

TI-Nachrichten

Ausgabe 1/14

Inhaltsverzeichnis

R. Märki:

Pasta und Design sowie ein Yachtrumpf 1

J.-H. Bake:

Mit Hefezellen, dem TI-84 Plus Color und dem Drucksensor zur RGT-Regel 6

J. Enders:

Logistisches Wachstum und Chaos 10

Dr. A. Roulier:

Nasse Haare 14

PD Dr. H. Urban-Woldron,

J. Bussmann:

Der Bewegungssensor – ein Werkzeug zum Verstehen von Zeit-Weg-Diagrammen 16

R. Vehling:

Normalverteilung mit dem TI-84 Plus C 20

G. Dreeßen-Meyer:

Benzinrechner 24

Tipps und Tricks:

J. Enders:

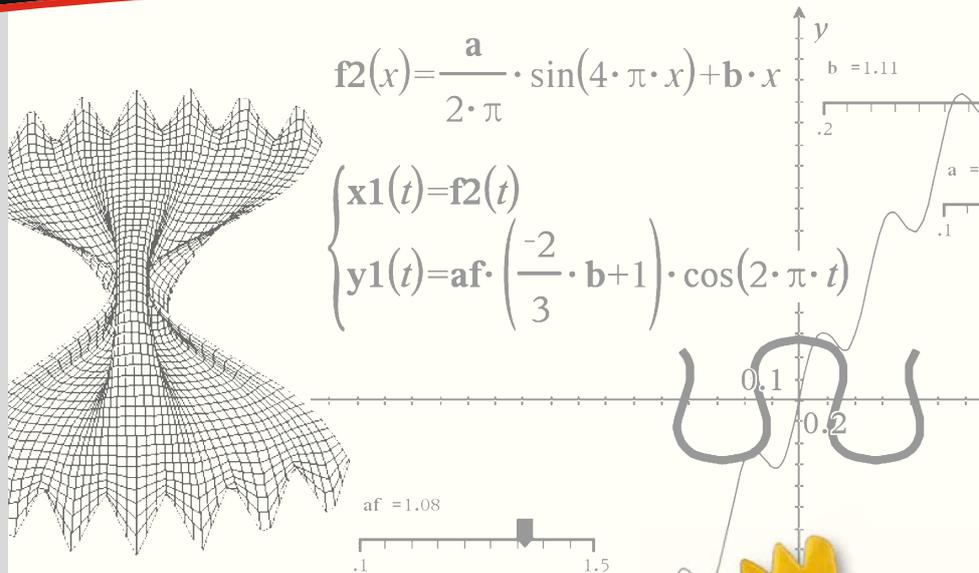
Variable Darstellung der Binomialverteilung 25

M. Kesting:

Windschiefe Geraden 26

Weitere Unterrichtsmaterialien:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net



Pasta und Design sowie ein Yachtrumpf Geometrisches Modellieren mit parametrischer 3D-Graphik

Robert Märki



Die anschauliche Geometrie im Raum steht in der Schule im Schatten analytischer Methoden (Vektorgeometrie) wo oft viele Aufgaben zu finden sind, die auf Grund von erlernten Rechenregeln rein syntaktisch und ohne Rekurs auf die räumliche Vorstellung gelöst werden können. Die Schulung und Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens wird damit nicht genügend gefördert. Die 3D-Graphik des TI-Nspire™ ermöglicht auf vielfältige Weise Themen der Raumgeometrie zu behandeln und zu erforschen, die bislang in der Schule kaum Beachtung fanden und die in hervorragender Weise geeignet sind, das räumliche Vorstellungsvermögen zu schulen. Darüber hinaus können viele dieser Themen für größere oder kleinere Projektarbeiten verwendet werden.

Beispielhaft werden hier das Modellieren von Teigwaren sowie die Darstellung eines Bootes mit parametrischer 3D-Graphik gezeigt.

Pasta und Design

Der englische Architekt und Designer George L. Legendre hat weit über hundert verschiedene Pastaformen mathematisch modelliert und die Ergebnisse neben Fotografien der entsprechenden Teigwaren in einem sehr ansprechenden Buch publiziert [1]. Ich habe dieses Thema im Oktober 2013 am Kongress „Science et Cuisine“ in Sion (Schweiz) vorgestellt und dabei teilweise andere Wege als G. L. Legendre eingeschlagen [2]. Das Modellieren ist kein eindeutiger Prozess sondern eine offene kreative Gestaltungs- und Konstruktionsaufgabe.

Wie meist beim Entwickeln eines Modells beginnt man zuerst mit starken Vereinfachungen und nähert sich dann schrittweise immer mehr der abzubildenden Realität an. Die Schieberegler erlauben es, die Formen dynamisch zu verändern und damit unter Umständen auch den Formungsprozess der Teigwaren mit zu modellieren.

Immer wiederkehrende Grundformen sind Zylinder, Spiralen und Schraubenlinien. Kombinationen dieser Grundformen erlauben schon die Modellierung vieler Formen. Im Folgenden werden drei Beispiele näher gezeigt. Die Gleichungen weichen in allen Fällen deutlich von denjenigen ab, die G. L. Legendre fand. Im letzten Beispiel werden sie ausführlicher erörtert.

1. Die Castellane

Die Form der Castellane erinnert etwas an einen Einsiedlerkrebs. Der Modellierung liegen folgende Überlegungen zu Grunde:

- Setzt man $x(z)=a(9-z^2)$, $-3 < z < 2$, dann erhält man ein Stück einer quadratischen Parabel, welches bei geeigneter Wahl von a recht genau der Form eines Längsschnitts entspricht. Der Parameter a beeinflusst die „Bauchigkeit“ der Teigware.

- Dieses Parabelstück rotiert nun um die z -Achse, wobei der Radius linear mit dem Drehwinkel t abnimmt. Jeder Punkt der Parabel bewegt sich demnach auf einer sich nach innen zusammenziehenden archimedischen Spirale. Durch den Parameter b kann diese Spirale verändert werden.
- Der Längsschnitt ist aber noch gerippt, dies wird dadurch modelliert, dass der Betrag einer Sinusfunktion aufmoduliert wird. Der Parameter c ist das Maß für die Amplitude der Rippung.



Abb. 1: Castellane

Zeichenerklärung:



Computeralgebrasystem
TI-89 Titanium, Voyage™ 200



Messwerterfassungssystem
CBL 2™, CBR 2™, TI-Nspire™ Lab Cradle



Graphische Taschenrechner
TI-82 STATS, TI-83 Plus,
TI-84 Plus, TI-84 Plus *Silver Edition*,
TI-84 Plus C *Silver Edition*



TI-Nspire™ Technologie
(GTR, CAS, Software für Schüler, Lehrer-Software, Apps für iPad®, umfangreiches Zubehör)

Liebe Leserinnen und Leser,

Pasta, Design und der TI-Nspire™ ergeben die Rezeptur für den aktuellen Leitartikel dieser Ausgabe der TI-Nachrichten. Der Beitrag aus der Schweiz zeigt einmal mehr, wie vielseitig Mathematik sein kann und welche Darstellungsmöglichkeiten Ihnen die Technologie bietet.

Ein wichtiges Thema, das von Lehrkräften an uns herangetragen wird, ist die Zukunftssicherheit. Mit der TI-Nspire™ Technologie entscheiden Sie individuell abgestimmt auf die Situation in Ihrer Region und Schule, ob Sie mit einem Taschenrechner, Netbook/ Notebook oder auf einem iPad arbeiten möchten. Zudem bieten wir Ihnen für die weiteren TI-Graphikrechner oder auch wissenschaftlichen Schulrechner passende SmartView-Emulatorsoftware-Lösungen. Last but not least eröffnen Ihnen Werkzeuge zur Messwerterfassung Einsatzmöglichkeiten für Physik, Chemie und Biologie. Dazu finden Sie in diesen TI-Nachrichten Beispiele aus der Unterrichtspraxis.

Apropos Zukunft: Natürlich möchten wir Ihren Wünschen auch zukünftig gerecht werden. Bitte teilen Sie uns Ihre Anregungen mit oder senden selbst Beiträge ein. Schicken Sie gerne Ihre Fragen oder Ihr Feedback zu einzelnen Artikeln an folgende E-Mail-Adresse: ti-nachrichten@ti.com. Oder nutzen Sie das Service-Faxformular auf der vorletzten Seite dieser Ausgabe.

Viel Freude beim Lesen der Beiträge wünscht Ihnen

Ihr TI-Team

Die Gleichungen lauten:

| | |
|------------|--|
| xp1 | $(t, u) = \left(a \cdot (9 - u^2) + c \cdot \sin(20 \cdot u) \right) \cdot \cos(t) \cdot (1 - b \cdot t)$ |
| yp1 | $(t, u) = \left(a \cdot (9 - u^2) + c \cdot \sin(20 \cdot u) \right) \cdot \sin(t) \cdot (1 - b \cdot t)$ |
| zp1 | $(t, u) = u$ |

Abb. 2

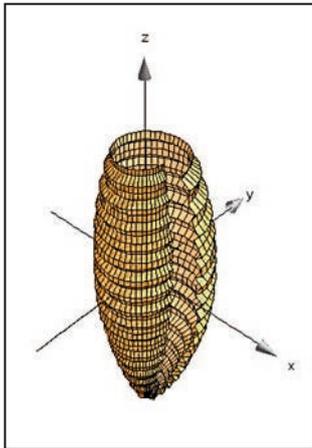


Abb. 3a: a=0.1; b=0.08; c=0.16

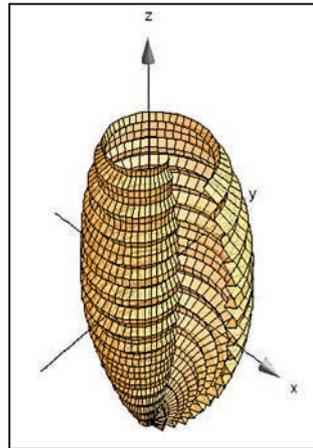


Abb. 3b: a=0.15; b=0.1; c=0.24

Die 3D Plot-Parameter zu Abbildungen 3a und 3b zeigt Abbildung 4a.

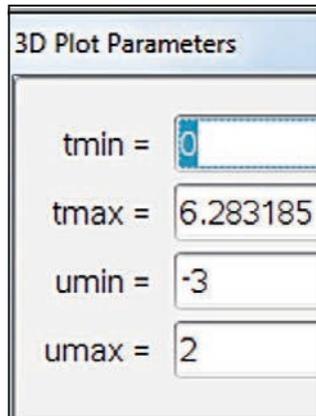


Abb. 4a

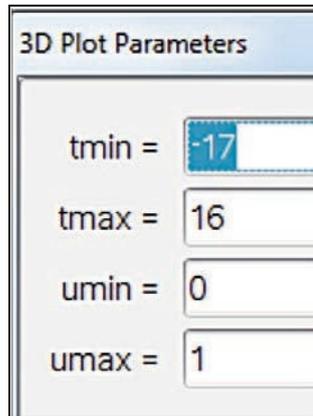


Abb. 4b

Sowohl die Form des Längsschnitts, die Art der Spirale und die Form und Amplitude der Rippung können modifiziert werden und so ergeben sich Variationen der hier dargestellten Castellane.

2. Die Buccoli

Bei der Sorte Buccoli handelt es sich um eine Art profilierte Bandnudel, die schraubenförmig um ein Stäbchen gewickelt wird. Die Hauptform ist hier die Schraubenlinie.



Abb. 5

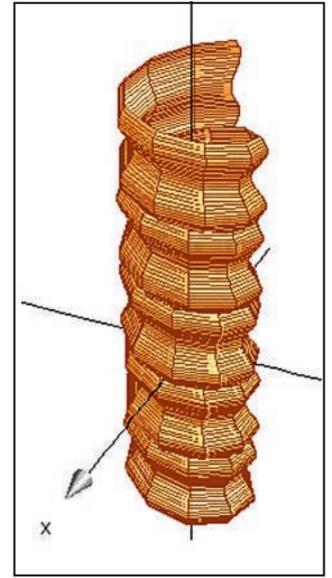


Abb. 6

Die 3D Plot-Parameter zeigt Abbildung 4b. Die Gleichungen lauten:

| | |
|------------|--|
| xp2 | $(t, u) = \left(p + q \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot u) \right) \cdot \cos(-t)$ |
| yp2 | $(t, u) = \left(p + q \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot u) \right) \cdot \sin(-t)$ |
| zp2 | $(t, u) = \frac{t}{2 \cdot \pi} + u$ |

Abb. 7

Es ist erstaunlich, wie mit verhältnismäßig einfachen Gleichungen die Modellierung recht gut gelingt.

3. Die Farfalle

Sie gehört nicht zur Kategorie der spiral- oder schraubenlinienförmigen Nudeln. Die Grundform ist ein Rechteck mit gezacktem oder gewelltem Rand, welches dann in der Mitte zwischen den beiden gezackten Rändern zusammengedrückt resp. tailliert wird, wodurch die charakteristische Faltung entsteht. Dabei entsteht eine Wellenform, die in der Mitte (z=0), dort wo die Taillierung am stärksten ist, die größte Amplitude aufweist. Gegen die gezackten Ränder hin nimmt die Amplitude stark ab und verschwindet am Rande ganz.



Abb. 8

Zur Modellierung werden vier mit Schiebereglern veränderbare Parameter verwendet:

- es:** Maß für die Einschnürung resp. Taillierung,
- we:** Maß für die Amplitude der Wellenform, die bei der Taillierung entsteht,
- za:** Maß für die Amplitude der Zacken an zwei Rändern,
- k:** beeinflusst die Form der Taille.

Ausgangslage ist eine rechteckförmige Fläche ($es=0$), die in der yz -Ebene liegt und an zwei gegenüberliegenden Seiten gezackt ist (vgl. Abb. 9a). Ohne Zacken und ohne Taillierung gilt $y(t,u)=t$ und $z(t,u)=u$.

In einem ersten einfachen Modell wird die Wellenform bei der Faltung als cosinusförmig angenommen, ebenso die zwei Ränder. Die bei der Taillierung entstehende seitliche Kurve wird modelliert mit einer geeigneten Transformation der bekannten glockenförmigen Kurve mit der Gleichung

$$y = e^{-x^2}$$

Die Zacken werden durch den Term

$$za \cdot \cos(7\pi t) \cdot u^{10} \cdot \text{sign}(u)$$

in der Gleichung für z aufmoduliert. Der Faktor u^{10} bewirkt, dass sich der Term nur an den Rändern ($u \rightarrow 1$ resp. $u \rightarrow -1$) deutlich auswirkt, $\text{sign}(u)$ gewährleistet die Symmetrie.

Die cosinusförmige Wellung, welche durch die Taillierung entsteht, wird durch die Gleichung für $x(t,u)$ beschrieben. Schließlich krümmt sich beim Taillieren der gezackte Rand parabelförmig, was durch den Term $(-0.3(t-es)^2+1)$ in der Gleichung für $z(t,u)$ bewirkt wird.

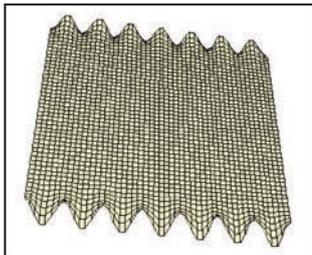


Abb. 9a

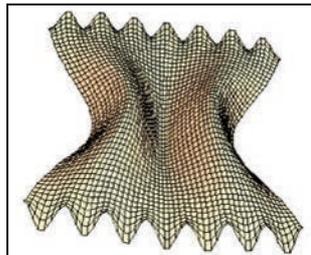


Abb. 9b

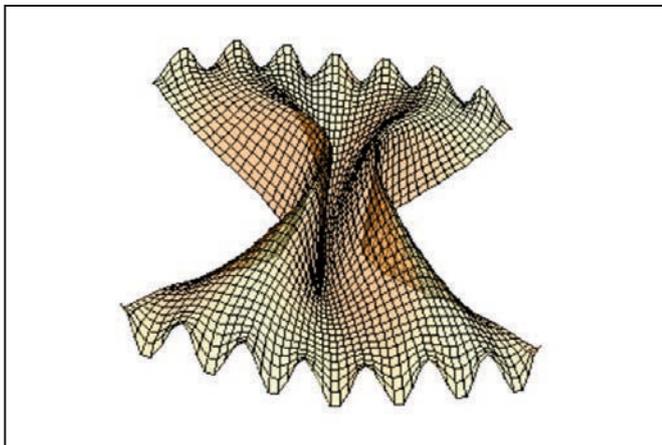


Abb. 9c

Die 3D Plot-Parameter zeigt Abbildung 11a. Die zugrundeliegenden Gleichungen sind:

| | |
|------------|--|
| xp1 | $(t,u) = -we \cdot es \cdot e^{-2.5 \cdot u^2} \cdot \cos(t \cdot 1.8 \cdot \pi)$ |
| yp1 | $(t,u) = t \cdot (1 - e^{-k \cdot u^2} \cdot es)$ |
| zp1 | $(t,u) = u \cdot (-0.3 \cdot (t \cdot es)^2 + 1) + za \cdot \cos(7 \cdot \pi \cdot t) \cdot u^{10} \cdot \text{sign}(u)$ |

Abb. 10

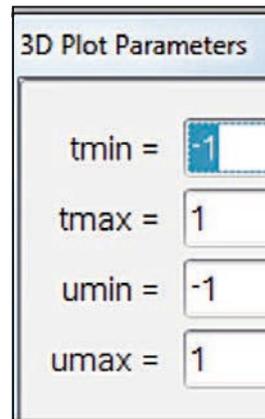


Abb. 11a

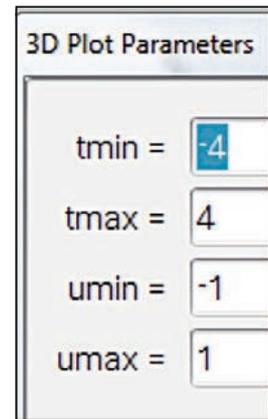


Abb. 11b

Wiederum sind die Gleichungen für dieses erste Modell erstaunlich einfach! Verbesserungen und Modifikationen:

Der gezackte Rand entspricht in Wirklichkeit eher einer Dreiecks- als einer Cosinuskurve. Mit Hilfe der Taylorentwicklung für die Dreiecksfunktion lässt sich dies einfach bewerkstelligen.

Betrachtet man die reale Farfalle in der Mitte etwas genauer so stellt man fest, dass sich die zwei Teigfalten in der Mitte im obersten und untersten Bereich berühren. Mit einer cosinusförmigen Faltung kann man dies nicht erreichen. Es drängt sich auf, die Querschnittskurve, die bei der Faltung entsteht, anders zu modellieren. Da die Berührung mit einer Funktionskurve nicht möglich ist, muss diese Kurve ihrerseits in Parameterform dargestellt werden. Eine Möglichkeit ist nachstehend abgebildet: Mit dem Parameter b wird die Faltung modelliert. Für $b=1.5$ ist der Teig flach, wird b verkleinert, dann faltet sich der Teig zusammen und im oberen und unteren Bereich können sich die Falten berühren, was jedoch noch vom Wert von a abhängt. Der Parameter af steht für die Amplitude der Faltung.

