- Probleme mathematisch lösen
- mathematisch modellieren
- mathematische Darstellungen verwenden
- mathematisch argumentieren
- kommunizieren
- mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Insbesondere zeigt die Erfahrung aus dem Piloteinsatz von TI-Nspire™ Navigator™, dass sich vielfältige Anlässe für Gespräche und Diskussionen schaffen lassen, welche Fragen zu den Aufgabenstellungen aufwerfen oder Anregungen zur Lösung geben. Beide Punkte sind zentrale Bestandteile beim Lösen mathematischer Fragestellungen. George Polya spricht von „Fragen Anregungen, Denkoperationen" *(George Polya: Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Fragestellungen. Tübingen, Basel ⁴1995, S.14)*

Diesem Einsatz und der damit verbundenen weiteren Entwicklung des Werkzeugs gilt es aufgeschlossen gegenüber zu stehen.

Autor:
Dr. Ewald Bichler
Universität Würzburg (D)
ewald.bichler@mathematik.uni-wuerzburg.de

Möglichkeiten der didaktischen Reduktion beim logistischen Wachstum

Lutz Breidert

Kurze Einführung

Es hat sich schon in der Vergangenheit gezeigt, dass die Struktur des Funktionsterms der Lösung der Differentialgleichung des logistischen Wachstums

$$f(t) = \frac{f(0) \cdot G}{f(0) + (G - f(0))e^{-\lambda \cdot G \cdot t}}$$

sich den Lernenden nicht ohne Weiteres intuitiv erschließt. Daher sollen im Folgenden einige Möglichkeiten zur didaktischen Reduktion beschrieben werden, die den Zugang erleichtern sollen. Für GK geeignet um Missverständnissen oder falschen Erwartungen vorzubeugen, sei darauf hingewiesen, dass hier kein Unterrichtsgang vorgestellt werden soll, sondern prinzipielle Eigenschaften des logistischen Wachstums, die auch leistungsschwächere Lernende aus dieser Unterrichtseinheit „mitnehmen" können.

Die Grundgedanken werden anhand einer Aufgabe entwickelt, die im Rahmen der Fortbildungen zur Einführung des Kerncurriculums durch die Multiplikatoren in Niedersachsen benutzt worden ist.

Aufgabe: Baumdurchmesser:

Bei einem Baum in einem Nationalpark wurde der Durchmesser (immer in 1,2m Höhe) im Verlauf der Jahre gemessen.

t in Jahren	0	10	20	30
Durchm. f(t) in m	0,044	0,076	0,119	0,182
	80	90	100	110
	0,731	0,818	0,881	0,924
t in Jahren	40	50	60	70
Durchm. f(t) in m	0,269	0,378	0,500	0,620
	120	130	140	
	0,953	0,971	0,982	

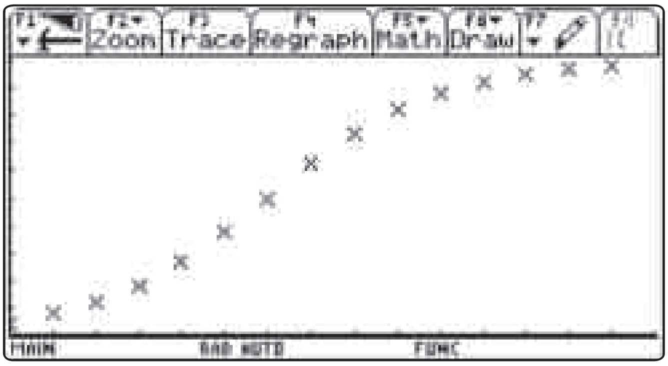

Abb.1: Grafische Darstellung der Messwerte (x-Achse zwischen 0 und 150; y-Achse zwischen 0 und 1)

Die grafische Darstellung der Daten legt nahe, dass das Wachstumsverhalten zu Beginn recht gut durch einen exponentiellen Wachstumsvorgang beschrieben werden kann, gegen Ende durch einen begrenzten Wachstumsvorgang und dazwischen annähernd linear.

