Steckbriefaufgaben zu ganzrationalen Funktionen - Modellierung eines Achterbahnschienenverlaufs

Miriam Sander

Langsam klackert die Achterbahn die Steigung hinauf. Am höchsten Punkt angekommen, scheint sie für einen Augenblick still zu stehen, bevor sie mit zunehmendem Tempo in die Tiefe und über weitere Gleiswölbungen saust…

Ein klassisches Fahrgeschäft, das den meisten Schülerinnen und Schülern als Freizeitvergnügen bekannt ist, bietet eine Alternative zu dem, was in vielen Schulbüchern anhand der Modellierung von Straßenübergängen behandelt wird: Trassierungsprobleme.

Bei der Konstruktion von Achterbahnverläufen werden seit einiger Zeit Spline-Funktionen verwendet. An den Schienenübergängen müssen dabei die erste und zweite Ableitung übereinstimmen. Für den Unterricht kann diese Problemstellung auf die Modellierung der Schnittstelle zweier Achterbahnschienenstücke reduziert werden. So fließt eine zeitgemäße Anwendung aus der Ingenieurwissenschaft in den Unterricht ein.

Ein möglicher Unterrichtsverlauf:

Spannungsgeladene Assoziationen zu Achterbahnen sollen die Motivation der Schülerinnen und Schüler wecken, sich mit der Übergangstelle zweier Funktionen auseinanderzusetzen. Zum Einstieg bietet sich ein Filmausschnitt einer Achterbahnfahrt an [http://www.youtube.com/watch?v=kUldGc06S3U (Zugriff am 22.12.2008)].

Das hier vorgeschlagene Video, das auf einem Computerspiel basiert, verdeutlicht durch die Perspektive eines Passagiers die Bedingungen für den weiteren Entwurfsprozess der Bahn: Die Fahrt eines Achterbahnwagens endet auf einem Plateau vor dem unvollendeten Streckenabschnitt. Die Frage nach dem weiteren Bahnverlauf steht im Raum. Nun bietet es sich an, den Schülerinnen und Schülern Zeit zu geben, sich auf die Problemstellung einzulassen und Assoziationen zu Achterbahnfahrten zu formulieren. Viele der Schülerinnen und Schüler sind vermutlich mit Achterbahnen gefahren, so dass sie eigene Erfahrungen zu der Planung des Streckenverlaufs äußern können. Anschließend wird über das Auflegen einer Folie, die eine Konstruktionszeichnung der bis hier geplanten Strecke zeigt, die Frage nach dem Verlauf zugespitzt.

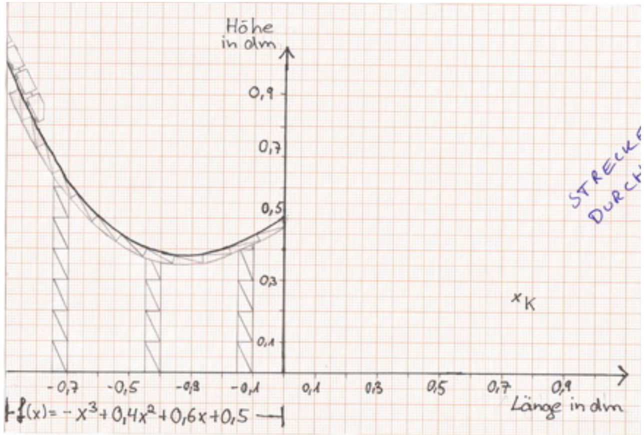

Abb. 1: Konstruktionszeichnung, Maßstab 0,1 dm ≙ 1 m

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln auf dieser Grundlage nun selbständig die Aufgabenstellung der Stunde. Sie könnte etwa so lauten: „Finde den Term einer Funktion, deren Graph die Achterbahnstrecke möglichst glatt fortführt und durch den Punkt K verläuft!“ (vgl. Abb. 1)

Um das Vorstellungsvermögen weiter zu fördern, sollen die Lernenden im Folgenden einen möglichen Verlauf nach rein optischen Gesichtspunkten einzeichnen und diese Ideen mit Hilfe von Folien in der Klasse vorstellen und diskutieren. Hier können Gesichtspunkte, wie etwa ein möglichst starkes Gefälle erreichen zu wollen und trotzdem einen nicht zu spitzen Winkel im höchsten Punkt zu erhalten, diskutiert werden.

Auf Grundlage der vorangegangenen Diskussion und der Konstruktionszeichnung stellen die Schülerinnen und Schüler mathematische Bedingungen an den Übergang in der Schnittstelle auf. Bei entsprechenden Vorkenntnissen sollten sie die Notwendigkeit der Übereinstimmung der Funktionswerte im Schnittpunkt nennen können. Auch die Bedingung des Verlaufs durch den Punkt K sollte durch die Schülerinnen und Schüler mathematisch formuliert werden. Die Übereinstimmung der Steigung im Schnittpunkt könnte im Unterrichtsgespräch über eine außermathematische Formulierung zu einer mathematischen Bedingung entwickelt werden. So könnten folgende Bedingungen an der Tafel gesammelt werden:

Eigenschaft des Funktionsgraphen	notwendige Funktionsbedingung
P(0 | 0,5) liegt auf dem Graphen.	f(0)=0,5
Q(0,75 | 0,25) liegt auf dem Graphen.	f(0,75)=0,25
der Graph hat an der Stelle 0 die Steigung 0,6.	f'(0)=0,6

Bei einer exemplarisch durchgeführten Stunde war der Grad der notwendigen ganzrationalen Funktion nicht für alle Schülerinnen und Schüler ersichtlich, so dass die Möglichkeiten einer Funktion vom Grad 2 und vom Grad 3 festgehalten wurden.