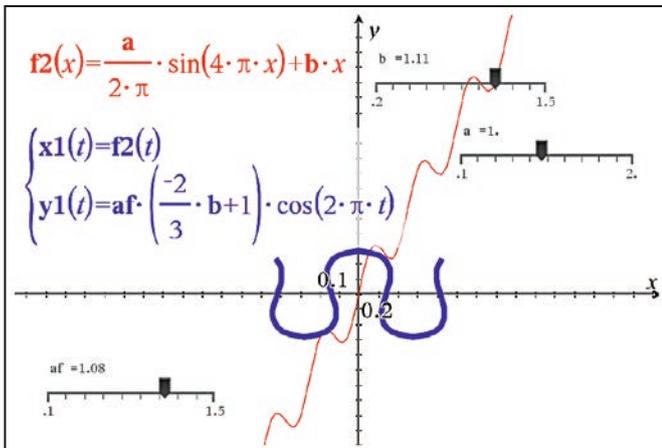


Abb. 12

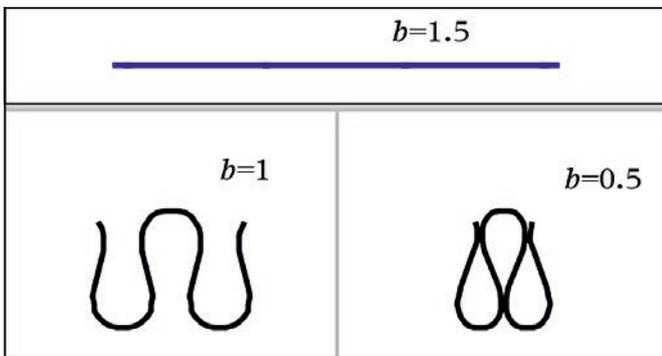


Abb. 13

Die Gleichungen sind nun wesentlich komplizierter, für Abb. 16 wurden die Parameter aus Abb. 11a gesetzt:

$$\begin{aligned}
 xp_1(t,u) &= we \cdot es \cdot e^{-4.5 \cdot u^2} \cdot \left(\frac{-2}{3} \cdot (1 - e^{-k \cdot u^2} \cdot es) + 1\right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\
 yp_1(t,u) &= es \cdot \frac{0.35}{2 \cdot \pi} \cdot e^{-2 \cdot u^2} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot t) + (1 - e^{-k \cdot u^2} \cdot es) \cdot t \\
 zp_1(t,u) &= u \cdot (-0.3 \cdot (t \cdot es)^2 + 1) + za \cdot \left(\cos\left(7.7 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0.35}{2 \cdot \pi} \cdot e^{-2 \cdot u^2} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot t) + (1 - e^{-k \cdot u^2} \cdot es) \cdot t\right)\right)\right) \\
 &\quad + \frac{1}{9} \cdot \cos\left(23.1 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0.35}{2 \cdot \pi} \cdot e^{-2 \cdot u^2} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot t) + (1 - e^{-k \cdot u^2} \cdot es) \cdot t\right)\right) \\
 &\quad + \frac{1}{25} \cdot \cos\left(38.5 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0.35}{2 \cdot \pi} \cdot e^{-2 \cdot u^2} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot t) + (1 - e^{-k \cdot u^2} \cdot es) \cdot t\right)\right) \cdot u^{10} \cdot \text{sign}(u)
 \end{aligned}$$

Abb. 14



Abb. 15

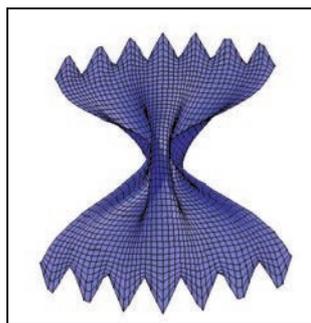


Abb. 16

Bootskörper einer Yacht

Moderne Yachten haben im Bugbereich eher V-förmige Spanten (Querschnitte), die gegen das Heck hin zunehmend U-förmig und flacher werden, damit gute Gleiteigenschaften gewährleistet sind. Der Spantenriss kann einfach mit einer Funktion der Form

$$y = |x|^p$$

modelliert werden. Für $p=1$ erhält man eine V-Form, mit zunehmendem Wert von p erhält man dann immer flachere U-Formen. Man kann den Wert von p vom Bug zum Heck von $p=1$ linear oder anders anwachsen lassen. Jetzt muss nur noch für jeden Spant die Breite auf Deckshöhe und die Tiefe (ab Deckshöhe gemessen) festgelegt werden, wobei von einer horizontal liegenden Deckskante ausgegangen wird (kein Decksprung). Man benötigt also noch den Längsriss (Kiellinie, Tiefenlinie) und auf Deckshöhe die Breite. Wählt man als Längsachse die x -Achse sowie die Länge 8 ($-4 < x < 4$), dann müssen nur noch geeignete Funktionen für die Breite br und den Längsriss ti gefunden werden. Nachstehend ein Beispiel:

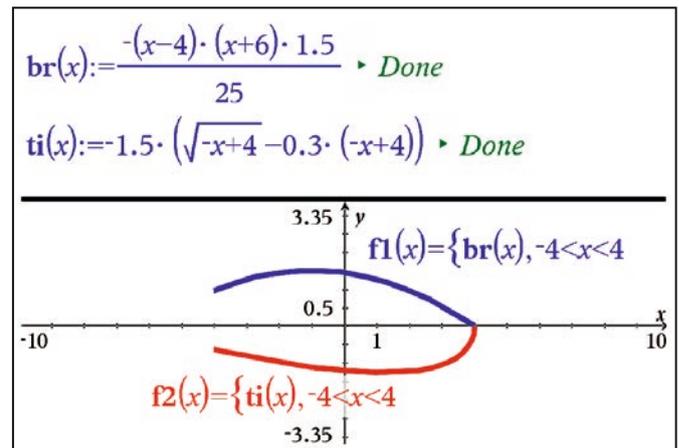


Abb. 17

Man erhält mit diesen Hilfsfunktionen auf einfache Art einen Linienriss (Spanten, Stringer), die Breitenlinie und der Längsriss können nach Belieben variiert werden.

Die zugrundeliegenden Gleichungen lauten:

| | |
|--------|--|
| xp_1 | $(t,u) = t$ |
| yp_1 | $(t,u) = br(t) \cdot u$ |
| zp_1 | $(t,u) = ti(t) \cdot (u ^{-t+5} - 1)$ |

Abb. 18

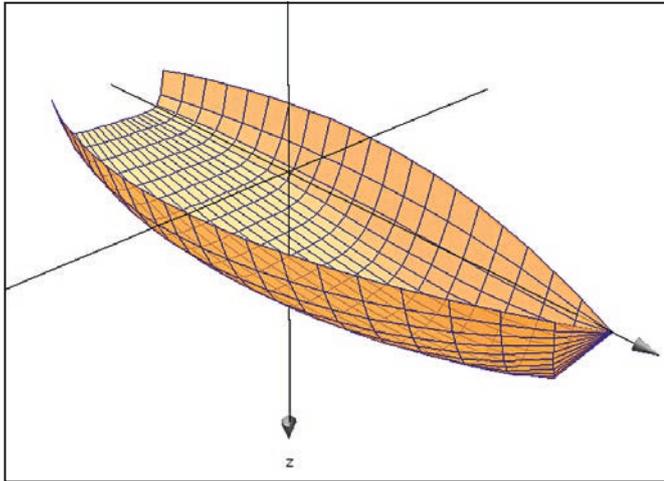


Abb. 19: Liniendriss, zu den 3D Plot-Parametern siehe Abb. 11b

Didaktisches Schlusswort

Die klassische euklidische konstruktive Geometrie mit Zirkel und Lineal gehört wohl grösstenteils endgültig der Vergangenheit an, auch wenn gewisse Grundkonstruktionen (Dreiecks-konstruktionen) weiterhin zum kanonischen Grundbestand mathematischen Könnens und Wissens gehören werden.

Nebst Zirkel und Lineal gibt es heute andere mächtige und einfach zu bedienende Werkzeuge, mit denen wir den Raum sowie räumliche Beziehungen und Formen erfassen, beschreiben und darstellen können. Es gilt, diese Werkzeuge auch im Schulbetrieb einzusetzen und ihren Gebrauch zu üben. Die kreative, gestalterische und ästhetische Seite der Mathematik bekommt so ein viel größeres Gewicht, was sicher auch motivierend wirkt. Die Voraussetzungen resp. Ziele sind: Gute Kenntnisse der elementaren Funktionen und insbesondere auch ihrer Transformationen, räumliches Vorstellungsvermögen, Kreativität und eine Portion Fantasie. Das Herstellen geometrischer Modelle ist im wahrsten Sinne ein iterativer Prozess, ausgehend von einfachen Modellen können schrittweise immer mehr feinere Details eingearbeitet werden. Der Begriff der Werkstatt hat hier seine volle Berechtigung.

Literatur

- [1] G. L. Legendre, Pasta by Design, Thames & Hudson, 2011
- [2] <http://www.science-cuisine.ch/>

Autor:

Robert Märki, Thun (CH)

Mit Hefezellen, dem TI-84 Plus Color und dem Drucksensor zur RGT-Regel

Jan-Hendrik Bake



Das Experiment

Um im Unterricht Reaktionsgeschwindigkeiten enzymatischer Reaktionen in biologischen Systemen zu untersuchen, sind Hefezellen naheliegende Organismen. Das folgende Experiment untersucht die Druckveränderungen, die durch Hefesuspensionen in einem geschlossenen Reaktionsgefäß bei verschiedenen Temperaturen hervorgerufen werden. Hierfür wird der Gasdrucksensor (GPS-BTA) von Vernier verwendet. Von der Druckzunahme im System wird auf die Zunahme der Kohlenstoffdioxid-Konzentration und indirekt auf die Aktivität der Pyruvatdecarboxylase geschlossen. Dieses Experiment kann somit dazu dienen, die Reaktions-Geschwindigkeits-Temperatur-Regel zu erarbeiten bzw. zu stützen.

Anleitung

Der Drucksensor wird über ein EasyLink® an den Taschenrechner angeschlossen. Ist ein CBL 2™ vorhanden, kann wie in diesem Experiment verfahren parallel ein Thermometer angeschlossen werden (vgl. Abb. 2). Die Standardeinstellungen der EasyData-App im TI-84 Plus C Silver Edition für die Datenerhebung können unverändert übernommen werden (Messungen alle 10 sec mit 10 Messungen insgesamt).

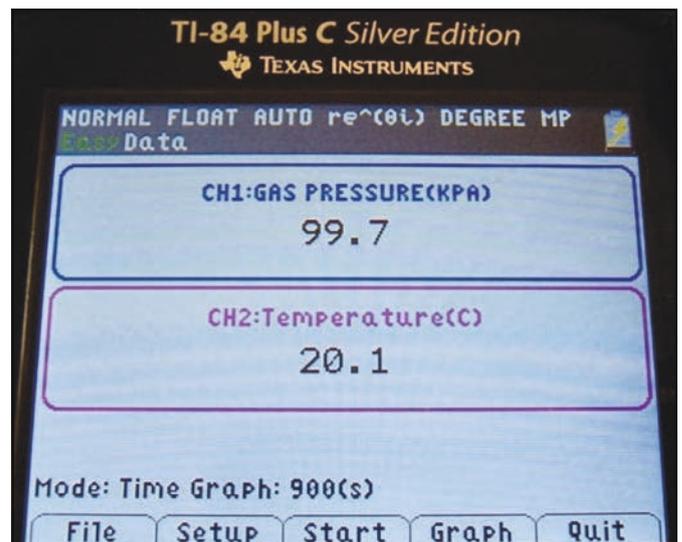


Abb. 1: Foto des TI-84-Bildschirms unter paralleler Verwendung des Druck- und des Temperatur-Sensors mithilfe des CBL 2™

Die Bereitstellung der Wärmebäder kann durch Mischen von Leitungswasser und Wasser aus dem Wasserkocher ermöglicht werden. Ebenfalls gut geeignet sind Babyflaschenwärmer. Im vorgestellten Experiment werden Wasserbäder mit den Temperaturen 20°, 30° und 40°C verwendet. Für die Hefesuspension werden ca. 20g Haushaltszucker (2 EL) in 200 mL

Wasser gelöst und vortemperiert. Diese Mischung wird ebenfalls bei SCHMIDT (SCHMIDT, 2012) für ein Hefeexperiment verwendet, in dem direkt die Kohlenstoffdioxid-Konzentration ermittelt wurde. Vor dem Experimentstart wird ein Standard-Reagenzglas (2cm) fast vollständig mit dem Zuckerwasser und einem halben Päckchen Trockenhefe befüllt. Nun kann der Drucksensor angeschlossen werden. Hierbei und vor allem im Laufe des Experiments muss unbedingt das Aufsteigen der Hefesuspension in den Drucksensor verhindert werden. Aus diesem Grund ist ein Absperrhahn zwischen das Reagenzglas und den Sensor geschaltet (vgl. Abb. 2). Zudem ist wichtig, dass der Stopfen fest im Reagenzglas steckt, da er sonst dem hohen Druck nicht standhalten kann.



Abb. 2: Experimenteller Aufbau

Durch das Drücken der Start-Taste werden die im EasyData-Programm erhobenen Daten in graphischer Form auf dem Bildschirm angezeigt. Spätestens nach fünf Minuten liegt ein diskussionswürdiger Graph vor; bei 40°C bereits nach zwei Minuten (vgl. Abb. 3 ff.). Wird nun Stopp gedrückt, werden die Faktoren Zeit, Druck und Temperatur in den Listen 1–3 gespeichert.

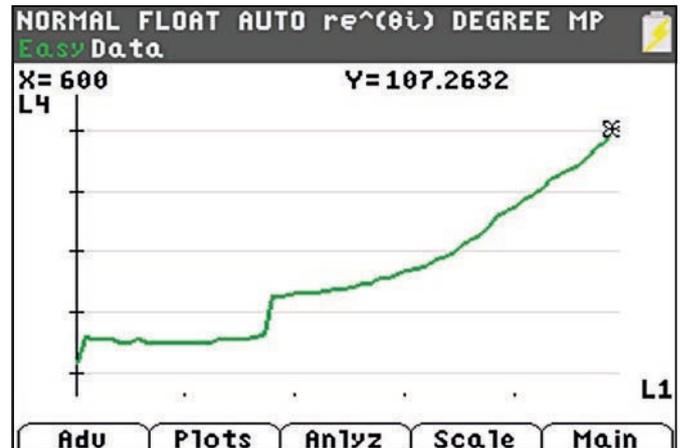


Abb. 3: Messung bei 20°C, Abbruch nach 600 sec, Stopfen dicht ab 220 sec (p in kPa)

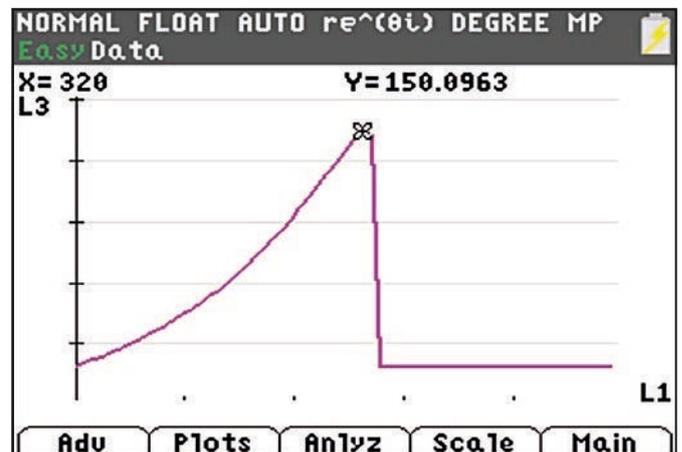


Abb. 4: Messung bei 30°C, Stopfen hält bis nach 320 sec (p in kPa)

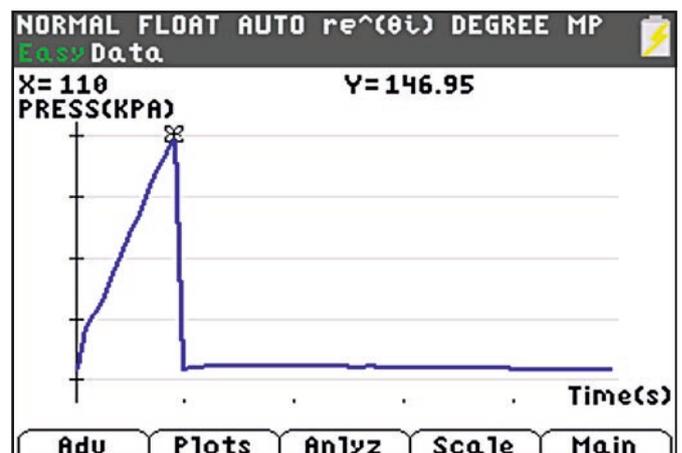


Abb. 5: Messung bei 40°C, Stopfen hält bis nach 110 sec (p in kPa)

Sämtliche TI-Nachrichten Artikel und weitere nützliche Materialien finden Sie hier:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net



Auswertungsvorschlag

Neben der Möglichkeit, die graphische Darstellung der Druckzunahme über der Hefe-Suspension direkt zu vergleichen, können mit der EasyData-App auf dem Taschenrechner die Steigungen des für den Vergleich herangezogenen Bereichs ermittelt (Tabelle 1) und die so erhaltenen Funktionen in graphischer Darstellung verglichen werden (vgl. Abb. 6). Das Vorgehen zur Ermittlung der Daten in Tabelle 1 wird im Abschnitt „Schritt-für-Schritt“ erklärt.

| Temperatur des Wasserbads | | |
|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| 20 °C Rohdaten ab 410 sec | 30 °C Rohdaten ab 140 sec | 40 °C Rohdaten ab 10 sec |
| $y = ax+b$ | $y = ax+b$ | $y = ax+b$ |
| $a = .01976193$ | $a = .09152258$ | $a = .24393609$ |
| $b = 95.219607$ | $b = 99.236875$ | $b = 72.636816$ |
| $R = .99716701$ | $R = .99772994$ | $R = .99975449$ |

Tabelle 1: Ausgleichsgeraden-Steigung

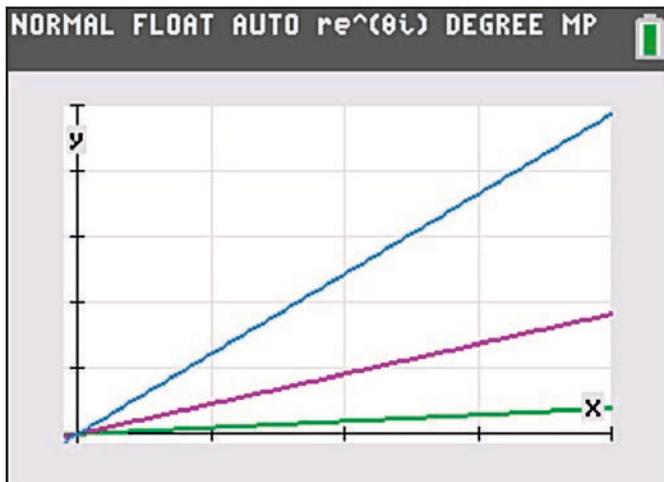


Abb. 6: Liniendiagramm basierend auf den in Tabelle 1 dargestellten Steigungen als Bildschirmaufnahme des TI-84 Plus C Silver Edition (Temperatur im Experiment: grün 20°C; magenta 30°C und blau 40°C)

Der Faktor für die Änderung der Reaktionsgeschwindigkeit bei Temperaturerhöhung kann nach folgender Formel berechnet werden:

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{10K}{T_2-T_1}}$$

Dabei stehen T_1 und T_2 für die Temperaturen (in Kelvin) und R_1 und R_2 für die Reaktionsgeschwindigkeiten, im vorliegenden Fall also die Steigungen der betrachteten Ausgleichsgeraden. Bei einer Änderung der Temperatur von 20°C nach 30°C ergibt sich folglich etwa der Faktor 4,6; von 30°C nach 40°C etwa 2,7 und von 20°C nach 40°C etwa 3,5. Diese experimentellen Daten lassen sich mit der RGT-Regel in Einklang bringen.

