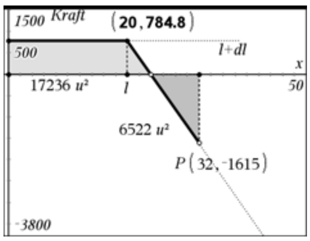

Abb. 3

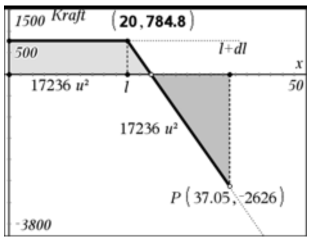

Abb. 4

Bei vorgegebener Gewichtskraft G, Seillänge l und Federkonstanten D kann die maximale Seildehnung dl durch die Gleichheit der Flächenteile experimentell angenähert werden, indem in der Graphik (Abb. 3) der Punkt P verschoben wird.

Durch direktes Anpassen der Koordinaten im Nachkommastellenbereich kann eine noch bessere Genauigkeit erreicht werden.

Die in der Graphik (Abb. 4) repräsentierte Situation zeigt, dass eine 80 kg schwere Person (G = m·g ≈ 785 N) mit einem 20 m langen Seil (D = 200 Nm^{-1} = Gefälle der Geraden) eine Sprungtiefe von 37 m erreicht. Die vor dem Rebound auftretende maximale Kraft von 2626 N zeigt, dass die Person in diesem Punkt einer maximalen Beschleunigung von etwa 3,3g (= 2626 N / 80 kg = 32, 83 ms^{-2}) ausgesetzt ist.

3. Unterschiedliche Energieformen und Energieerhaltung

Unter der Voraussetzung der Energieerhaltung kann in drei speziellen Punkten des Sprunges die Energie des Systems einfach beschrieben werden (vgl. Abb. 1):

Lageenergie	$E_0 = m \cdot g \cdot (l + dl)$
Lageenergie und kinetische Energie	$E_1 = m \cdot g \cdot dl + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_l^2$
Spannenergie	$E_2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot dl^2$

Nach der Fallhöhe x setzt sich die Energie des Systems folgendermassen zusammen:

$$E_x = m \cdot g \cdot \left(l + dl - x\right) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_x^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot \left(x - l\right)^2$$

Aus der Energieerhaltung $E_0 = E_2$ lässt sich die Dehnungsstrecke dl des Seiles berechnen und diese als Funktion in Abhängigkeit der Federkonstanten D, der Fallbeschleunigung g, der Seillänge l und der Masse m definieren (Abb. 5).

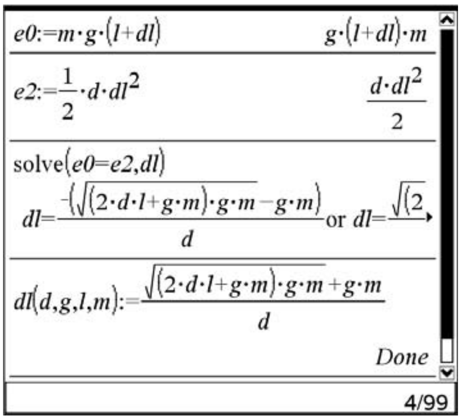

Abb. 5

Somit lässt sich die Funktion der Kraft in Abhängigkeit der Höhe definieren:

$$\mathbf{f1}(x)=\begin{cases}\mathbf{m\cdot g}, & 0\le x\le \mathbf{l}\\ \mathbf{m\cdot g - d\cdot}(x-\mathbf{l}), & \mathbf{l}\le x\le \mathbf{l+dl}(\mathbf{d,g,l,m})\end{cases}$$

Mit Schiebereglern für die Masse m, die Seillänge l und die Federkonstante D lässt sich im Kraft-Weg-Diagramm deren Einfluss auf die Graphik animativ nachvollziehen (Abb. 6).

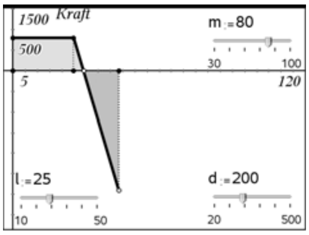

Abb. 6

Mit der Energieerhaltung lässt sich auch die Geschwindigkeit v_1 berechnen, die der Endgeschwindigkeit des freien Falles aus der Höhe l entspricht.

