

# TI-Nachrichten

Ausgabe 2/14

## Inhaltsverzeichnis

**Dr. A. Roulier, M. Roser:**

Bowling ..... 1

**J. Enders:**

Bestimmung von  $\mu_0$  durch eine Schülerübung ..... 5

**H. Schneider**

Listenverarbeitung ..... 10

**G. Aumayr:**

Verstehensorientierter Unterricht mit  
Blick auf die neue Reifeprüfung in Österreich ..... 14

**G. Aumayr, H. Heugl:**

Österreichischer Lehrplan  
mit Technologie-Begleitung ..... 17

**H.-U. Lampe:**

Kurvenanpassung mit der Applikation  
„Transformation Graphing“ ..... 18

**R. Märki:**

Iterationen ..... 23

**Tipps und Tricks:**

**M. Kesting:**

Binomialverteilung und  
dreimal-mindestens Aufgabe ..... 26

**Weitere Unterrichtsmaterialien:**

[www.ti-unterrichtsmaterialien.net](http://www.ti-unterrichtsmaterialien.net)



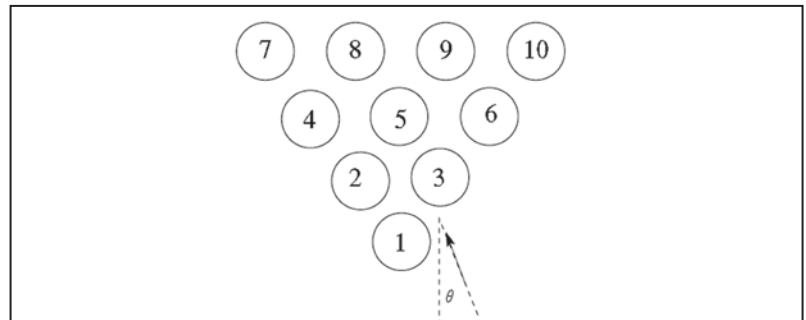
## Bowling

**Dr. Alfred Roulier, Michael Roser**



### Ausgangssituation

Der Artikel nimmt Bezug auf die Aufgabe 19/9 aus Feynman Lectures I. Es wird die Bahnkurve einer Bowlingkugel untersucht.

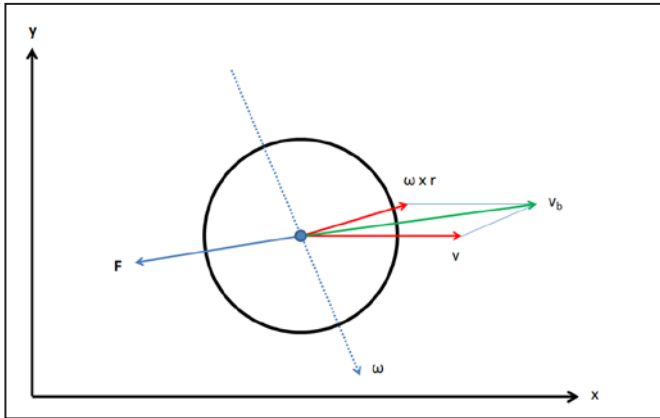


Die Empirie sagt, dass man beste Resultate erzielt, wenn die Kugel unter einem Winkel  $\theta = 6^\circ$  und ca. 12 cm seitlich einschlägt.

Dieser Winkel gelingt mit einem geraden Wurf nicht, weil die 18 m lange und 1.08 m breite Bahn keinen genügend seitlichen Abwurf zulässt.

Man muss durch Zugabe von Drall eine Bahnkurve erzeugen.

In einer ersten längeren Phase gleitet die Kugel. Hier kann man mittels Drall eine gekrümmte Bahn erzeugen. In dieser Gleitphase erzeugt die Gleitreibung einen Drehimpuls. Wenn die Drehgeschwindigkeit am Berührungspunkt die Gleitgeschwindigkeit kompensiert, wechselt die Gleit- in eine gerade Rollbewegung. Die relevanten Vektoren sind nachstehend in einer Sicht von oben dargestellt.



Die Kugel gleitet in Richtung des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}$ . Die Kugel dreht sich zusätzlich um die horizontale Achse  $\omega$ .  $\mathbf{r}$  ist der Radiusvektor vom Zentrum zum Kontaktpunkt, also senkrecht nach unten. Der Vektor  $\omega \times \mathbf{r}$  zeigt, wohin die Kugel rollen würde. Der Vektor  $\mathbf{v}_b$  zeigt Richtung und Geschwindigkeit der Kugelperipherie bei der Kontaktstelle Kugel-Bahn.