Methodische Hinweise

Kann aus Zeitgründen nur ein Experiment durchgeführt werden, können den Schülerinnen und Schülern die Daten auf ihre Taschenrechner transferiert werden. Der Taschenrechner-Empfänger wird über: 2nd [LINK]; > RECEIVE in Warteposition gebracht. Der Taschenrechner-Sender übermittelt die Daten an den durch ein Kabel angeschlossenen Empfänger über: 2nd [LINK]; > SEND; > LIST...; mit anschließender Markierung der gewünschten Liste durch ENTER.

Schritt-für-Schritt zur Ausgleichsgeraden

Um Verluste der Experiment-Daten bei der Ermittlung der Ausgleichsgeraden zu vermeiden, ist es sinnvoll, die Daten zu speichern (vgl. Abb. 7 „Main“ „File“ und „Save As“). Im Anschluss drücken Sie „Graph“ und die graphische Darstellung der Daten des letzten Experiments erscheint (z. B. wie in Abb. 8; nutzen Sie hierzu für weitere Informationen z.B. auch das CBL 2™ Anleitungsbuch).

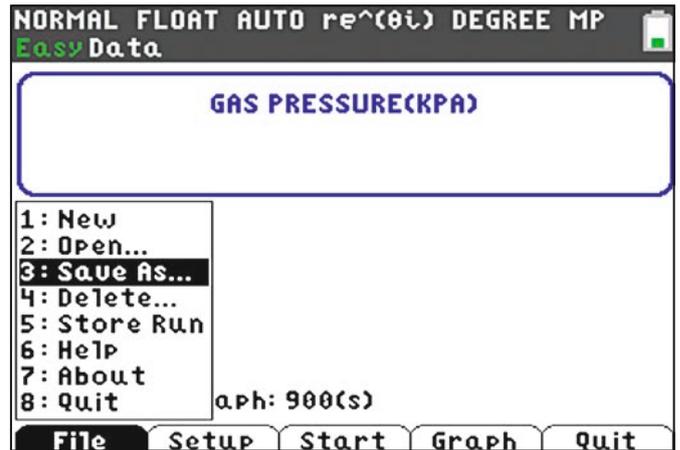


Abb. 7: Speichern von Experimentdaten

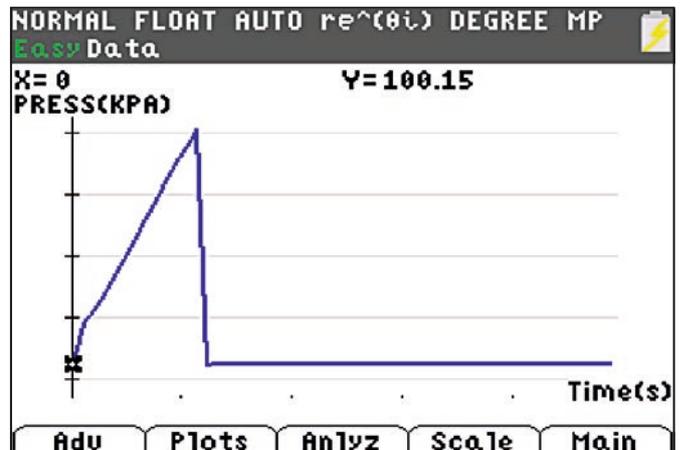


Abb. 8: Graphische Darstellung von Rohdaten des Experiments bei 40°C: Druck in Abhängigkeit von der Zeit.

Der Bereich, für den die Ausgleichsgerade ermittelt werden soll, kann mithilfe der „Anlyz“-Taste und „Select Region“ ausgewählt werden (vgl. Abb. 9). Der Cursor wird auf den Bereich der linken Grenze gefahren (vgl. Abb. 10). In diesem Beispiel wurde so für die Messung bei 20°C die Anfangsphase aus der Wertung genommen, da hier der Stopfen noch nachjustiert werden musste.

Informationen zum Lehrerfortbildungsprojekt T³ finden Sie unter:
www.t3deutschland.de
www.t3oesterreich.at
www.t3schweiz.ch

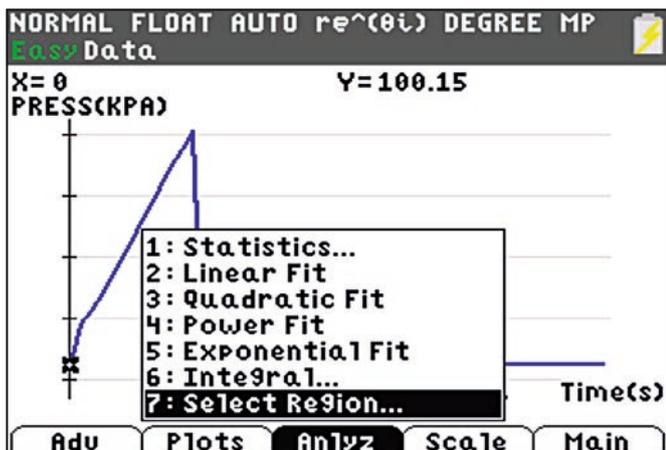


Abb. 9: Bereichsauswahl einleiten

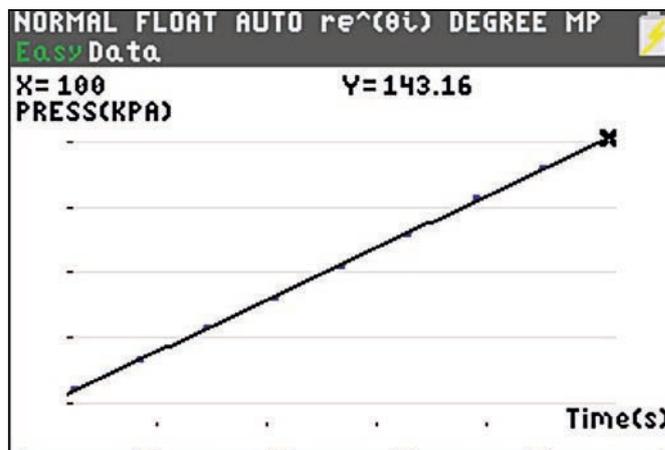


Abb. 12: Ermittelte Ausgleichsgerade

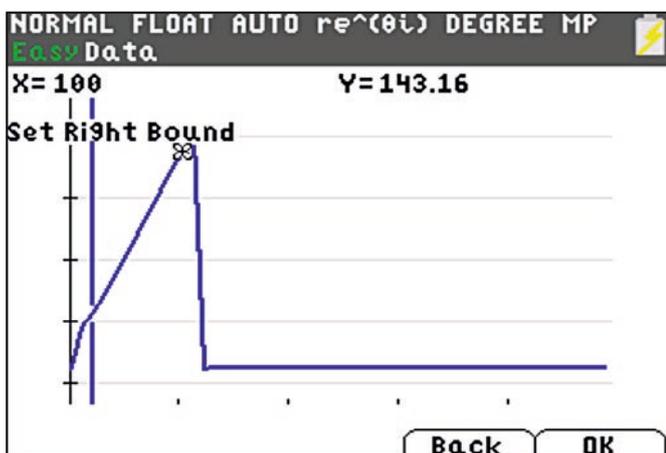


Abb. 10: Bereichsauswahl

Wählen Sie nun die rechte Grenze aus („Set Right Bound“) und drücken Sie OK. Unter „Anlyz“ (vgl. Abb. 11) besteht jetzt die Möglichkeit, die Steigung der Ausgleichsgeraden anzeigen zu lassen, indem Sie in diesem Verzeichnis „LinearFit“ auswählen. Die in Tabelle 1 dargestellten Informationen erscheinen für die jeweils ausgewählte Gerade. Werden diese mit OK bestätigt, erscheint ein Bild wie in Abb. 12.

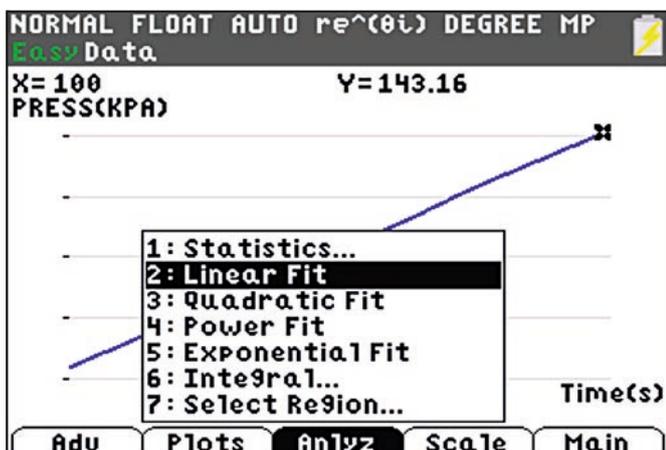


Abb. 11: Aktivierung der Ausgleichsgeraden-Ermittlung

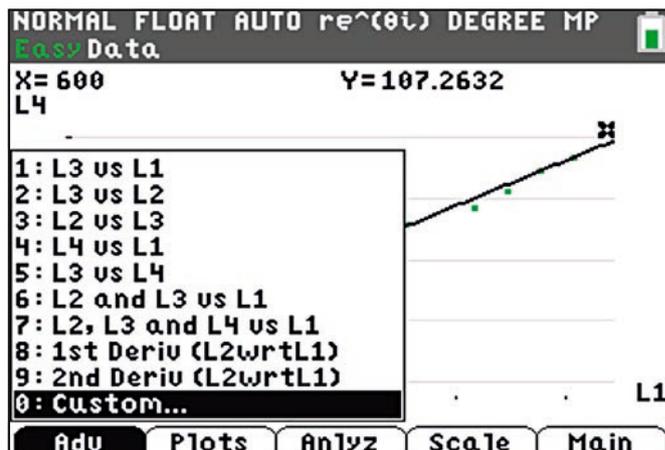


Abb. 13: Auswahl der Experimentdaten aus der Liste für die graphische Darstellung

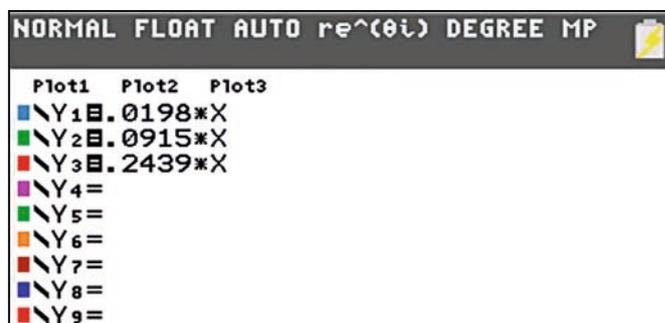


Abb. 14: Mithilfe der Taste „Y=" kann ein Fenster geöffnet werden, in dem angegeben werden kann, welche Informationen gleichzeitig dargestellt werden sollen. Die Datenplots der Listen sind vorher zu deaktivieren. Dies ist möglich im Menü [STAT PLOT].

Literatur

Schmidt, Barbara: Hefeknospen mögen es warm.
TI-Nachrichten 1/2012



Jan-Hendrik Bake, Stadthagen (D)

Logistisches Wachstum und Chaos

Jürgen Enders

 Für diesen Artikel wurde der TI-84 C verwendet, da er ein hoch auflösendes Display besitzt und leicht in TI-Basic zu programmieren ist. Eine Übertragung auf andere Rechnerplattformen ist jedoch möglich.

Beim *logistischen Wachstum* gilt für die *Änderungsrate* mit der *Sättigungsgrenze* S und dem *Wachstumsfaktor* k

$$\frac{df(t)}{dt} = k \cdot f(t) \cdot (S - f(t)) \quad k > 0, S > 0$$

Für diskrete Zeitschritte Δt erhält man daraus die Iteration

$$\frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} = k \cdot a_t \cdot (S - a_t)$$

oder verkürzt mit dem Zeitschritt $\Delta t = 1$

$$a_{n+1} - a_n = k \cdot a_n \cdot (S - a_n)$$

In der Form $a_{n+1} = a_n + k \cdot a_n \cdot (S - a_n)$ lassen sich dann alle Glieder der Folge berechnen. Diese Gleichung ist die Grundlage für alle weiteren Betrachtungen.

Aufgabenstellung

Eine typische *Aufgabe* könnte so aussehen:

Eine Pilzkultur wächst auf einer maximalen Fläche von 25 cm^2 mit $k = 0,03 \text{ cm}^2/\text{h}$. Anfänglich sind $0,05 \text{ cm}^2$ der Fläche von der Pilzkultur bedeckt.

- Stelle das Wachstum grafisch dar.
- Nach wie vielen Stunden sind 90% der Fläche bedeckt?

90% der Fläche sind $22,5 \text{ cm}^2$. Mit dem Cursor kann man die Folge „ablaufen“ und findet als Lösung etwas weniger als 7 h.

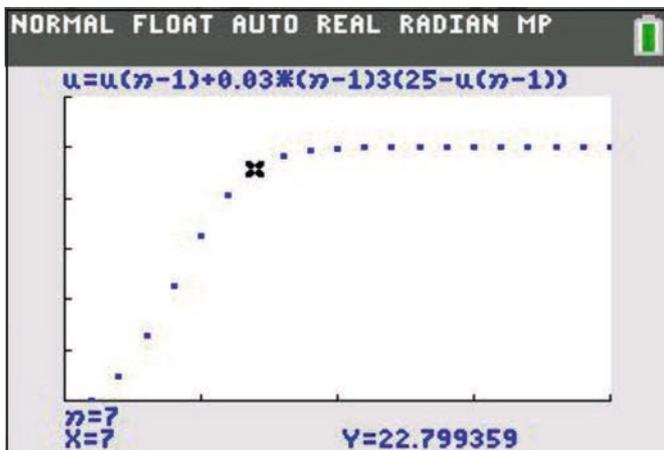


Abb. 1

Auf dem Weg zum Chaos

Wie entwickelt sich nun aber das Wachstum, wenn ich k vergrößere, also bis hin zu einer Art von „explosionsartigem“ Wachstum?

Bei den nachfolgenden Bildern gilt einheitlich für die Sättigungsgrenze $S=1$, und die Fenstereinstellungen sind $nmin=xmin=1$; $nmax=xmax=50$; $ymin=0$; $ymax=1,5$.

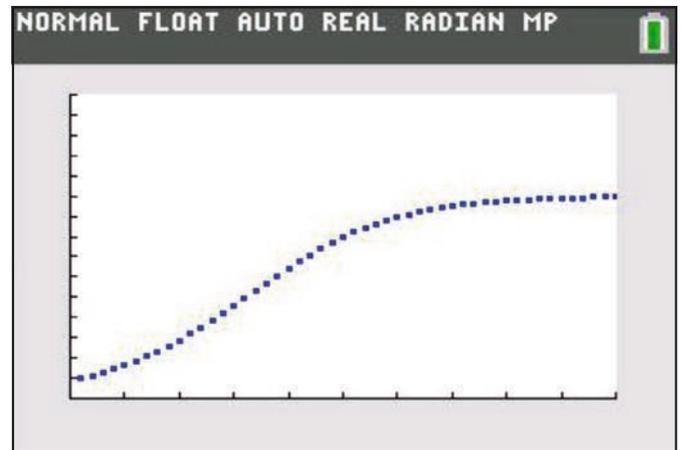


Abb. 2

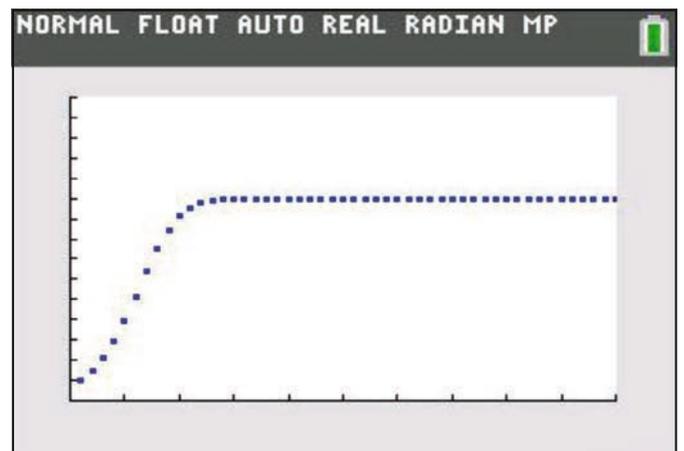


Abb. 3

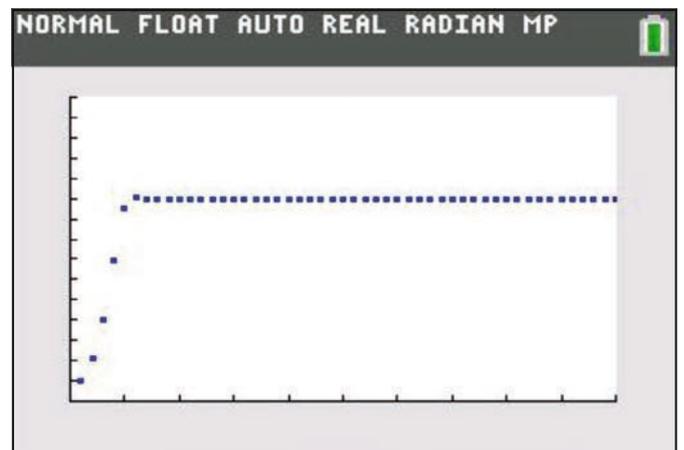


Abb. 4

Bei Abb. 2 ist $k=0,15$. Man erhält einen Verlauf wie man ihn vom logistischen Wachstum erwartet. Bei Abb. 3 ist $k=0,5$ und man sieht den deutlich steileren Anstieg. Bei Abb. 4 mit $k=1,2$ ist dieser Anstieg noch steiler und man kann gut er-

kennen, dass a_6 über der Sättigungsgrenze liegt. Hier deutet sich eine Art „Einschwingvorgang“ an, der sich auch erklären lässt. Wenn z. B. eine Population ohne Rücksicht auf Ressourcen wie z. B. Nahrung explosionsartig wächst, dann kann es durchaus zu einer Art Überbevölkerung kommen, die sich dann auf einem niedrigeren Level stabilisiert.