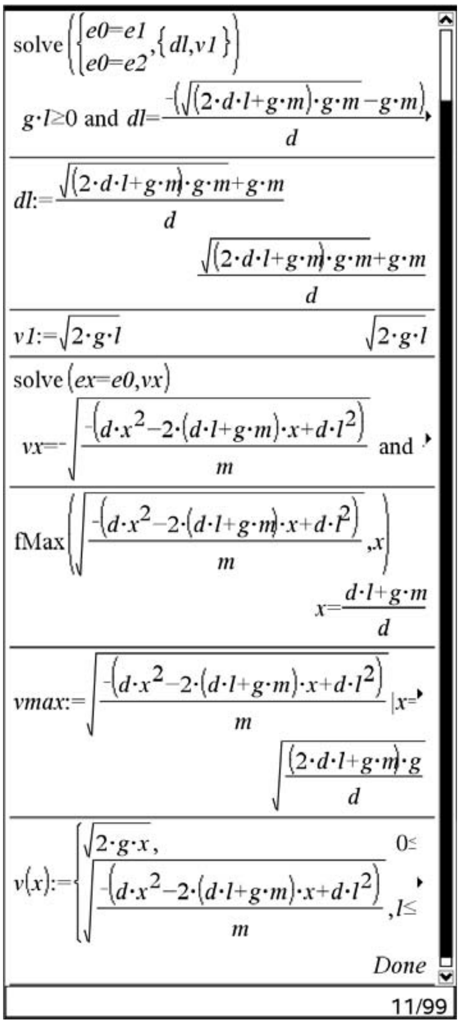

Abb. 7

Um die maximale Geschwindigkeit zu ermitteln, wird allgemein aus der Energieerhaltung die Momentangeschwindigkeit v_x nach der Fallhöhe (l+x) berechnet (Abb. 7). Es gilt:

$$v_x = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(d \cdot l + g \cdot m\right) - d \cdot x^2 - d \cdot l^2}{m}}$$

Mit der Maximumsfunktion lassen sich der Punkt x und die zugehörige maximale Geschwindigkeit v_{max} berechnen: Bei

$$x = \frac{d \cdot l + g \cdot m}{d}$$

wird folgende Geschwindigkeit erreicht:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{\left(2 \cdot d \cdot l + g \cdot m\right) \cdot g}{d}}$$

Die Momentangeschwindigkeit v(x) lässt sich nun als abschnittsweise definierte Funktion formulieren

$$v(x):=\begin{cases}\sqrt{2\cdot g\cdot x}, & 0\le x\le l\\ \sqrt{\dfrac{-\left(d\cdot x^2-2\cdot(d\cdot l+g\cdot m)\cdot x+d\cdot l^2\right)}{m}}, & l\le x\le l+dl\end{cases}$$

und graphisch darstellen (Abb. 8):

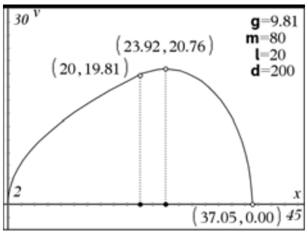

Abb. 8

Im Geschwindigkeits-Weg-Diagramm zeigt sich nun deutlich, dass die grösste Geschwindigkeit nach der Seillänge l angenommen wird.

Wie ändern sich längs des Fallweges die Anteile der unterschiedlichen Energieformen?

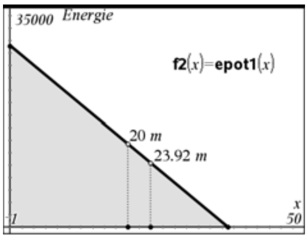

Abb. 9

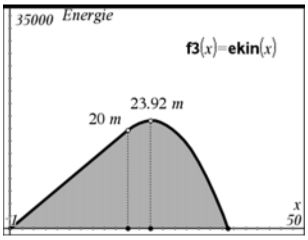

Abb. 10

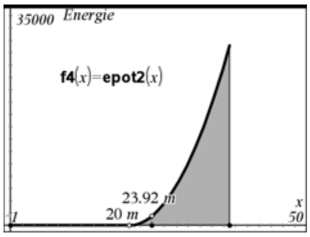

Abb. 11

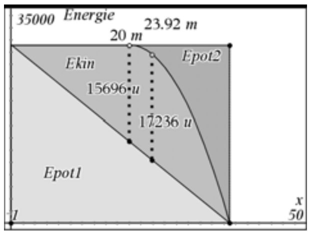

Abb. 12

Die kinetische Energie (Abb. 10) und die Spannenergie (Abb. 11) des Seiles sind beide abschnittsweise definierte Funktionen:

$$ekin(x):=\frac{1}{2}\cdot m\cdot(v(x))^2\,|\,0\le x\le l+dl$$

$$epot2(x):=\begin{cases}0, & 0\le x\le l\\ \dfrac{1}{2}\cdot d\cdot(x-l)^2, & l\le x\le l+dl\end{cases}$$

Eindrücklich zeigt sich schlussendlich auch graphisch, dass

1. die Summe aller Energieformen längs der Fallstrecke in jedem Punkt konstant ist.
2. die kinetische Energie und damit die Geschwindigkeit ihr Maximum nicht zu Beginn der Spannphase annimmt.

Autor:
Michael Roser, Neftenbach (CH)
Berufsmaturitätsschule Zürich
mroser@hispeed.ch