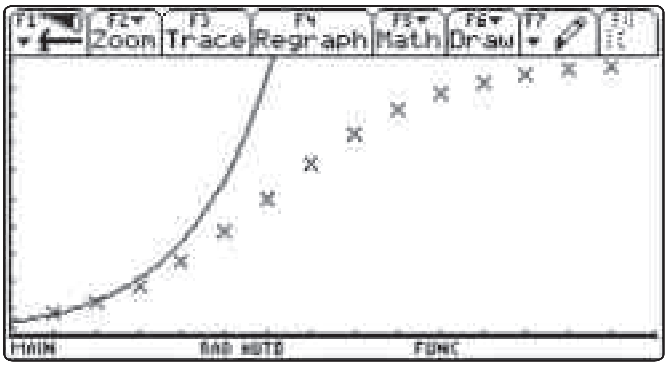

Abb.2: Abb.1 ergänzt durch Graphen des exponentiellen Wachstums

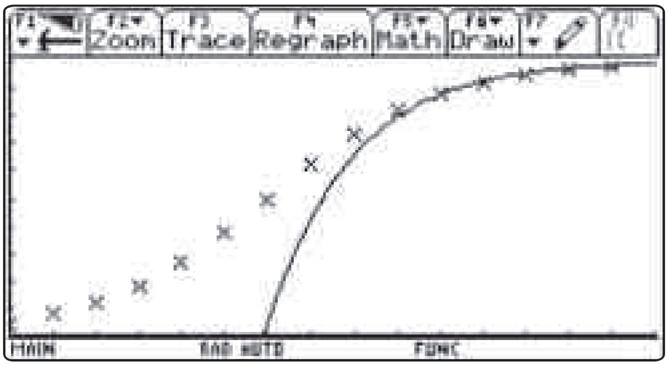

Abb.3: Abb.1 ergänzt durch Graphen des begrenzten Wachstums

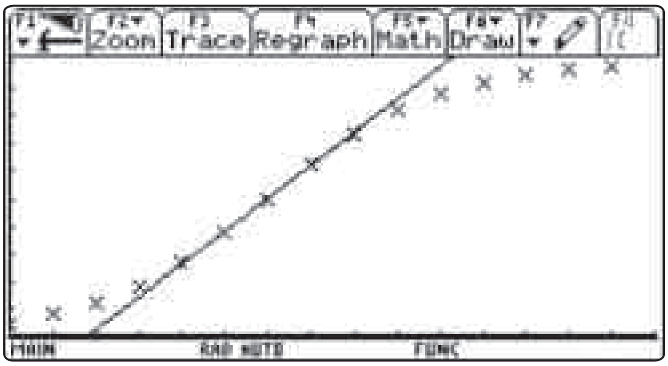

Abb.4: Abb.1 ergänzt durch Graphen des linearen Wachstums

Die Differentialgleichungen des exponentiellen und begrenzten Wachstums sollten aus dem Vorunterricht, wenn auch nicht unter dieser Bezeichnung ggf. in Wortform bekannt sein. Hier ist nun die Änderung offenbar sowohl proportional zum Bestand als auch proportional zur Differenz des Bestandes zur Sättigungsgrenze G, die hier der rechnerischen Vereinfachung halber bei 1 liegt. Der Ansatz $f'(t) = \lambda \cdot f(t) \cdot (G - f(t))$ ist sinnvoll, weil für kleine Zeiten $f(t)$ nahe bei 0 liegt und dadurch gilt: $G - f(t) \approx 1$. Daher gilt für kleine t in etwa die Differentialgleichung des exponentiellen Wachstums: $f'(t) \approx \lambda \cdot f(t)$. Entsprechend kann man argumentieren für solche Zeiten t, zu denen $f(t)$ schon sehr nahe an G liegt und daher näherungsweise durch G=1 ersetzt werden kann, so dass sich die Differentialgleichung des begrenzten Wachstums ergibt: $f'(t) \approx \lambda \cdot (G - f(t))$. Damit sind nebenbei für die o.g. Lösung der Differentialgleichung, die durchaus der Formelsammlung entnommen werden kann, alle Parameter bis auf λ bekannt. Zur Anpassung an die Daten ist der Wendepunkt von besonderer Bedeutung, weil hier die Steigung am größten ist und Abweichungen am ehesten auffallen. Zur Bestimmung von λ können nun mehrere Wege beschritten werden. Entweder wird die Steigung im Punkt (60|0,5) aus Abb.4 bestimmt, so dass man die Bestimmungsgleichung $0{,}012 = \lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ erhält, oder man löst für diesen Punkt f(t) nach λ auf, wobei man im letzten Fall die Lösung λ = 0,05131 erhält, die gut zu den Daten passt:

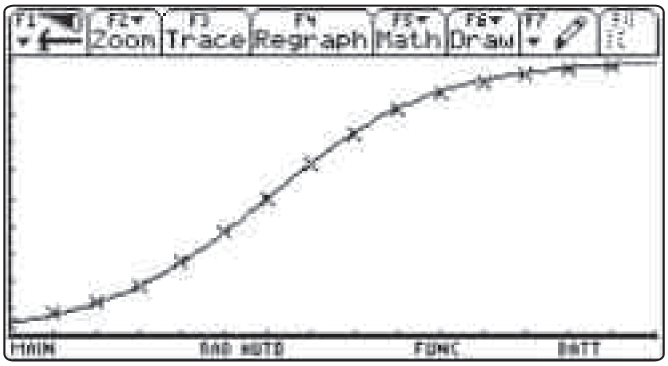

Abb.5: Abb.1 ergänzt durch Graphen des logistischen Wachstums

Damit lassen sich nun abschließend auch die Funktionsgleichungen zu den Graphen der Abbildungen 2 bis 4 angeben:

(2) $f(t) = f(0) \cdot e^{\lambda \cdot t}$

(3) $f(t) = G - (G - f(0)) \cdot e^{-\lambda(t-60)}$

(4) $f(t) = 0{,}012 \cdot (t - 60) + 0{,}5$

Da nur im erhöhten Anforderungsniveau Differentialgleichungen als solche thematisiert werden sollen, empfiehlt sich hier noch eine Vertiefung, die auf die Eingangsidee der Dreiteilung des logistischen Wachstums zurückführt. Dazu wird in parametrischer Darstellung f'(t) in Abhängigkeit von f(t) dargestellt.

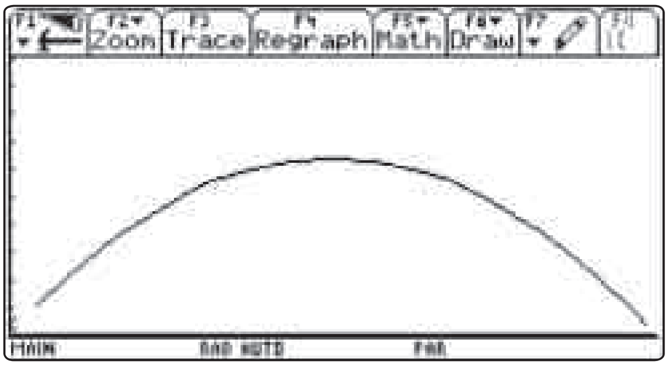

Abb.6: parametrische Darstellung f '(t) in Abhängigkeit von f(t)

(Parameter t von 0 bis 140; x-Achse von 0 bis 1; y-Achse von 0 bis 0,2)

Zu Beginn entspricht der Verlauf des Graphen nahezu einer Ursprungsgerade, so dass sich hier eine Proportionalität und damit die Differentialgleichung des exponentiellen Wachstums ergibt. Gegen Ende entspricht der Verlauf in etwa einer fallenden Gerade mit positivem y-Achsenabschnitt und damit dem begrenzten Wachstum und in der Mitte kann der Verlauf zumindest in einem gewissen Bereich durch eine konstante Funktion (näherungsweise) beschrieben werden, was dann dem linearen Wachstum entspricht.

Autor:
Lutz Breidert, Gymnasium Himmelsthür Hildesheim (D)
breidert@gymnasium-himmelsthuer.de