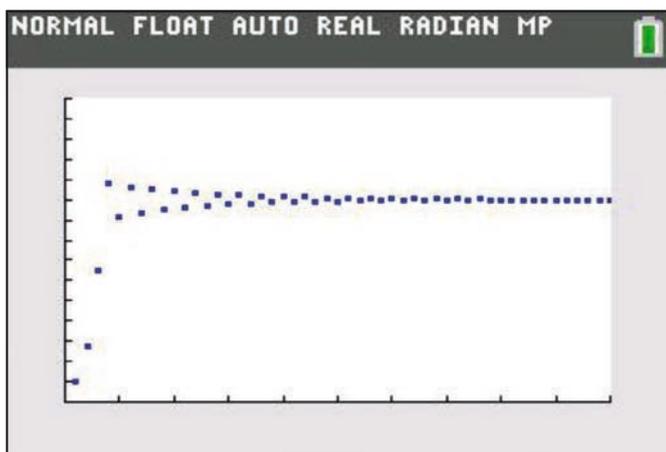


Abb. 5

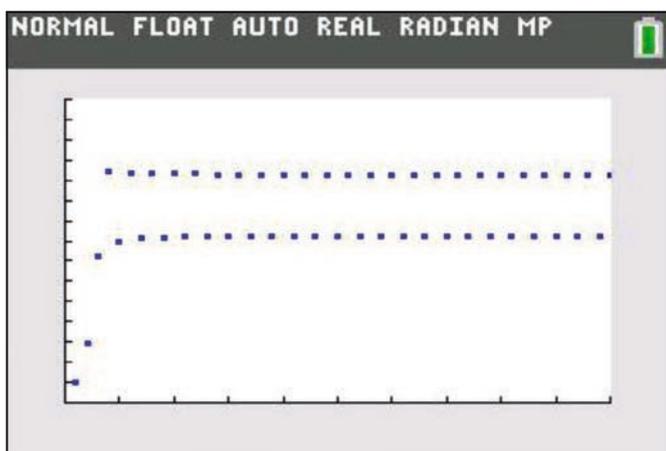


Abb. 6

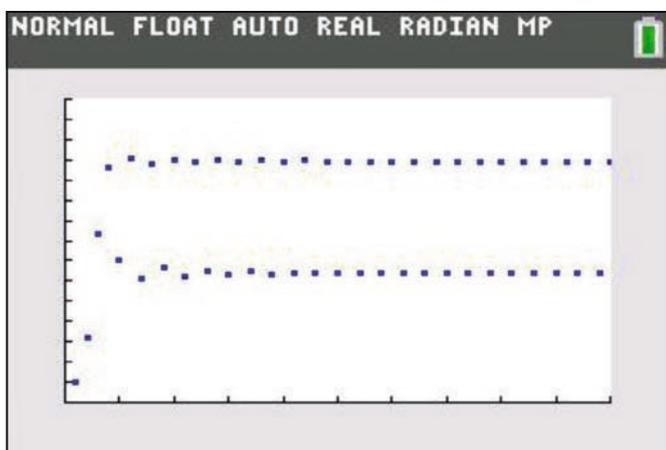


Abb. 7

Dieses Verhalten wird noch deutlicher, wenn man k noch größer wählt wie in Abb. 5. Hier ist $k=1,9$. In Abb. 6 ($k=2,1$) hat der „Einschwingvorgang“ dazu geführt, dass der Grenzwert Sättigungsgrenze nicht mehr erreicht wird, sondern es hat sich eine Bifurkation gebildet, zwei Häufungspunkte, die wechselseitig durch die Iteration berechnet werden. Dabei liegt der eine oberhalb, der andere unterhalb der Sättigungsgrenze.

In Abb. 7 wurde k auf $k=2,4$ gesetzt. Der Einschwingvorgang ist wieder sehr deutlich zu sehen, aber die Reihung der Punkte erscheint unregelmäßig. Tatsächlich liegt hier eine Aufspaltung in vier Häufungspunkte vor, von denen je zwei sehr dicht beieinander liegen (Tabelle Abb. 8).

| n | $u(n)$ | | | | |
|-----|--------|--|--|--|--|
| 42 | 1.1931 | | | | |
| 43 | .64009 | | | | |
| 44 | 1.193 | | | | |
| 45 | .64042 | | | | |
| 46 | 1.1931 | | | | |
| 47 | .64017 | | | | |
| 48 | 1.193 | | | | |
| 49 | .64036 | | | | |
| 50 | 1.1931 | | | | |
| 51 | .64022 | | | | |
| 52 | 1.193 | | | | |

$n=52$

Abb. 8

Bei $k=2,5$ (Abb. 8) ist diese Aufspaltung in vier Häufungspunkte dann gut sichtbar. Spätestens hier dürften Deutungen über das Verhalten von Populationen versagen.

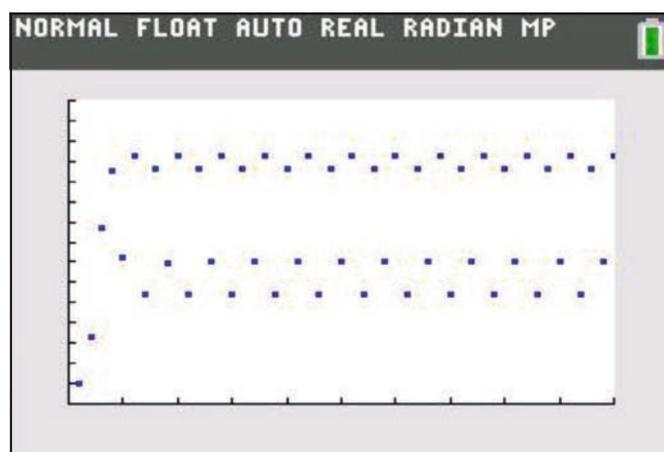


Abb. 9

Vergrößert man k auf $k=2,6$, so erhält man Abb. 10. Die bislang noch erkennbare Ordnung in der Abfolge der Werte a_n scheint sich nun aufzulösen. Bei $k=2,7$ (Abb. 11) hat sich diese Auflösung vollzogen; die Werte a_n folgen chaotisch aufeinander, eine Ordnung ist nicht mehr erkennbar. In Abb. 12 sind die Veränderungen bei der Iteration noch einmal zusammen dargestellt: Sättigungsgrenze – 2 Häufungspunkte – Chaos.

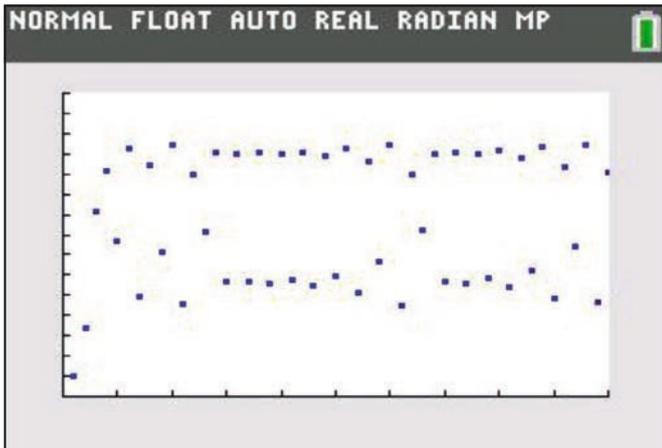


Abb. 10

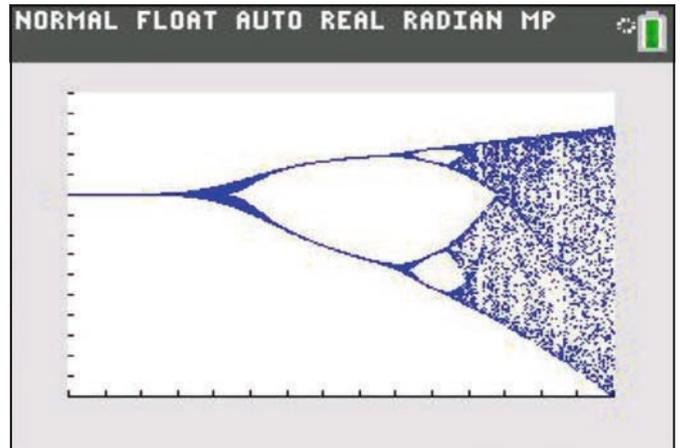


Abb. 13

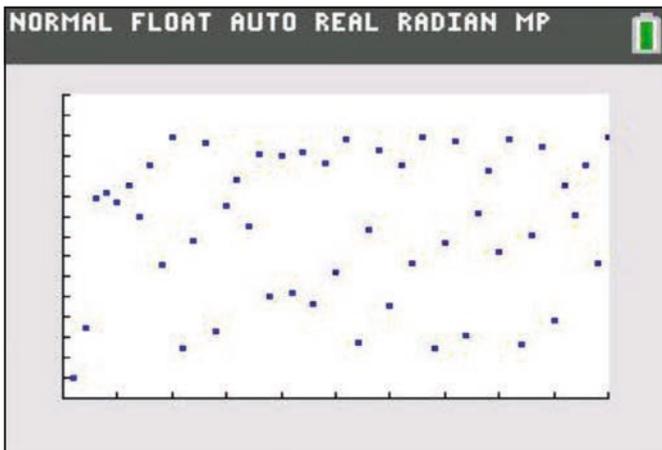


Abb. 11

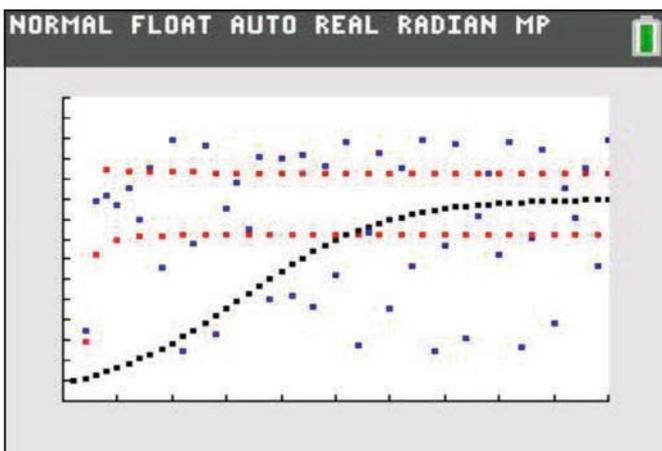


Abb. 12

Die vorgestellte Abhängigkeit der Konvergenz der Folge für das logistische Wachstum vom Wachstumsfaktor k kann sowohl auf GTR- als auch auf CAS-Rechnern gezeigt werden. Diese Abhängigkeit kann auch in einem Diagramm dargestellt werden, wenn man k als x -Variable setzt und die Häufungspunkte senkrecht darüber zeichnen lässt. Man erhält das sogenannte Feigenbaum-Diagramm (Abb. 13).

Namensgeber ist Mitchell Feigenbaum, der in den 1970er bis 80er Jahren dieses Verhalten bei der logistischen Iteration zuerst untersuchte. Chaotisches Verhalten kann nur in Systemen auftreten, die durch nichtlineare Gleichungen beschrieben werden. Die logistische Iteration zählt dazu, da es sich um eine quadratische Gleichung handelt. Auffällig ist die mehrfache Verdopplung der Häufungspunkte von 1 auf 2 und 4. Auch innerhalb des chaotischen Bereiches findet man immer wieder Abschnitte mit diskreten Häufungspunkten, die sich wieder verdoppeln, usw. Wegen der vergleichsweise groben Auflösung kann man sie in der Grafik als Gebiete mit geringerer Punktdichte nur erahnen. Die Bereiche mit diskreten Häufungspunkten werden dabei immer kürzer und streben gegen die sogenannte Feigenbaum-Konstante $\delta \approx 4,669$, eine irrationale Zahl.

Die Chaosforschung selbst beschäftigt sich mit der Ordnung in speziellen dynamischen Systemen, deren zeitliche Entwicklung unvorhersagbar erscheint (Schmetterlingseffekt), obwohl die zugrundeliegenden Gleichungen deterministisch sind (deterministisches Chaos). Dabei führen schon kleinste Änderungen in den Anfangsbedingungen (Parameter k) mit der Zeit zu einem völlig anderen Verhalten.

Das Feigenbaum-Programm

Hinter dem Diagramm verbirgt sich ein kurzes Programm, das sich sehr einfach in TI-BASIC schreiben lässt (Abb. 14). Die linke (X_{min}) und rechte Grenze (X_{max}) des darzustellenden Intervalls sind variabel; für Abb. 13 gilt $X_{min}=1,5$ und $X_{max}=3$. Die Schrittweite D für k hängt ab von der Intervalllänge $X_{max}-X_{min}$ und der Anzahl der Pixel in x -Richtung; beim TI-84 C sind es 320. Dann werden weitere Einstellungen vorgenommen und der Startwert $k (=X)$ sowie $a_0 (=0,1)$ festgelegt. Mit der Marke Lbl 1 beginnt die eigentliche Iteration. Sie ist zweigeteilt. Um Einschwingvorgänge auszublenden, wird sie zunächst 20 Mal ausgeführt, ohne dass die berechneten Punkte angezeigt werden. Erst dann werden die nächsten 40 Iterationen angezeigt. Man erhält eine bessere Grafik, wenn man diese Grenzen vergrößert; allerdings verlängert sich dann auch die Rechenzeit von ca. 10 Minuten erheblich. Das Pro-

programm endet, sobald X_{max} überschritten ist. Es kann sein, dass das Programm bei der erstmaligen Ausführung einen Overflow meldet; startet man es dann neu, funktioniert es aber einwandfrei.

```

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
PROGRAM:FEIGE
:ClrHome
:Disp "FEIGENBAUMDIAGRAMM"
█
:Prompt Xmin,Xmax
:(Xmax-Xmin)/320→D
:0→Ymin
:1.5→Ymax
: .1→Xscl
: .1→Yscl

:Xmin-D→X
:DispGraph
:Lbl 1
:X+D→X
: .1→A
:For(N,1,20)
:X*A*(1-A)+A→A
:End
:For(N,1,60)
:X*A*(1-A)+A→A
:Pt-On(X,A,4)
:End
:If X<Xmax
:Goto 1
:Pause
    
```

Abb. 14:

Die Abbildungen 15 bis 17 zeigen Ausschnitte aus dem Feigenbaum-Diagramm von Abb. 13. In Abb. 15 ist das Intervall $[2,3;3,0]$ dargestellt, in Abb. 16 das Intervall $[2,8;2,9]$ und in Abb. 17 das Intervall $[2,83;2,86]$. Gut zu erkennen sind dabei Bereiche mit mehreren Häufungspunkten oder in denen das chaotische Verhalten weniger ausgeprägt ist. Ein Vergleich mit der Mandelbrot-Menge („Apfelmännchen“) ist an dieser Stelle möglich, wenn man das Thema vertiefen will.

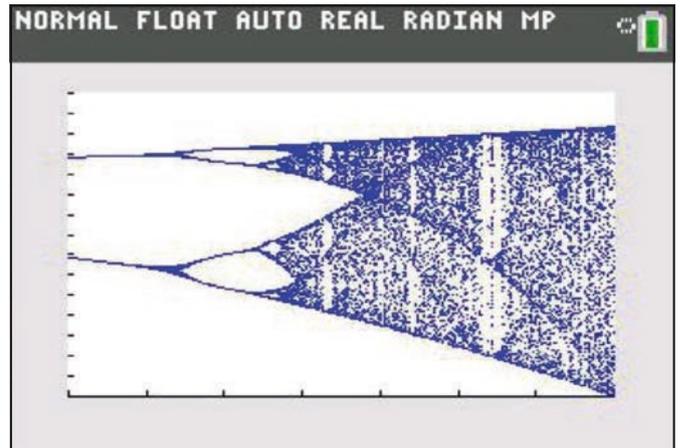


Abb. 15

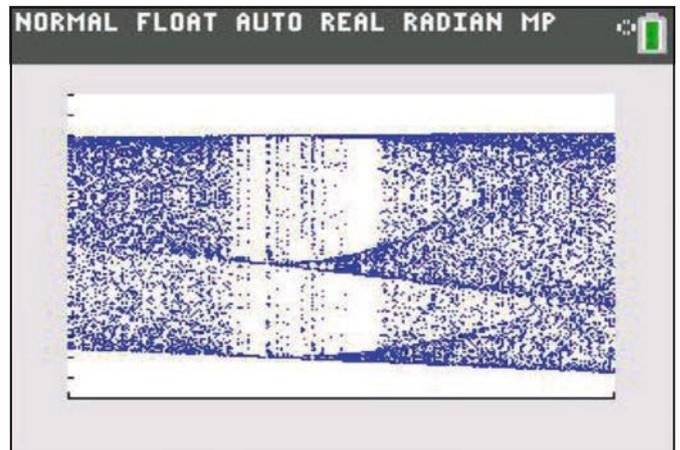


Abb. 16

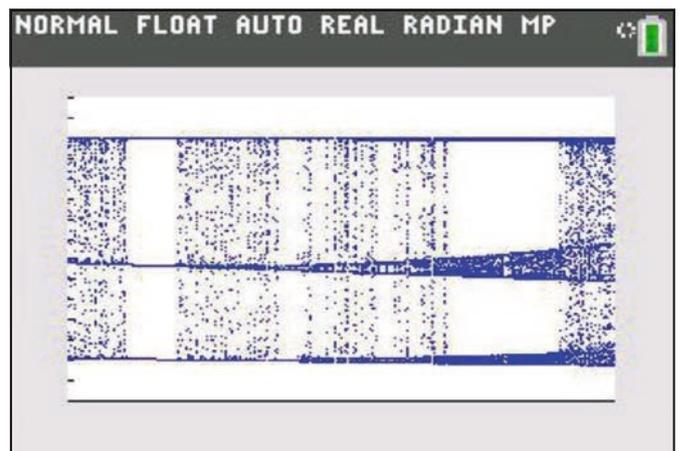


Abb. 17

Autor:

Jürgen Enders, Bad Pyrmont (D)

Nasse Haare

Dr. Alfred Roulier



Abb. 1: Ashley Vincent in National Geographic Sept 2013

Wenn ein Pelzträger sein nasses Fell mehrmals und rasch schüttelt, entsteht ein Tröpfchenchaos. Hingegen wird Ordnung sichtbar, wenn eine Frau ihre nassen Haare einmal nach hinten wirft.



Abb. 2: Schwungvoll: Eine Frau erfrischt sich an einem Brunnen in Berlin und schwingt ihre nassen Haare durch die Luft (29. Juli 2013)
Bild: Wolfgang Kumm/AFP

Diese im Juli 2013 im Internet erschienenen attraktiven Bilder geben Anlass zu versuchen, die Bahnen der Wasser-Tröpfchen in einem physikalischen Modell zu berechnen.

Wir nehmen an, dass die Frau das Kinn auf die Brust drückte und dass dabei die nassen Haare senkrecht nach unten hingen. Mit einem Ruck warf sie den Kopf nach hinten. Die Haare wurden rasch infolge der Zentrifugalkraft gestreckt und Wassertröpfchen wurden tangential weggeschleudert. Man sieht, dass am Ende der Bewegung die Haare ziemlich senkrecht zum Kopf und ungefähr in einer Linie zum Drehpunkt in der Halsmitte stehen.

Wir versuchen ein einfaches **Modell** wie folgt:

Wir wählen das dritte Haarbündel von links. Der Haaransatz beschreibt innerhalb einer Bewegungszeit *zeit* eine Kreisbewegung (blau) von 37 bis 143 Grad. Der Radius ist 32 cm. Die 37 cm langen Haare sind immer gestreckt, und ihre Spitzen überstreichen in der gleichen Zeit einen Bogen von -90 bis +143 Grad. Ihre Spur ist in Abb. 3 gelb eingezeichnet.

Die Winkelgeschwindigkeiten von Haaransatz und Haarspitzen sind konstant. Tangential zur gelben Spur wird bei jedem Zeitschritt ein Tröpfchen losgeschleudert und erlebt danach einen schiefen Wurf, den wir ohne Luftreibung behandeln.

Diese Annahmen sind zu Beginn der Bewegung in der Beschleunigungsphase sicher nicht richtig. Aber später, etwa dann wenn die Tröpfchen im Bild vor dem dunklen Hintergrund deutlich sichtbar werden, treffen sie vermutlich gut zu.