Darstellung der Lösungsideen

Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten in Gruppenarbeit eine Funktionsgleichung für einen möglichen Achterbahnverlauf. Hierzu stellten sie in der Beispielstunde auf Grundlage der gefundenen Bedingungen folgende Gleichungen auf:

$$0^2 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 0{,}5$$

$$0{,}75^2 \cdot a + 0{,}75 \cdot b + c = 0{,}25$$

$$2 \cdot 0 \cdot a + b = 0{,}6$$

Diese formten sie in ein Gleichungssystem um, das sie mit Hilfe des Taschenrechners (TI-84 Plus) lösten.

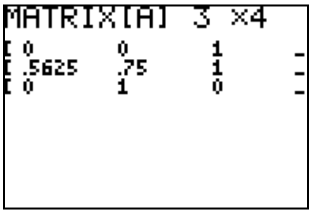

Abb. 2:
Gleichungssystem als Matrix

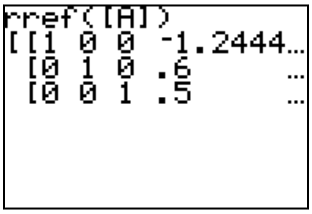

Abb. 3:
reduzierte Zeilen-Stufen-Form

Diese Lösung der Matrix führte zu folgender Funktionsgleichung für den weiteren Verlauf der Achterbahnschienen:

$$f(x) = -1{,}244x^2 + 0{,}6x + 0{,}5$$

Eine Schülergruppe hatte schnell ein Ergebnis erarbeitet, das die an der Tafel festgehaltenen Bedingungen berücksichtigte. Um den Lernenden einen Ausblick auf eine mögliche Verbesserung ihres Modells aufzuzeigen, sollten sie ein vorbereitetes Murmelbahnmodell untersuchen. Dieses (aus Dämmschaumplatte, Pappe und Folie konstruiert) entsprach etwa ihrem möglichen Verlauf der Bahn. Am Modell sollten die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Murmel an der Schnittstelle aus der Bahn springt. Damit kann die notwendige Konstanz in der zweiten Ableitung verdeutlicht werden. Durch diese Bedingung wird die Krümmungsruckfreiheit, die das stärkere Schwebegefühl bei der Achterbahnfahrt verursacht, erreicht. Dieser Aspekt bietet einen Ausblick auf die Behandlung von Krümmung und Splines.

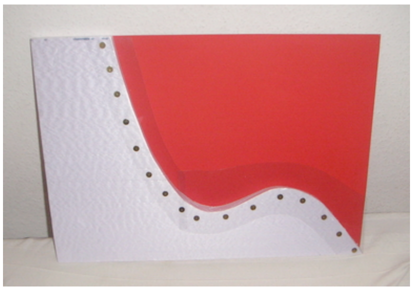

Abb. 4

Vorstellung der Ergebnisse

Am Ende der Unterrichtsstunde stellen die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse vor. Der errechnete Verlauf kann mit dem TI-84 Plus über abschnittsweise definierte Funktionen dargestellt werden.

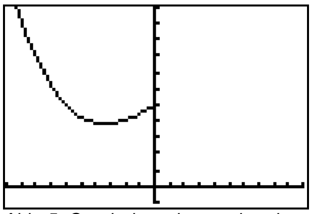

Abb. 5: Graph der schon vorhandenen Achterbahnstrecke

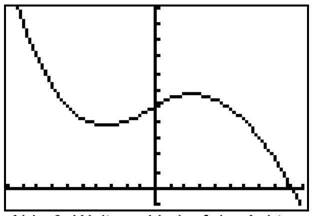

Abb. 6: Weiterer Verlauf der Achter-Bahn

Abschließend vergleichen die Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse mit ihren ersten Überlegungen, indem sie die zu Stundenbeginn gezeichneten Folien zu einem möglichen weiteren Verlauf auf ein Overhead-Display auflegen. So können errechneter Graph und gezeichneter Verlauf gleichzeitig an die Wand projiziert werden. Dieser Vergleich zeigte in der durchgeführten Stunde, dass die Schülerinnen und Schüler anfangs per Augenmaß ein recht gutes Gespür für einen möglichen Achterbahnverlauf entwickelt hatten. Andere Folien zeigten jedoch, dass sich die Schülerinnen und Schüler einen steileren Verlauf gewünscht hätten.

Nach dieser mathematischen Auseinandersetzung werden die Schülerinnen und Schüler das Vergnügen der nächsten Achterbahnfahrt sicher aus einer ganz neuen Perspektive erleben.

Autorin
Miriam Sander
Matthias-Claudius-Gymnasium Gehrden
miriamsander@web.de