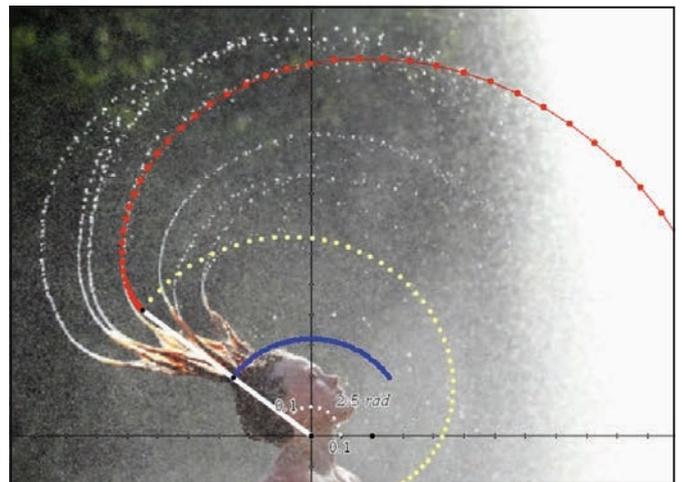


Abb. 3

Eingaben (m, sec)

Untersuchte Bewegungszeit **zeit**:=0.2 ▶ 0.2 sec

Anzahl Berechnungsschritte **n**:=50 ▶ 50

Zeitschrittlänge $dt := \frac{\text{zeit}}{n-1}$ ▶ 0.004082

Erdbeschleunigung **g**:=9.8 ▶ 9.8

Abstand Hals – Haaransatz **rk**:=0.32 ▶ 0.32

Haarlänge **rh**:=0.37 ▶ 0.37

Winkel Hals – Haarspitze am Ende $\varphi_e := 143^\circ \cdot \frac{143 \cdot \pi}{180}$

Winkelgeschwindigkeit Haarwurzel $\omega_k := \frac{2 \cdot \varphi_e - \pi}{\text{zeit}}$ ▶ 9.25025

Winkelgeschwindigkeit Haarspitze $\omega_h := \frac{\varphi_e + \frac{\pi}{2}}{\text{zeit}}$ ▶ 20.3331

Abb. 4

Wir beginnen mit der Endlage und rechnen i Zeitschritte der Länge dt zurück. Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Hals unterhalb des Kinns. Dann ist die x-Koordinate der Haarwurzel zur Zeit $-i \cdot dt$

$$x_k = r_k \cdot \cos(\varphi_e - \omega_k \cdot i \cdot dt).$$

Entsprechend die y-Koordinate.

Die x-Koordinate der Haarspitze war zur Zeit $-i \cdot dt$

$$x_h = x_k + r_h \cdot \cos(\varphi_e - \omega_h \cdot i \cdot dt).$$

Die x-Tangentialgeschwindigkeitskomponente mit welcher im Zeitschritt i ein Tröpfchen „geworfen“ wurde setzt sich zusammen aus jener der Haarwurzel und jener der Haarspitze und betrug also zur Zeit $-i \cdot dt$

$$vt_x = r_k \cdot \omega_k \cdot \cos(\varphi_e - \omega_k \cdot i \cdot dt + \pi/2) + r_h \cdot \omega_h \cdot \cos(\varphi_e - \omega_h \cdot i \cdot dt + \pi/2).$$

Nun sind alle Größen beisammen, um die Formel des schiefen Wurfes anzuwenden.

```

Berechnung
Koordinaten der Haarwurzel zur Zeit  $-i \cdot dt$ 
xk:=seq{rk*cos{φe-ωk*(i-1)*dt},i,1,n}
* {-0.255563,-0.248112,-0.240307,-0.232159,-0.22368,-0.214883,-0.205779,-0.196382,-0.186
yk:=seq{rk*sin{φe-ωk*(i-1)*dt},i,1,n}
* {0.192581,0.20209,0.211312,0.220232,0.228839,0.237119,0.245061,0.252654,0.259887,0.2
Koordinaten der Haarspitze zur Zeit  $-i \cdot dt$ 
xh:=seq{xk[i]+rh*cos{φe-ωh*(i-1)*dt},i,1,n}
* {-0.551059,-0.524131,-0.49495,-0.463674,-0.430473,-0.395529,-0.359036,-0.321194,-0.282
yh:=seq{yk[i]+rh*sin{φe-ωh*(i-1)*dt},i,1,n}
* {0.415252,0.448491,0.479746,0.508851,0.535656,0.560023,0.581829,0.600967,0.617347,0.
Geschwindigkeitskomponenten eines Wassertropfchens, das zur Zeit  $-i \cdot dt$  "geworfen" wurde
vtx:=seq{rk*ωk*cos{φe-ωk*(i-1)*dt+π/2}+rh*ωh*cos{φe-ωh*(i-1)*dt+π/2},i,1,n}
* {-6.30902,-6.87947,-7.41278,-7.90572,-8.35536,-8.75904,-9.1144,-9.41939,-9.67229,-9.871
vty:=seq{rk*ωk*sin{φe-ωk*(i-1)*dt+π/2}+rh*ωh*sin{φe-ωh*(i-1)*dt+π/2},i,1,n}
* {-8.37235,-7.90742,-7.40058,-6.85493,-6.27382,-5.66081,-5.01969,-4.3544,-3.66905,-2.967
Koordinaten eines Wassertropfchens das zur Zeit  $-i \cdot dt$  "geworfen" wurde
xt:=seq{xh[i]+vtx[i]*(i-1)*dt,i,1,n}
* {-0.551059,-0.552211,-0.555463,-0.560478,-0.566887,-0.574285,-0.582246,-0.59032,-0.598
yt:=seq{yh[i]+vty[i]*(i-1)*dt-0.5*g*((i-1)*dt)^2,i,1,n}
    
```

Abb. 5

Die Spur der Wassertropfchen (rot, vgl. Abb. 3) wird mit dieser einfachen Modellrechnung in der zweiten Hälfte der Bewegung sehr gut wiedergegeben. Für die erste Hälfte müsste das Modell angepasst werden.

Die Modellierung der Beschleunigung der flexiblen Haare aus der Ruhelage und die Dynamik des Wassers längs der Haare ist indessen sehr schwierig.

Information von Texas Instruments zu Graphikrechnern (GTR) und Computeralgebrasystemen (CAS) in Prüfungen

Im Unterricht schätzen Lehrkräfte die Vielfalt an pädagogisch didaktischen Möglichkeiten, die Ihnen graphikfähige Taschenrechner anbieten. In einer Prüfung hingegen steht Sicherheit im Vordergrund. Um beiden Anforderungen gerecht zu werden, können

- GTR und CAS von Texas Instruments durch **Datenlösch**en und Zurücksetzen in den Ausgangszustand gebracht werden.
- Für die Modelle TI-Nspire™ CX, TI-Nspire™ CX CAS, TI-84 Plus und TI-84 Plus C Silver Edition von Texas Instruments gibt es den sogenannten

Press-to-Test Modus:

- o Dabei wird der Zugriff auf die im Gerät gespeicherten Dateien und Programme blockiert, ohne die Dateien und Programme zu löschen.
- o Der Press-to-Test Modus wird auf dem Display und/oder durch blinkende LED's angezeigt.

Bei den TI-Nspire™ Modellen ist die Software für PC und Mac im Lieferumfang enthalten. Dadurch können erstellte Dateien auf dem PC gespeichert und wieder verwendet werden.

Texas Instruments empfiehlt immer das neueste Betriebssystem (OS) zu installieren. Das aktuelle Betriebssystem finden Sie auf den TI-Webseiten im Bereich „Downloads“. Zudem liefern Ihnen die TI-Handbücher zusätzliche Details.



Eine App. Die ganze Mathematik.

TI-Nspire™ App für iPad® und TI-Nspire™ CAS App für iPad®. Ideal für Schule und Hochschule, zu Hause und unterwegs! Die TI-Nspire™ App für iPad® bietet vollen Leistungsumfang bei mobilem Einsatz. Die innovative TI-Nspire™ Technologie vereint unterschiedliche Applikationen zur dynamischen Geometrie, Statistik, Tabellkalkulation oder auch Textverarbeitung in einer interaktiven Lösung. Tauschen Sie über die App Ihre Dokumente mit anderen via E-Mail, iTunes® oder Dropbox aus. So erkunden Sie die Mathematik ganz neu.



Dr. Alfred Roulier, Neuenegg (CH)

Der Bewegungssensor – ein Werkzeug zum Verstehen von Zeit-Weg-Diagrammen

PD Dr. Hildegard Urban-Woldron, Jörg Bussmann



Zusammenfassung

Der Artikel stellt Anwendungsmöglichkeiten für den Einsatz des Bewegungssensors sowohl für den Mathematik- als auch für den Physikunterricht vor. Der Schwerpunkt der vorgeschlagenen Unterrichtsideen liegt auf dem „Nachgehen“ vorgegebener Zeit-Weg-Diagramme und der Interpretation von Bewegungsdiagrammen durch die Schülerinnen und Schüler. Durch die gleichzeitige Visualisierung der eigenen Bewegungen und der Veranschaulichung des zugeordneten Graphen auf dem Handheld oder Computer-Bildschirm, wird die Verbindung zwischen dem realen Vorgang und der graphischen Repräsentation besonders unterstützt. Je nach Einstieg und Vorgangsweise ist das Unterrichtsvorhaben in verschiedenen Jahrgangsstufen möglich, wobei auch hier entsprechend nach Leistungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler differenziert werden kann. Abschließend werden Möglichkeiten der inhaltlichen Vertiefung und Erweiterung angeboten.

Lernziele

Schülerinnen und Schüler sollen ...

- aus Zeit-Weg-Diagrammen die für Bewegungsabläufe relevanten Informationen ablesen und kommunizieren können (Position des Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkt aus den Koordinaten der einzelnen Punkte; zurückgelegter Weg in einem bestimmten Zeitintervall durch Differenzenbildung; Richtung der Bewegung; Schnelligkeit)
- Diagramme zu verbalen Beschreibungen von Bewegungen zuordnen können und umgekehrt
- vorgegebene und aus realen Bewegungsvorgängen aufgenommene Diagramme interpretieren können
- Fehler beim „Nachgehen“ vorgegebener Graphen erkennen und korrigieren können
- zwischen Schnelligkeit und Geschwindigkeit unterscheiden können – erste Hinführung zur Geschwindigkeit als vektorielle Größe

1. Einstiegsmöglichkeiten

Im Folgenden werden drei verschiedene Zugänge A, B und C beschrieben. Für Schülerinnen und Schüler ohne Vorerfahrungen zum Koordinatensystem und zum Funktionsbegriff bietet sich ein exploratives Vorgehen an. Dabei bewegen sich die Schülerinnen und Schüler vorerst einmal möglichst gleichförmig vor einem Bewegungssensor, wobei ihr Abstand zum Sensor in Abhängigkeit von der Zeit simultan aufgezeichnet wird. Wenn Schülerinnen und Schüler schon mit Funktionsgraphen aus dem Mathematikunterricht vertraut sind, eignet sich das Anbieten von ausgewählten Zeit-Weg-Diagrammen und entsprechenden Fragestellungen mit der Intention, den Zusammenhang zwischen der Steigung eines Funktionsgraphen und der physikalischen Größe Geschwindigkeit zu motivieren. Alternativ kann in jeder Altersklasse natürlich auch das Programm „Motion Match“ als spielerischer Einstieg gewählt werden, ohne vorherige Analyse. Durch einfaches „Probieren“ erkennen die Lernenden schnell, wie sie Ihre Bewegungsabläufe gemäß dem vorgegebenen Graphen zu koordinieren haben.

A) Erzeugen und Analysieren verschiedener Graphen durch gleichförmige Bewegung

Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Aufgabe sich vor einem Bewegungssensor 6 Sekunden langmöglichst mit konstanter Geschwindigkeit in eine Richtung zu bewegen. Das simultan auf dem Bildschirm entstehende Zeit-Weg-Diagramm (vgl. Abb. 1) kann mit Hilfe der Trace-Funktion genauer untersucht werden. Besonders empfehlenswert wäre die Darstellung über einen Beamer, sodass alle Lernenden zur aktiven Mitarbeit angeregt werden. Beim Abtasten des Graphen sollen die Schülerinnen und Schüler eine Verbindung zwischen der realen Position der Versuchsperson und den mathematischen Koordinaten des jeweiligen Punktes im Streudiagramm herstellen.

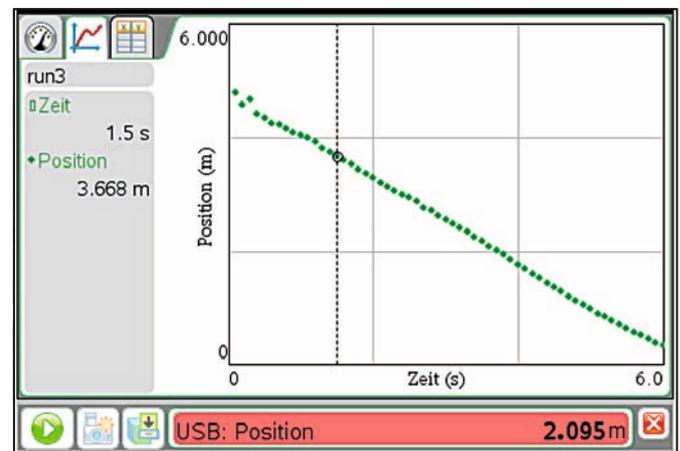


Abb. 1: Versuchsperson bewegt sich auf den Sensor zu

Selbst bei diesem einfachen Diagramm lässt sich ermitteln, wie schnell sich die Versuchsperson bewegt. Im konkreten Beispiel legt die Versuchsperson in 6 Sekunden etwa 4,5 m zurück; in einer Sekunde also etwa 0,75 m. Diese Vorgangsweise führt intuitiv zum Begriff der Geschwindigkeit.

Abb. 2 stellt das Zeit-Weg-Diagramm einer Versuchsperson dar, die sich in 6 Sekunden ca. 2,1 m vom Sensor wegbewegt. Die Versuchsperson legt nun pro Sekunde 0,35 m zurück. Beim Vergleichen der beiden Graphen kann den Schülerinnen und Schülern einsichtig gemacht werden, dass man eine zusätzliche Information als Unterscheidungskriterium für die Richtung der Bewegung benötigt. Das entspricht der Tatsache, dass der physikalische Begriff Geschwindigkeit als vektorielle Größe nicht nur über die Schnelligkeit einer Bewegung Auskunft gibt. Die Versuchsperson in Abb. 3 legt in einer Sekunde etwa 0,15 m zurück. Sie bewegt sich vom Sensor weg. Das korrespondierende Zeit-Weg-Diagramm stellt eine Gerade mit positiver Steigung dar. Die Richtung der Bewegung findet sich im Vorzeichen der Steigung des zugeordneten Bewegungsgraphen.

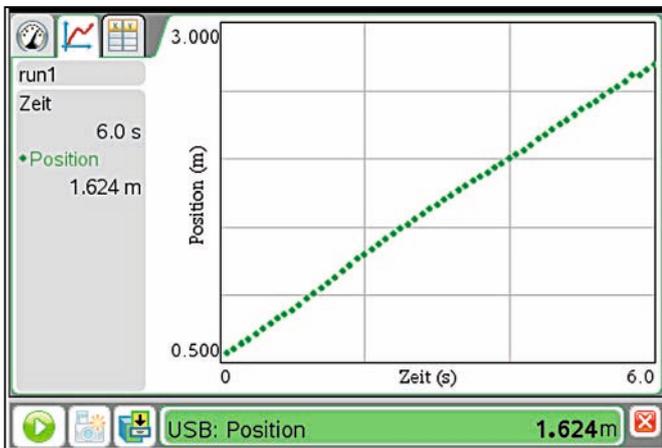


Abb. 2: Versuchsperson bewegt sich vom Sensor weg

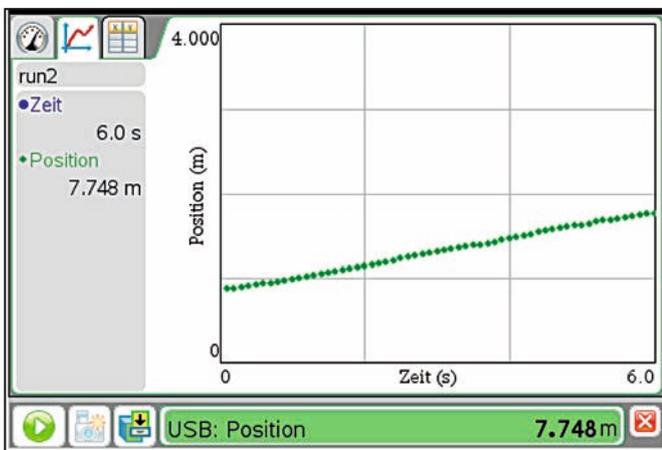


Abb. 3: Versuchsperson bewegt sich langsam vom Sensor weg

Die Schülerinnen und Schüler erkennen aus den vorgestellten Beispielen, dass eine Bewegung vom Sensor weg mit einer ansteigenden Geraden korrespondiert und dass die Steilheit der Geraden etwas mit der Schnelligkeit zu tun hat. Um die Notwendigkeit einer kritischen Auseinandersetzung mit den in den Abbildungen 1 bis 3 dargestellten Diagrammen zur Ermittlung der Schnelligkeit der Bewegungsabläufe zu forcieren, wurden bewusst verschiedene Skalierungen und Nullpunkte verwendet.

B) Aus vorgegebenen Zeit-Weg-Diagrammen relevante Informationen ermitteln

In den Abb. 4 und 5 sind Bewegungsdiagramme für einen Zeitraum von jeweils 6 Sekunden dargestellt, die sich in drei Phasen unterteilen lassen. Die Positionen des Körpers zu jeder Sekunde lassen sich jeweils aus den Koordinaten der sieben Punkte ermitteln. Zu Beginn kann der Schwerpunkt auf die globale Beschreibung der drei Bewegungsabschnitte gelegt werden. Die Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit den vorgegebenen Diagrammen könnte u.a. durch folgende Fragen angeregt werden:

- Bewegt sich der Körper immer gleich schnell?
- Welche Bewegungsabschnitte können identifiziert werden?
- Um wie viele Meter bewegt sich der Körper in 6 Sekunden?
- Wie schnell bewegt sich der Körper in Abb. 5 in folgenden Zeitintervallen: [0s;1s], [1s;4s] und [4s;6s]?
- In welche Richtung (in Bezug auf den Bewegungssensor) bewegt sich der Körper in Abb. 4?
- Welche Geschwindigkeit hat der Körper in den Abb. 4 und 5 jeweils nach 3 s?
- Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Graphen sind zu erkennen?
- Welche Informationen lassen sich aus den beiden Graphen in den Abb. 4 und 5 noch gewinnen?

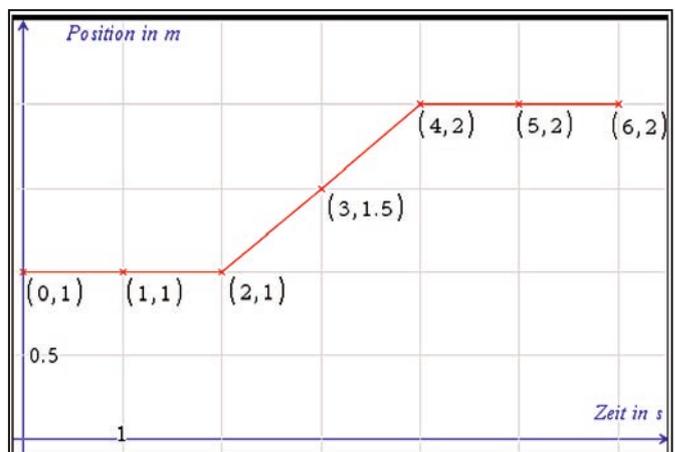


Abb. 4: Zeit-Weg-Diagramm (1)

Aus den vorgegebenen Daten lassen sich daher auch die Schnelligkeiten und die Richtungen beider Bewegungen ermitteln. Schließlich können auf diesem Wege der Begriff der Geschwindigkeit physikalisch definiert und die einzelnen Teilgeschwindigkeiten aus den Steigungen der jeweiligen Abschnitte berechnet werden.

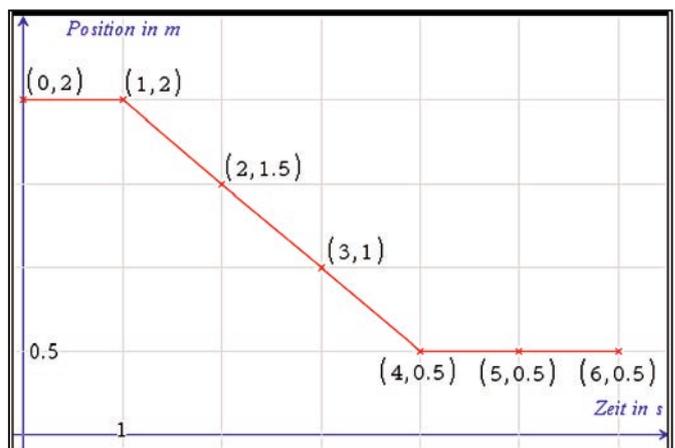


Abb. 5: Zeit-Weg-Diagramm (2)

C) Lernen durch „Probieren“ (Trial & Error)

Eine spielerische Alternative zu obigen Einstiegen bietet sich jahrgangsstufenübergreifend an. Hierbei sollen die Lernenden einen vorgegebenen Zeit-Weg-Graphen direkt versuchen abzu- laufen, ohne ihn vorher besprochen oder analysiert zu haben (vgl. Abb. 6). Damit es hier nicht nur bei einem Bewegungs- spiel bleibt, ist die Diskussion innerhalb der Lerngruppe mit anschließender Reflexion und Ergebnissicherung wichtig.

Mit zwei Bewegungssensoren lassen sich sogar Wettbewerbe unter den Schülerinnen und Schülern durchführen. Dabei treten immer zwei Lernende zeitgleich gegeneinander an. Gewonnen hat derjenige, der einen vorgegebenen Graphen am besten „getroffen“ hat beziehungsweise „nachgegangenen“ ist.

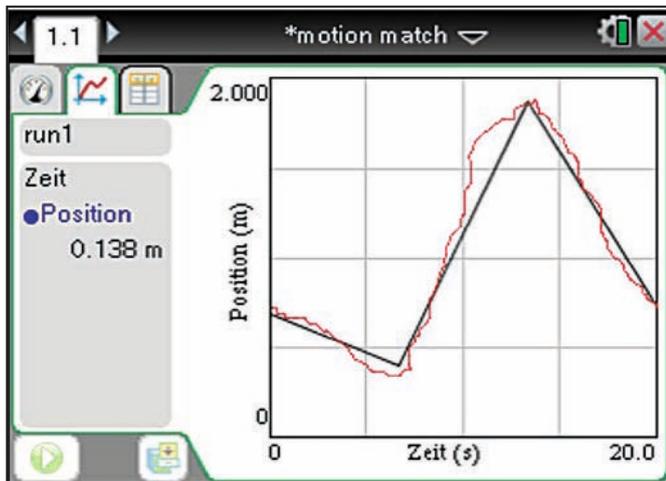


Abb. 6: Zeit-Weg-Diagramm und ausgezeichnete Bewegungsgraph

2. Zu vorgegebenen Graphen reale Bewegungen ausführen

Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Aufgabe, die in den Abb. 7 und 8 durch abschnittsweise definierte lineare Funktionen dargestellten Zeit-Weg-Diagramme „nachzugehen“¹. Für die erfolgreiche Bewältigung dieser Aufgabe müssen die Lernenden im Vorfeld aus dem Zeit-Weg-Diagramm mehrere Informationen ermitteln und verarbeiten:

- Ermittlung der Startposition
- Ermittlung der Bewegungsrichtung
- Ermittlung der Schnelligkeit der Bewegung für die einzelnen Abschnitte

Einen besonderen Mehrwert, der sich didaktisch nutzen lässt, stellt die während der realen Bewegung simultane Darstellung des Graphen auf dem Bildschirm dar, sodass die Lernenden eine unmittelbare Rückmeldung erhalten und damit zur Reflexion und eventuellen Korrektur ihrer eigenen Ergebnisse ange- regert werden. Durch einen Vergleich des aufgezeichneten und ursprünglich vorgegebenen Bewegungsgraphen identifizieren die Lernenden die Übereinstimmung oder erkennen, was verändert werden muss. Wie in den Abb. 7 und 8 zu sehen ist, wurde erkannt, dass in allen Zeitintervallen, bei denen der

Graph eine Parallele zur Zeitachse darstellt, keine Bewegung erfolgen darf. Ebenso wurde die Geschwindigkeit (Schnellig- keit und Richtung) richtig gewählt. Im ersten Fall setzte sich die Versuchsperson etwas zu spät in Bewegung, während im zweiten Fall der Startpunkt zu nahe am Sensor gewählt wurde.

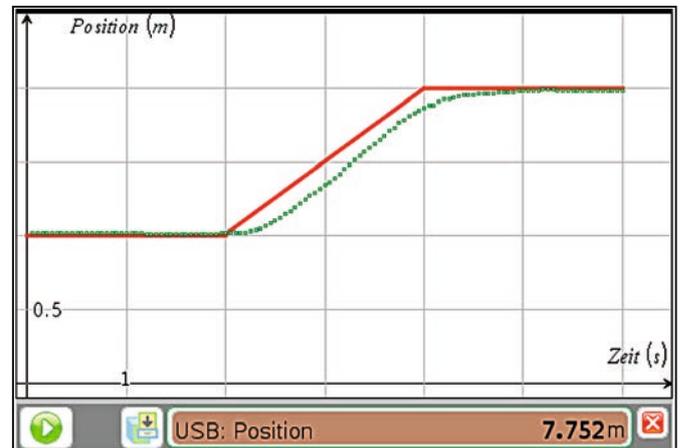


Abb. 7: Zeit-Weg-Diagramm (1) und reale Bewegung

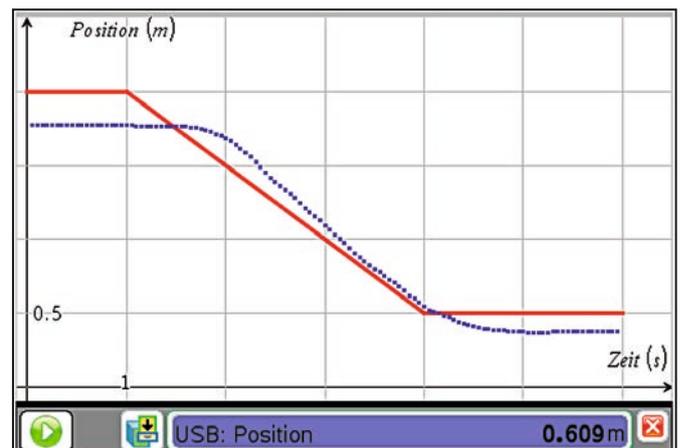


Abb. 8: Zeit-Weg-Diagramm (2) und reale Bewegung

3. Reflexion – Vertiefung und Erweiterung – Ausblick

Im Sinne einer *Vertiefung* lassen sich zum Beispiel anhand der vorgestellten sehr einfachen Diagramme weitere Analysen durchführen. So könnte etwa eine Regressionsgerade der in Abb. 1 dargestellten selbst aufgenommenen Daten bestimmt werden. Aus der Funktionsgleichung lassen sich die Zuord- nungen der Parameter zu den physikalischen Gegebenheiten (Abstand der Versuchsperson zum Sensor für $t=0s$, Schnel- ligkeit und Richtung der Bewegung) herleiten. Eine spezifische Schwierigkeit stellen die Übergänge zwischen Ruhe und Bewe- gung an den „Knickstellen“ der einzelnen Graphen dar, die so in der realen Bewegung praktisch nicht zu leisten sind und daher Anlass für Diskussionen mit Schülerinnen und Schülern liefern könnten.

Vernier DataQuest™ ermöglicht auch die zufällige Auswahl vor- gegebener Bewegungsgraphen zum Nachgehen (vgl. Abb. 10).

¹ Eine kurze Anleitung zur praktischen Umsetzung der Aktivität befindet sich im Anhang.

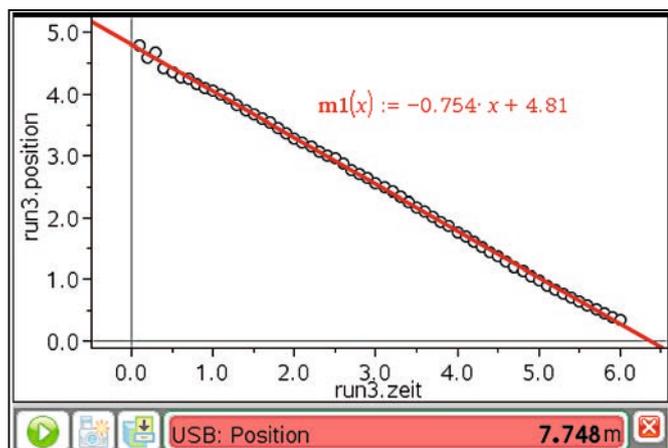


Abb. 9: Regressionsgerade zu Daten aus Abb. 1

Beispielgraphen können auf folgende Weise angezeigt werden: Wechseln Sie in die graphische Ansicht der Messwertfassung-Applikation, indem man auf den zweiten Reiter klickt. Anschließend wählt man b 4A2, um ein vorgegebenes Zeit-Weg-Diagramm einzufügen (Motion Match neu).



Abb. 10: Beispiel aus Motion-Match

Im Sinne einer Erweiterung lassen sich folgende Möglichkeiten realisieren:

- Beliebige Bewegungsabläufe einsetzen, wie z.B. in Abb. 11 und 12 dargestellt. So bieten nicht-lineare Funktionen einen besonderen Reiz für die Schülerinnen und Schüler, da sie nach mehrmaligem Probieren schnell verstehen, dass sie mit konstanter Bewegungsgeschwindigkeit den Graphen aus Abb. 11 nicht so einfach „nachgehen“ können. Neben Parabeln und Exponentialfunktionen, lassen sich z.B. auch ansteigende Sinusfunktionen, wie in Abb. 12 dargestellt, verwenden. Anschließend kann direkt der Einstieg in beschleunigte Bewegungsabläufe durch die Lehrkraft erfolgen.
- Für Zeit-Geschwindigkeitsdiagramme die Bewegung beschreiben und die Graphen „nachgehen“. Dabei können Zeit-Geschwindigkeitsdiagramme am einfachsten unter b 4A3 in der Applikation Vernier DataQuest™ erhalten werden (hier ohne Abb.).

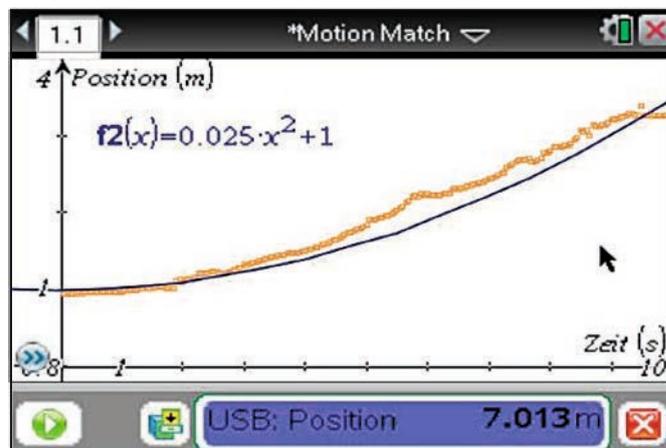


Abb. 11: Motion-Match mit nicht-gleichförmigen Bewegungen (1)

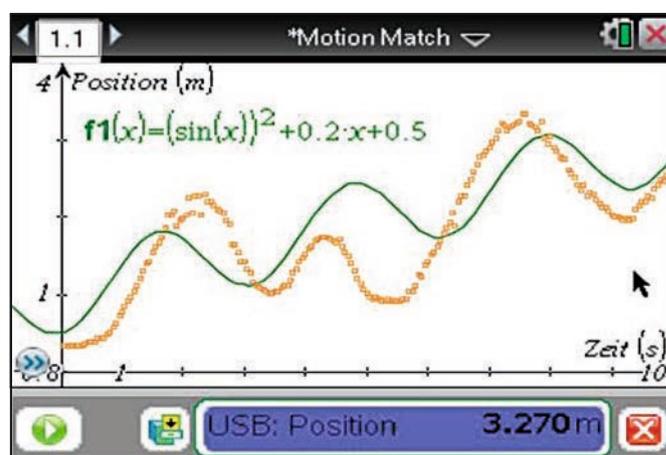


Abb. 12: Motion-Match mit nicht-gleichförmigen Bewegungen (2)

- Anhand von Zeit-Geschwindigkeitsdiagrammen Positionen zu bestimmten Zeitpunkten und zurückgelegte Wege in entsprechenden Zeitintervallen ermitteln. Je nach mathematischen Vorkenntnissen der Lernenden kann hier auch bereits der Zusammenhang zwischen Weg und Geschwindigkeit über die Fläche unter dem Graphen bzw. über das Integral erarbeitet werden.

Anhang: Technischer Hinweis zur Verwendung des Sensors unter der Applikation Graphs

- Schließen Sie den Bewegungssensor über das Messwertfassungs-Interface *Lab Cradle* oder direkt über den USB-Port an den *TI Nspire Handheld* oder den *PC* an.
- Öffnen Sie dann die Applikation „Graphs“ in einem neuen Fenster.
- Drücken Sie dann „Strg+D“, um die Data-Konsole auf dem Bildschirm anzuzeigen.

Autoren:

PD Dr. Hildegard Urban-Woldron, Baden (A)
Jörg Bussmann, OStR, Koblenz (D)

Normalverteilung mit dem TI-84 Plus Color

Reimund Vehling



Der Aufsatz verfolgt zwei Ziele: Zum einen soll aufgezeigt werden, welche vielfältigen Möglichkeiten der TI-84 Plus C beim Thema Normalverteilung bietet und wie Vernetzungen zu anderen Gebieten möglich sind. Zum anderen soll dargelegt werden, wie dem täglichen Wahnsinn begegnet werden kann, Inhalte in immer kürzerer Zeit behandeln zu müssen. Die letzte Verschärfung ist die Einführung des hilfsmittelfreien Teils im Zentralabitur u. a. in Niedersachsen. Die Aufgabenformate und die Vielfalt der unterschiedlichen Inhalte stellen für die Lernenden eine neue Herausforderung dar. Hier muss zusätzlich Zeit zum Üben investiert werden: Zeit, die eigentlich gar nicht vorhanden ist.

Ein Hinweis zum hier eingesetzten Rechner TI-84 Plus C: Durch das hochauflösende, hintergrundbeleuchtete Display wird eine verbesserte Lesbarkeit erreicht. Da die TI-84 Plus-Funktionalität beibehalten wurde, gilt ohne Einschränkung das Folgende auch beim Einsatz des TI-84 Plus.

1. Zwei Einstiege – Realdaten und Simulation

Der Rechner ist sehr gut geeignet, sowohl mit Realdaten als auch mit Simulationen einen Einstieg in das Thema Normalverteilung durchzuführen. Gerade die Einschränkung in gewissen Teilen liefert gegenüber dem Einsatz von Statistikprogrammen Vorteile: Die Entschleunigung von Arbeitsschritten und die problemlose Verfügbarkeit sind nicht zu unterschätzen.

1.1. Benutzung von Realdaten

Entweder werden die Daten selbst erhoben, oder es wird ein Rückgriff auf vorhandene Daten genommen. Dank des Internets ist dies einfach möglich. Als ein Beispiel [1] dienen die monatlichen Durchschnittstemperaturen im Centralpark von 1869–2013. In Abb. 1 ist die Umsetzung mit dem TI-84 Plus C für den Monat Januar (Klassenbreite: 2,5 Fahrenheit) dargestellt.

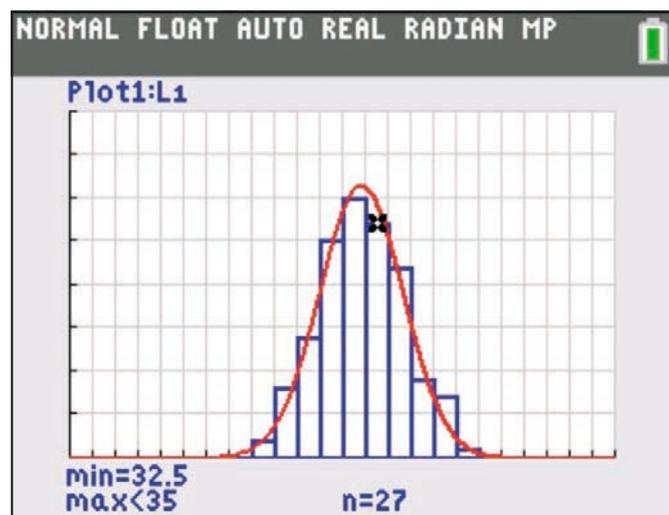


Abb. 1: Histogramm und Graph der Dichtefunktion

Hinweise zur Eingabe:

- 1) Dateneingabe in eine Liste, hier L_1 (Menü „STAT | Edit“)
- 2) Aktivieren eines Datenplots (Histogramm), hier Plot1
- 3) In der Window-Einstellung liefert Xscl die Klassenbreite. Siehe auch [2], wo die Darstellung von Histogrammen mit dem TI-84 Plus von K. Eilers erläutert wird.
- 4) Schätzung der beiden Kenngrößen μ und σ durch den Mittelwert und die Standardabweichung der Daten mit den Befehlen `mean(L1)` und `stdDev(L1)` aus dem Menü „List | Math“
Die Werte für μ und σ wurden mit „`mean(L1)` `STO>` A“ und „`stdDev(L1)` `STO>` B“ abgespeichert. Der Vorteil des Speicherns von Rechenergebnissen sollte frühzeitig im Unterricht angesprochen werden.
- 5) Zeichnen der Dichtefunktion $\phi_{\mu,\sigma}(x)$ im y-Editor mit `y1 = 2,5·145·normalpdf(X,A,B)`
Diese Funktion ist im Menü „DIST“ zu finden.

Als Ordinate wird eigentlich die Häufigkeitsdichte benötigt. Das Histogramm kann nicht mit einem einfachen Befehl „normalisiert“ dargestellt werden. Dies ist aber überhaupt kein Nachteil. So können die Lernenden überzeugend die Problematik erkennen, Histogramme geeignet zu skalieren, um sie mit dem Graphen einer Dichtefunktion zu approximieren. Bei 145 Temperaturdaten und einer Klassenbreite von 2,5 muss der Graph der Funktion $\phi_{\mu,\sigma}$ in y-Richtung mit dem Faktor 2,5·145 gestreckt werden. Dies führt zu `y1 = 2,5·145·normalpdf(X,A,B)`. Damit ist diese Funktion keine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mehr, da die Gesamtfläche unterhalb des Graphen den Wert 362,5 und nicht 1 hat. Die Stauchung der einzelnen Höhen mit 1/362,5 wird einsichtig. Experimente mit anderen Klassenbreiten sollten mit dem TI-84 Plus C durchgeführt werden. Der nicht so einfach zu durchschauende Begriff der Häufigkeitsdichte wird durch dieses Vorgehen (hoffentlich) anschaulicher. Auf eine rechnerische Umsetzung (normalisiertes Histogramm) kann getrost verzichtet werden.

Mit diesem Rechner können auf einfache und unkomplizierte Weise Teile des in [3] beschriebenen Modellbildungskreislaufs aufgezeigt werden: Zuerst werden Daten erhoben. Danach werden sie aufbereitet und Kenngrößen ermittelt, die Aussagen über Form, Zentrum und Streuung der Daten ermöglichen. Anschließend werden mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematische Modelle entwickelt, hier die Normalverteilung mit den Kenngrößen μ und σ , die sich oft aus Schätzungen des Mittelwertes und der empirischen Standardabweichung der benutzten Daten ergeben. Zum Schluss werden hiermit Methoden entwickelt, um Daten zu beurteilen und Prognosen für die Zukunft zu erhalten.

1.2. Simulationen

Mithilfe des TI-84 Plus C kann auch durch Simulation die Normalverteilung eingeführt werden. Hierzu werden mit dem Befehl `randNorm(μ,σ,n)` aus dem Menü „MATH | PROB“ insgesamt n Realisationen einer normalverteilten Zufallsvariablen X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ

erzeugt. In diesem Fall entfällt die mühsame manuelle Eingabe in eine Liste. Anschließend wird wie in 1.1 vorgegangen.

Mögliche Aufgabenstellung:

Eine automatische Abfüllanlage füllt 500g Packungen ab. Auch wenn die beste Technik zugrunde liegt, wird es immer Abweichungen von diesem Wert geben. Der Betrieb ist daran interessiert, diese Abweichungen zu kontrollieren. Dazu wird aus der laufenden Produktion der Inhalt von 400 Packungen gewogen. Das Ergebnis soll grafisch als Histogramm dargestellt werden.

Simulieren Sie mit dem Befehl $\text{randNorm}(\mu, \sigma, n)$ diese Kontrolle und stellen Sie die Daten als Histogramm dar. Variieren Sie die Klassenbreiten. Was beobachten Sie dabei?

Im weiteren Verlauf wird wie in 1.1 beschrieben die zugehörige Normalverteilung ins Spiel gebracht. Abbildung 2 zeigt die absolute Häufigkeitsverteilung der 400 Realisationen mit der Klassenbreite 2 sowie die Graphen von $400 \cdot \varphi_{\mu, \sigma}$ und $2 \cdot 400 \cdot \varphi_{\mu, \sigma}$ umgesetzt mit dem TI-84 Plus C durch $y_1 = 400 \cdot \text{normalpdf}(X, A, B)$ und $y_2 = 2 \cdot y_1$.

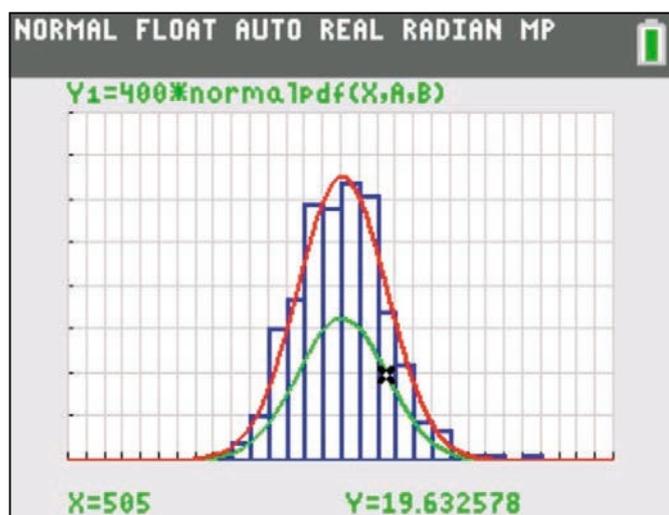


Abb. 2: Histogramm mit zwei Graphen

Diese Simulation mit dem TI-84 Plus C kann in einer angemessenen Zeit durchgeführt werden und gibt den Lernenden ohne großen Aufwand die Möglichkeit, selbstständig die zugrundeliegenden zentralen Ideen zu entdecken. Die Variabilität von Messergebnissen wird erfahren, aber auch die Möglichkeit, sie mithilfe der Normalverteilung in den Griff zu bekommen.

Prognosen für zukünftige Messungen erhält man durch Integration. Dies kann durch die folgende Fragestellung initiiert werden: „Welcher Anteil an Packungen wird einen Inhalt mit einer Masse von höchstens 500g und mindestens 495g haben?“

Die Abbildung 3 zeigt die Umsetzung: Aufrufen von $\int f(x) dx$ im Grafikenfenster und Angabe der Grenzen – hier 495 und 500.

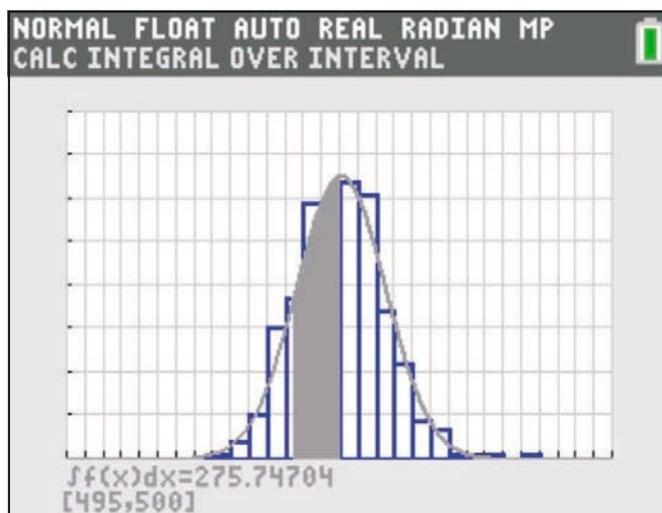


Abb. 3: Bereichswahrscheinlichkeiten

Um den Anteil zu erhalten, muss dieser (absolute) Wert noch durch die Anzahl der Messungen (hier Realisationen) und durch die Klassenbreite dividiert werden. Die Division durch die Klassenbreite wird schnell übersehen. Deshalb ist hier ein behutsames Vorgehen sinnvoll. Abbildung 4 zeigt die wesentlichen Schritte. Die Bedeutung des Befehls normalcdf wird transparenter.

Hinweis: Die beiden Kenngrößen μ und σ wurden wieder aus den Kennzahlen der Messung (hier Simulation) ermittelt und in A und B gespeichert.

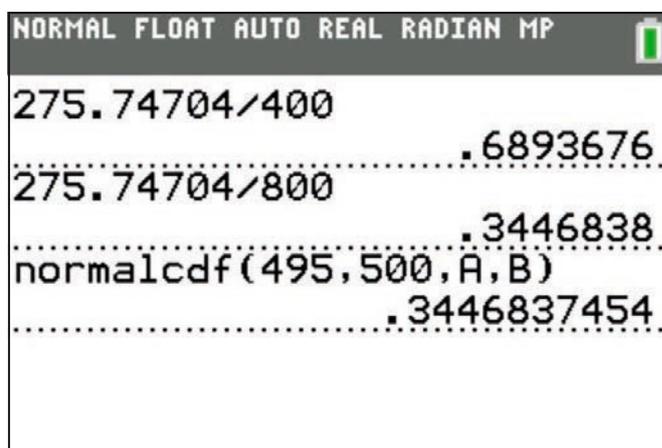


Abb. 4: Flächeninhalt und normalcdf

Schonen Sie die Umwelt und teilen uns bitte mit, wenn Sie die TI-Nachrichten nicht mehr erhalten möchten oder wenn Sie die Zusendung per E-Mail bevorzugen. Sämtliche Artikel finden Sie zudem unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net.

Informieren Sie uns auch, wenn sich Ihre Adresse geändert hat:

ti-nachrichten@ti.com

2. Grundaufgaben und Rechnereinsatz

Es gibt im Wesentlichen nur 5 verschiedene Fragestellungen, die bei Aufgaben zur Normalverteilung vorkommen. Warum dies nicht als Ausgangspunkt für erste Berechnungen nutzen? Ich habe zumindest feststellen können, dass dieses Vorgehen den Lernenden eine Sicherheit und Überblickswissen gibt. Obendrein ist das Vorgehen zeiteffektiv. Zusätzlich mussten die Lernenden mögliche Aufgabenstellungen zu den einzelnen Grundtypen nennen. Durch dieses Rückwärtsarbeiten erfährt man gut, wie flexibel die Lernenden die neuen Inhalte verinnerlicht haben.

2.1. Fünf Grundtypen – vorgestellt an Beispielen

Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit den beiden Parametern μ und σ .

- 1) gegeben: Grenzen, μ und σ
gesucht: $P(X \leq a)$; $P(X \geq a)$; $P(a \leq X \leq b)$
- 2) gegeben: α , μ ; σ
gesucht: a mit $P(X \leq a) \leq \alpha$
- 3) gegeben: $P(X \leq a) \leq \alpha$; μ
gesucht: σ
- 4) gegeben: $P(X \leq a) \geq \alpha$; σ
gesucht: μ
- 5) gegeben: a , b , $P(X \leq a)$, $P(X \geq b)$
gesucht: μ und σ

Bemerkung: In 2–5 gibt es noch Variationen durch die Wahl der Ungleichheitszeichen.

2.2. Rechnerfunktionen

Der TI-84 Plus C stellt für die Berechnungen drei Funktionen zur Verfügung, die im Menü „DISTR“ (Distribution, also Verteilung) zu finden sind:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \text{normalpdf}(X, \mu, \sigma)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx = \text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma)$$

$$\Phi^{-1}(P, \mu, \sigma) = \text{invNorm}(P, \mu, \sigma); P: \text{Wahrscheinlichkeit}$$

2.3. Berechnungen

Die Grundtypen werden im Folgenden mithilfe konkreter Werte vorgestellt. Dabei wird jeweils die normalverteilte Zufallsgröße X betrachtet, die ein Füllgewicht in g beschreibt.

Durch dieses Vorgehen können Vernetzungen zur Analysis aufgezeigt werden, da vier Grundtypen grafisch-numerisch durch Schnittpunktberechnung gelöst werden können. Dieses Vorgehen ist den Lernenden vertraut. Vereinfacht ausgedrückt geht es bei Aufgaben zur Normalverteilung vom Typ 2 bis 4 darum, die gesuchte Größe als Variable X in dem Befehl $\text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma)$ an die entsprechende Stelle einzusetzen und ein Schnittpunktproblem grafisch-numerisch zu lösen. Eine Lösung mithilfe der Φ -Funktion ist natürlich auch möglich, wird aber nur für den Grundtyp 5 gezeigt. Dort gelingt die grafische Lösung erst über einen Umweg.

Grundtyp 1: Bereichswahrscheinlichkeiten gesucht

gegeben: $\mu = 50$ g; $\sigma = 4$ g
gesucht: (i) $P(X \leq 45)$; (ii) $P(45 \leq X \leq 55)$; (iii) $P(X \geq 55)$;
Lösung: (i) $\text{normalcdf}(-1E99, 45, 50, 4)$; (ii) $\text{normalcdf}(45, 55, 50, 4)$;
(iii) $\text{normalcdf}(55, 1E99, 50, 4)$

Grundtyp 2: Grenze gesucht

gegeben: $P(X \leq a) \leq 0,6$; $\mu = 50$ g; $\sigma = 4$ g
gesucht: a
Lösung: grafisch-numerisch durch Schnittpunktbestimmung (Abb. 5); $y_1 = \text{normalcdf}(-1E99, X, 50, 4)$; $y_2 = 0,6$

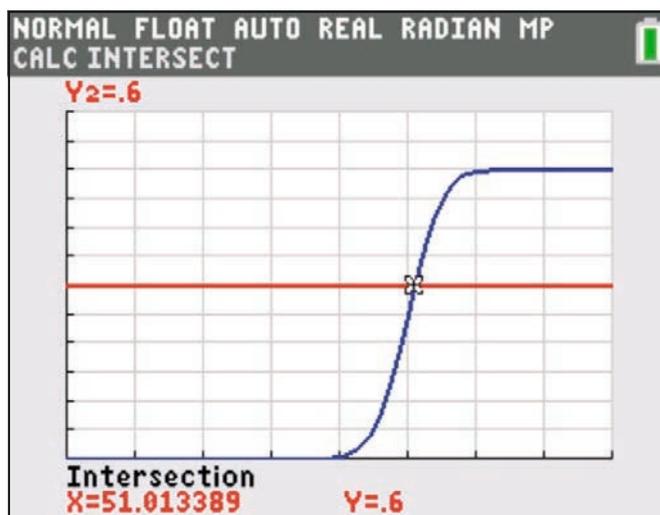


Abb. 5: grafische Lösung „Grenze gesucht“

Möglicher Aufgabentext:

Die Abfüllmenge X kann als normalverteilte Zufallsgröße angesehen werden mit dem Erwartungswert $\mu = 50$ g und der Standardabweichung $\sigma = 4$ g. Ermitteln Sie die größte obere Grenze des Intervalls, in dem höchstens 60% aller Füllmengen liegen. (Lösung: $a = 51,01\dots$)

Hier geht es eigentlich nur darum, die rechte Grenze a zu finden, damit der Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion höchstens 0,6 FE ergibt. Das Problem, exakt die größte Grenze mit der geforderten Eigenschaft anzugeben, ist rein philosophisch.

Tipp: Bevor die beiden Graphen in Abb. 5 mit dem Rechner erzeugt werden, sollte man die Lernenden auffordern, den Verlauf zu skizzieren. Dadurch wird das „Denken in Verteilungen“ gefördert. Bevor Sie weiterlesen: Probieren Sie es bei den anderen Aufgaben doch einmal selbst aus.

Grundtyp 3: Standardabweichung gesucht

gegeben: $P(X \leq 52) \leq 0,75$; $\mu = 50$ g
gesucht: σ
Lösung: grafisch-numerisch durch Schnittpunktbestimmung (Abb. 6); $y_1 = \text{normalcdf}(-1E99, 52, 50, X)$; $y_2 = 0,75$

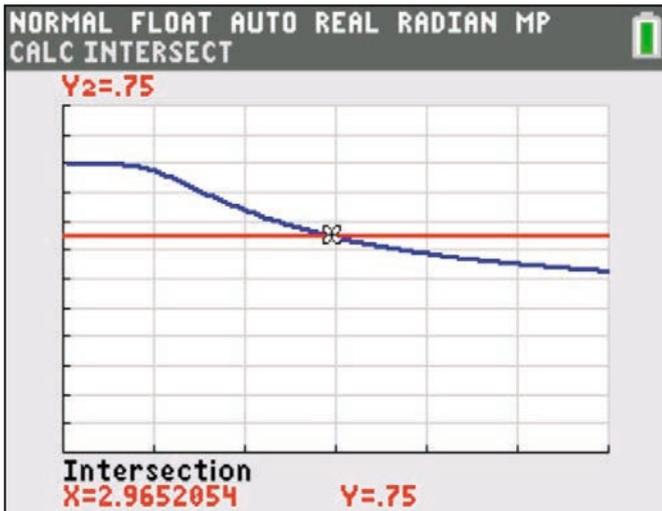


Abb. 6: grafische Lösung „σ gesucht“

Möglicher Aufgabentext:

Die Abfüllmenge X sei eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 50$ g. Es sollen höchstens 75% aller Füllmengen höchstens 52g wiegen. Ermitteln Sie bei gleichbleibendem Erwartungswert die kleinste Standardabweichung, für die diese Vorgabe gilt. (Lösung: $\sigma = 2,965\dots$ g)

Grundtyp 4: Erwartungswert gesucht

gegeben: $P(X \leq 20) \geq 0,60$; $\sigma = 3,2$

gesucht: μ

Lösung: grafisch-numerisch durch Schnittpunktbestimmung (Abb. 7); $y_1 = \text{normalcdf}(-1E99,20,X,3.2)$; $y_2 = 0,60$

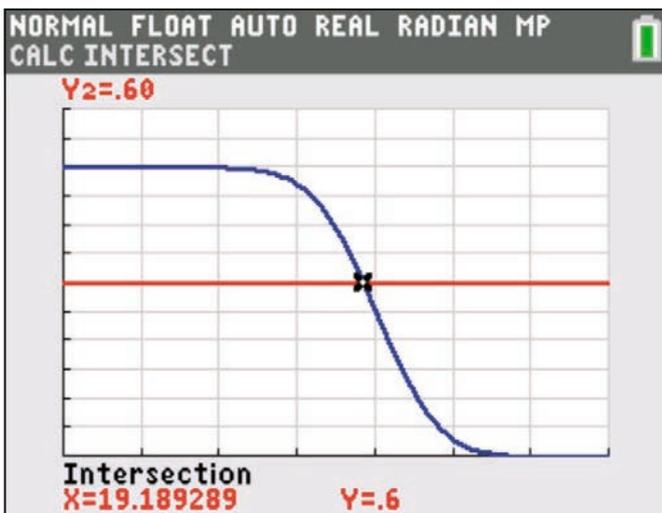


Abb. 7: grafische Lösung „μ gesucht“

Möglicher Aufgabentext:

Die Abfüllmenge X kann als normalverteilte Zufallsgröße angesehen werden mit der Standardabweichung $\sigma = 3,2$ g. Es sollen mindestens 60% aller Füllmengen höchstens 20g wiegen. Ermitteln Sie bei gleichbleibender Standardabweichung den größten Erwartungswert, für den diese Vorgabe gilt. (Lösung: $\mu = 19,189\dots$ g)

Grundtyp 5: μ und σ gesucht

gegeben: $P(X \leq 54) = 0,12$; $P(X \geq 62) = 0,05$

gesucht: μ und σ

Lösung: Schnittpunkt zweier Geraden (Abb. 8)

$$P(X \leq 52) = \Phi\left(\frac{54-\mu}{\sigma}\right) = 0,12; \mu = 54 - \Phi^{-1}(0,12) \cdot \sigma$$

$$P(X \geq 62) = 1 - \Phi\left(\frac{62-\mu}{\sigma}\right) = 0,05; \mu = 62 - \Phi^{-1}(0,95) \cdot \sigma$$

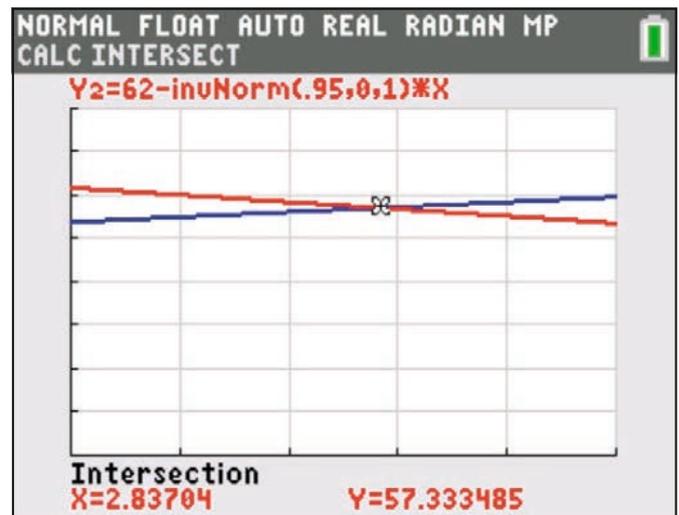


Abb. 8: grafische Lösung „μ und σ gesucht“

Möglicher Aufgabentext:

Die Abfüllmenge X kann als normalverteilte Zufallsgröße angesehen werden. Bestimmen Sie die Werte für μ und σ , wenn $P(X \leq 54) = 0,12$ und $P(X \geq 62) = 0,05$ gilt. (Lösung: $\mu \approx 57,33$ g; $\sigma \approx 2,84$ g)

3. Fazit

Mit dem TI-84 Plus C kann sehr gut Stochastik betrieben werden. Der Funktionsumfang ist völlig ausreichend. Durch den konsequenten grafischen Ansatz wird ein „Denken in Verteilungen“ gestärkt. Auch Simulationen lassen sich gewinnbringend einsetzen. Dabei besticht gerade die Einfachheit der Umsetzung. Dieses Vorgehen kann auch bei der Binomialverteilung Anwendung finden.

Literatur:

- [1] Internetadresse für die Temperaturdaten <http://www.erh.noaa.gov/okx/climate/records/monthannualtemp.html> (letzter Besuch: 03.03.2014)
- [2] Eilers, K. (2012): TI-Nachrichten 2/12; S.31
- [3] Vehling, R. (2011): Vernetzungen in der Stochastik. In: PM (53) 48; S.31-35

Autor:

Reimund Vehling, Hannover (D)

Benzinrechner

Günter Dreeßen-Meyer



Vor einiger Zeit erhielt ich eine Parkscheibe mit einem Benzinrechner auf der Rückseite.

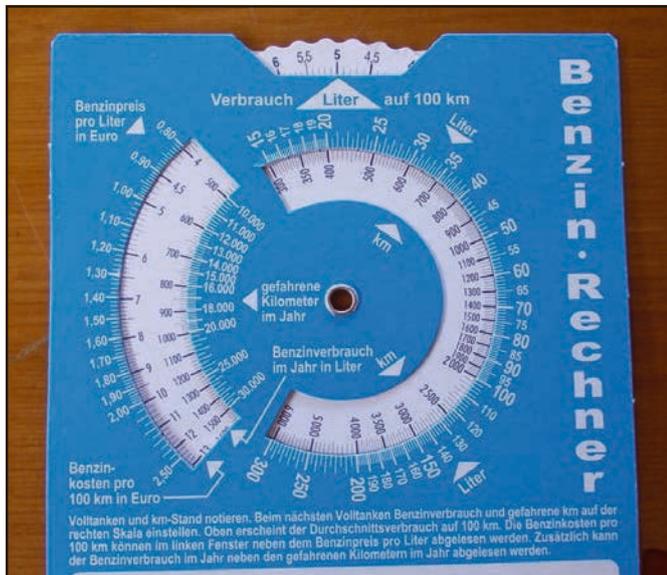


Abb. 1

Im unteren Teil der Abbildung 1 ist die Anleitung erkennbar, dort steht der folgende Text:

Volltanken und km-Stand notieren. Beim nächsten Volltanken Benzinverbrauch und gefahrene km auf der rechten Skala einstellen. Oben erscheint der Durchschnittsverbrauch auf 100 km. Die Benzinkosten pro 100 km können im linken Fenster neben dem Benzinpreis pro Liter abgelesen werden. Zusätzlich kann der Benzinverbrauch im Jahr neben den gefahrenen Kilometern im Jahr abgelesen werden.

Alltagsmathematik im Zusammenhang mit proportionalen Zuordnungen.

Eine darauf aufbauende Problemstellung für eine 6. oder 7. Klassenstufe könnte die folgende Sachsituation sein:

Herr Wohlgemut tankt seinen PKW immer voll und er stellt den Streckenkilometerstand immer wieder auf Null. So kann er beim nächsten Tanken den Verbrauch in Beziehung zu den zurückgelegten Kilometern betrachten. Er tankt genau 49,5 l E10-Benzin zum Literpreis von 1,539 €. Der Streckenkilometerzähler steht auf 915 km. Er weiß, dass er im Jahr ca. 18000 km zurücklegt.

Eine mögliche, gegliederte Aufgabenstellung könnte folgendermaßen aussehen:

Berechne

- den durchschnittlichen Verbrauch pro 100 km,
- die Benzinkosten pro 100 km,
- den Benzinverbrauch pro Jahr,
- die Benzinkosten pro Jahr unter Annahme gleichbleibender Preise.

In dieser Form entsteht eine Anwendungsaufgabe, wie sie im Mathematikunterricht vielleicht nicht ungewöhnlich ist.

Terme und Variablen

Steht die Einführung von Variablen und das Erstellen von Termen im Focus des Unterrichts so ist die Parkscheibe ebenfalls bestens geeignet.

Der Benzinrechner ist ja durch die Drehscheibe variabel nutzbar. Ein anderer Benzinverbrauch, ein anderer Preis ergeben andere Ergebnisse. Lassen sich Terme zum Berechnen der vier Werte aufstellen? Wie sollen die Variablen benannt werden? Die Entscheidung für Hilfsvariablen stellt sich. Welche Variablen benötige ich für welche Berechnung?

Unter dieser Perspektive ergibt sich eine für diese Klassenstufe schon recht anspruchsvolle Aufgabenstellung.

Zur Umsetzung der Überlegungen bietet sich eine Notes-Seite des TI-Nspire™ CX CAS an.

Hier können die Schüler mit Variablen Terme erstellen. Sie können die Variablen mit Werten belegen und der Rechner aktualisiert nach jeder neuen Eingabe die von den Variablen abhängigen Termwerte.

Terme

Die Schülerinnen und Schüler einer 7. Klassenstufe konnten mit Erfolg die Notes-Seite erstellen. Ein Beispiel für eine solche Seite zeigt Abbildung 2.

Eingabe:

Verbrauch: liter:=49.5 ▶ 49.5 |

Kilometer: km:=915 ▶ 915

Preis/Liter: preis:=1.539 ▶ 1.539

Jahreskilometer: jahr:=18000 ▶ 18000

Ausgabe:

Verbrauch/100km: $vb100 := \frac{\text{liter} \cdot 100}{\text{km}}$ ▶ 5.40984

Kosten/100km: $\text{preis100} := vb100 \cdot \text{preis}$ ▶ 8.32574

Liter/Jahr: $\frac{\text{jahr} \cdot vb100}{100}$ ▶ 973.77

Kosten/Jahr: $\frac{\text{jahr} \cdot \text{preis100}}{100}$ ▶ 1498.63

Abb. 2



Günter Dreeßen-Meyer, Berlin (D)

Tipps und Tricks:

Variable Darstellung der Binomialverteilung

Jürgen Enders



Man kann sehr schnell die Binomialverteilung veranschaulichen, wobei n und p über Schieberegler eingestellt werden können. Dazu legt man zunächst ein neues Dokument oder Problem an, das die Seiten Lists&Spreadsheet und Data&Statistics enthält.



Abb. 1

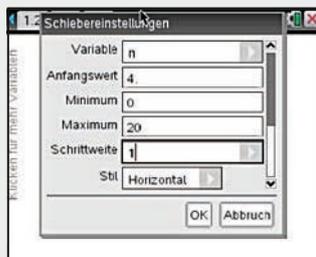


Abb. 2

Dann fügt man in der Statistik-Ansicht über **menu** zwei Schieberegler (Abb. 1) für n und p mit den passenden Einstellungen ein (Abb. 2 und 3). Jetzt ist die Statistik-Ansicht vorbereitet und sollte wie auf Abb. 4 aussehen.



Abb. 3

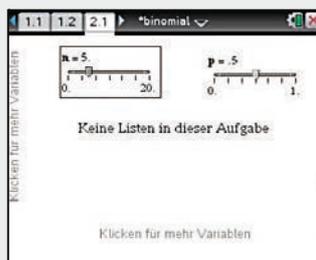


Abb. 4

In der Listenansicht wird zunächst eine Spalte x_n angelegt, die man mit den Zahlen von 0 bis n füllt: $x_n = \text{seq}(k, k, 0, n)$. Dann wird eine zweite Spalte y_n mit den Werten der Binomialverteilung gefüllt: $y_n = \text{binompdf}(n, p)$. Für die verwendeten Buchstaben muss in den Fenstern immer der Variablenverweis verwendet werden (Abb. 5). Die Tabelle sieht nun aus wie in Abb. 6.

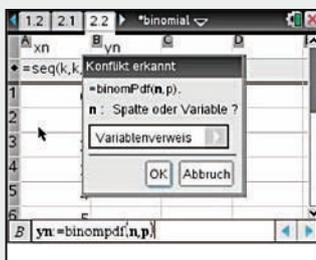


Abb. 5

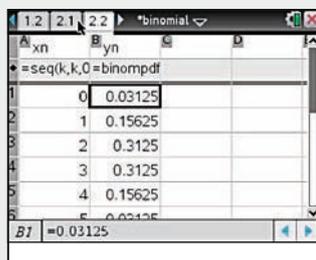


Abb. 6

Die veränderte Statistik-Ansicht zeigt Abb. 7. Fährt man mit dem Cursor nach unten, so erhält man das Variablenfenster, aus dem man x_n für die x-Achse auswählt. Man erhält die Abb. 8.

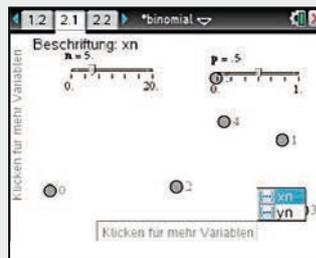


Abb. 7

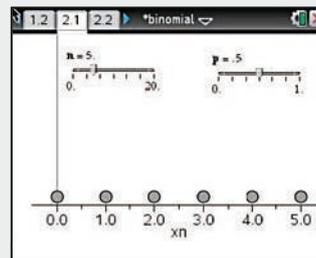


Abb. 8

Fährt man nach links, erhält man ebenfalls ein Auswahlfenster. Hier muss eine y -Ergebnisliste eingefügt werden, wieder über das übliche Auswahlmeneü. Anschließend erhält man, abhängig von den eingestellten Parametern, eine Darstellung z. B. wie in Abb. 10.

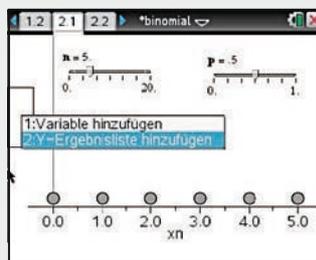


Abb. 9

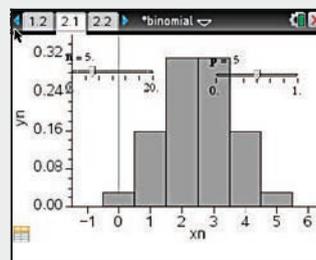


Abb. 10

Mit angepassten Fenstereinstellungen ergibt sich Abb. 11. Für Abb. 12 habe ich in der Listenansicht noch eine Spalte y_{n2} mit der kumulierten Binomialverteilung erzeugt ($y_{n2} = \text{binomcdf}(n, p)$) und in der Statistik-Ansicht noch eine weitere y -Ergebnisliste hinzugefügt und anders eingefärbt.

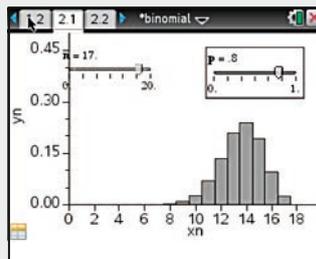


Abb. 11

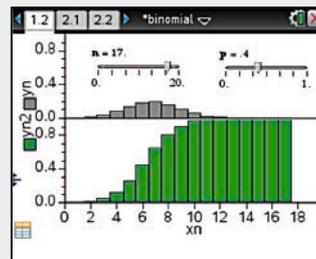


Abb. 12

Jetzt ist die durch n vorgegebene rechte Begrenzung gut zu erkennen. Abschließend sei noch erwähnt, dass man die Schieberegler animieren kann, und dass die ermittelten Wahrscheinlichkeiten jederzeit in der Listenansicht verfügbar sind.

Autor:

Jürgen Enders, Bad Pyrmont (D)

Tipps und Tricks: Windschiefe Geraden

Martin Kesting



Mit Hilfe des CAS-Werkzeugs *fmin* kann bequem der Abstand zweier Geraden im \mathbb{R}^3 berechnet werden, ohne das Skalarprodukt zu verwenden: Bei gegebener Parametergleichung für die Geraden g_1 und g_2 , kann die Bestimmung des minimalen Abstands zweier Punkte der Geraden (was einer Extremwertaufgabe mit zwei Veränderlichen entspricht) in zwei Schritten erfolgen:

```

1.1 | *Nicht gespeicherte
g1(s):=[1 2 3]+s·[2 1 0] ▶ Fertig
g2(t):=[-1 2 -3]+t·[1 -1 0] ▶ Fertig

smin:=fMin(norm(g1(s)-g2(t)),s) ▶ s= $\frac{t-4}{5}$ 

tmin:=fMin(norm(g1(s)-g2(t)),t)|smin ▶ t= $\frac{2}{3}$ 
    
```

Abb. 1

Zuerst wird der Parameter s bestimmt, für den $g_1(s)$ jeweils den Punkt mit minimalem Abstand zu einem beliebigen Punkt $g_2(t)$ angibt. Danach wird unter Verwendung dieses Parameterwertes s der Parameterwert t für den absolut kleinsten Abstand berechnet. Die Berechnung der Lotfuß-

punkte und des Abstandes erfolgt danach unter Verwendung der gefundenen Werte:

```

1.1 | *Nicht gespeicherte
smin:=fMin(norm(g1(s)-g2(t)),s) ▶ s= $\frac{t-4}{5}$ 

tmin:=fMin(norm(g1(s)-g2(t)),t)|smin ▶ t= $\frac{2}{3}$ 

l1:=g1(s)|smin and tmin ▶  $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ 

l2:=g2(t|tmin) ▶  $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ 

norm(l1-l2) ▶ 6
    
```

Abb. 2

Das Beispiel ist so gewählt, dass das Ergebnis direkt nachvollziehbar ist. Bei sich schneidenden Geraden wird der Abstand richtig mit null angegeben und auch bei parallelen Geraden funktioniert das Verfahren in dieser Form.

Autor:

Martin Kesting, Thüringen (D)

Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht. Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden. Ihr Lob spornt uns an.

Senden Sie Ihre Beiträge bitte per E-Mail an unsere TI-Nachrichten Redaktion:
ti-nachrichten@ti.com

oder per Post an

Texas Instruments, Education Technology, TI-Nachrichten, Haggertystraße 1, 85356 Freising, Deutschland

Bitte beachten Sie die Hinweise für Autoren auf unserer Website.

Texas Instruments Serviceangebot

Informieren & Ausprobieren

Ich interessiere mich für

Bitte Zutreffendes ankreuzen – und künftig gezielte Informationen erhalten:

Numerische Graphikrechner (GTR):



TI-82 STATS



TI-84 Plus



TI-Nspire™ CX
Handheld



TI-84 Plus C

Computeralgebrasystem (CAS):



TI-Nspire™ CX CAS
Handheld

Software/Apps:



TI-Nspire™/TI-Nspire™ CAS Software

TI-Nspire™/TI-Nspire™ CAS App für iPad



Sonstige TI-Software
(z.B. TI-SmartView™, Emulator Software)

TI-Nspire™ Navigator System:



Verbindet TI-Nspire™/TI-Nspire™ CAS
Handhelds zu einer drahtlosen Lernumgebung
im Klassenzimmer

Weitere TI-Produkte:

(wie z.B. TI-30X Pro MultiView™ Schulrechner)



Rückantwort an:

Texas Instruments

Fax: +49(0) 81 61-80 49 07

E-Mail: ti-nachrichten@ti.com

- Ich habe Interesse an einer *kostenlosen Rechnerausleihe mit Zubehör* für maximal 4 Wochen (für GTR und CAS möglich):
Gewünschtes Produkt: _____
Gewünschter Termin: _____
- Ich bin an einer *Produktpräsentation/Lehrerfortbildung* interessiert, die von TI oder dem Lehrernetzwerk T³ durchgeführt wird. Bitte kontaktieren Sie mich.
- Ich bin an Informationen zu *Messwert-erfassungssystemen* interessiert.
- Ich möchte auch zukünftig regelmäßig über TI-Produkte und Serviceleistungen informiert werden:
 Ich bevorzuge E-Mails.
 Ich bevorzuge Postsendungen.
- Ich möchte auch zukünftig Aufgabenbeispiele sowie Tipps & Tricks zum Einsatz der TI-Technologie erhalten:
 TI-Nachrichten Lehrer-Magazin (Print)
 TI-Materialien E-Newsletter/E-Magazin

Kontaktdaten (Bitte vollständig und in Druckschrift ausfüllen.)

Privatadresse Schuladresse

Schule _____

Name/Vorname _____

Straße _____

PLZ/Ort _____

Land _____

Telefon: _____

E-Mail _____

Ort/Datum _____

Unterschrift _____

Weitere Infos & Serviceangebote finden Sie hier:

education.ti.com/deutschland

education.ti.com/oesterreich

education.ti.com/schweiz

Oder rufen Sie uns an! TI-Customer Service Center:

Tel: 00 800-4 84 22 73 7 (Anruf kostenlos)

Die oben genannten Daten werden elektronisch gespeichert und dienen dazu, Sie zukünftig über Angebote und Serviceleistungen von Texas Instruments zu informieren.
Wenn Sie keine weiteren Informationen wünschen, kreuzen Sie bitte an:
Sie haben jederzeit Anspruch auf Zugang zu den Sie betreffenden Daten. TI behält sich das Recht vor, alle Preise, Produktspezifikationen und Serviceprogramme ohne vorherige Ankündigung zu ändern.

© 2014 Texas Instruments

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Ihre Erfahrung. Unsere Technologie. Mehr Lernerfolg.

Wir sind für Sie da

Innovative Technologie

Graphikrechner TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-84 Plus C Silver Edition, TI-89 Titanium, Voyage™ 200, TI-Nspire™ (mit Touchpad), TI-Nspire™ CAS (mit Touchpad) und der TI-Nspire™ CX Modelle durch zusätzliche Applikationen und/oder Upgrades erweitern. Neben kompatibler PC Software gibt es nun auch die TI-Nspire™ App für iPad® und die TI-Nspire™ CAS App für iPad®. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Praktische Präsentationsmöglichkeiten

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen™, Overheadprojektor, Beamer oder auch am Whiteboard.

Flexible Verbindungsmöglichkeiten

Die Verbindungskabel zu den TI-Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen ermöglichen eine schnelle und stabile Verbindung zum PC oder Mac.

Unkomplizierte Messwerterfassung

Portable, universell einsetzbare Messwerterfassungssysteme für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Verschiedene Sensoren erhältlich.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Graphikrechner oder ein Computeralgebrasystem testen? – Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel-exemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!

Mehr Informationen, kostenlose Downloads sowie die Anmelde-möglichkeit zum E-Newsletter „TI-Materialien“ finden Sie auf den TI-Webseiten oder unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Viele Handreichungen von TI und T³ können Sie auch über den TI-Unterrichtsmaterialien Webshop beziehen: www.ti-activities-shop.net

Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Service Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

Wir sind für Sie da:



Texas Instruments
Customer Service Center

Tel: 00 800 - 48 42 27 37 (Anruf kostenlos)

Fax: 00 420 - 2 26 22 17 99

Allgemeine Informationen:

ti-cares@ti.com

Unterrichtsmaterialien

Neben den „TI-Nachrichten“ gibt es eine Fülle von begleitenden Unterrichtsmaterialien zum Einsatz unserer Produkte. Zudem wird TI-Technologie in führenden Lehrwerken eingesetzt.

Lehrerfortbildungen

Graphikrechner und CAS sind für viele Kolleginnen und Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen an Ihrer Schule oder auf Veranstaltungen! Wenden Sie sich direkt an T³. Mehr Informationen zu T³ finden Sie im Internet:

T³ Deutschland: www.t3deutschland.de

T³ Österreich: www.t3oesterreich.at

T³ Schweiz: www.t3schweiz.ch

Oder kontaktieren Sie Ihren TI-Schulberater sowie unser Customer Service Team.

Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen:

ti-loan@ti.com

Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:

ti-nachrichten@ti.com

Garantie

Auf alle Graphikrechner und Computeralgebrasysteme von Texas Instruments bietet Texas Instruments 3 Jahre Herstellergarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Service Center an. Oft kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

education.ti.com/deutschland • education.ti.com/oesterreich • education.ti.com/schweiz
ti-cares@ti.com