Die besprochenen Vektoren sind durch die Beziehung

$$\vec{v}_b = \vec{v} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1)$$

verknüpft. Wenn  $\vec{v}_b \neq 0$ , gleitet die Kugel, wenn  $\vec{v}_b = 0$  endet die Gleitphase und das Rollen beginnt.

Wenn die Kugel gleitet, wird sie durch Reibung gebremst. Die Reibungskraft beträgt

$$\vec{F} = -\check{v}_b \cdot m \cdot g \cdot \mu \quad (2)$$

$\check{v}_b$  ist Einheitsvektor,  $m$  die Kugelmasse,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $\mu$  Reibungskoeffizient.

### Dynamik

Aus der oben besprochenen Situation lassen sich 2 Differentialgleichungen ableiten:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = -\check{v}_b \cdot g \cdot \mu \quad (3) \quad \check{v}_b \text{ ist Einheitsvektor von } \vec{v}_b$$

#### Zeichenerklärung:



Computeralgebrasystem  
TI-89 Titanium, Voyage™ 200



Messwerterfassungssystem  
CBL 2™, CBR 2™, TI-Nspire™ Lab Cradle



Graphische Taschenrechner  
TI-82 STATS, TI-83 Plus,  
TI-84 Plus, TI-84 Plus *Silver Edition*,  
TI-84 Plus C *Silver Edition*  
TI-SmartView™ Emulator Software



TI-Nspire™ Technologie  
(GTR, CAS, Software für Schüler, Lehrer-Software, Apps für iPad®, umfangreiches Zubehör)

## Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

der Leitartikel aus der Schweiz beschäftigt sich mit der Bahnkurve einer Bowling-Kugel, mit dem Ziel möglichst gute Ergebnisse zu erreichen. Apropos gute Resultate: Die Nutzung von Technologie im Unterricht kann zu einem tieferen und breiteren Verständnis für mathematische und naturwissenschaftliche Zusammenhänge beitragen. Und natürlich spielt Ihr Engagement als Lehrkraft eine entscheidende Rolle. Die einzelnen Beiträge dieser Ausgabe zeigen erprobte Anwendungsbeispiele mit einem hohen Praxisbezug von erfahrenen Kolleginnen und Kollegen.

Natürlich möchten wir auch weiterhin Ihren Wünschen gerecht werden. Bitte teilen Sie uns daher Ihre Anregungen mit oder senden selbst Beiträge ein. Schicken Sie uns gerne zudem Ihre Erfahrungsberichte in Bezug auf einzelne TI-Nachrichten Artikel oder ganz allgemein beim Einsatz der TI-Technologie im Unterricht.

*Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.*

*Blaise Pascal – 1623–1662*

In diesem Sinne viel Vergnügen beim Lesen der Beiträge und der Umsetzung im Unterricht wünscht Ihnen

**Ihr TI-Team**

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{\theta} = \frac{5 \cdot g \cdot \mu}{2 \cdot r^2} (\vec{r} \times \check{v}_b) \quad (4) \quad \theta \text{ ist das Trägheitsmoment der Kugel, } \theta = 2/5 \cdot m \cdot r^2.$$

Wenn  $\check{v}_b$  zeitlich konstant wäre, könnten die beiden Gleichungen (3) und (4) sofort integriert werden. Nachweis, dass dies zutrifft: Aus (1) folgt

$$\frac{d\check{v}_b}{dt} = \frac{dv}{dt} + \left( \frac{d\omega}{dt} \times \vec{r} \right) = -A \cdot \check{v}_b - B \cdot \vec{r} \times (\vec{r} \times \check{v}_b) = -C \cdot \check{v}_b$$

$$A = g \cdot \mu; B = \frac{5 \cdot g \cdot \mu}{2 \cdot r^2}; C = A + B \cdot r^2 \quad (*)$$

Die zeitliche Änderung von  $\check{v}_b$  hat dieselbe Richtung wie  $\check{v}_b$  selbst, der Einheitsvektor  $\check{v}_b$  ist konstant. Somit kann man nun alle interessierenden Größen ausrechnen. Aus (3) ergibt sich

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) - A \cdot \check{v}_b \cdot t \quad (5)$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + t \cdot \vec{v}(0) - \frac{A \cdot t^2 \cdot \check{v}_b}{2} \quad (6)$$

$\check{v}_b$  erhält man aus den Anfangsbedingungen des Wurfs und ist Einheitsvektor von

$$\vec{v}_b(0) = \vec{v}(0) + (\vec{\omega}(0) \times \vec{r}) \quad (7)$$

Nach welcher Zeit T wird  $\vec{v}_b = 0$ ? In der Zeile (\*) wurde gefunden, dass

$$\frac{d\check{v}_b}{dt} = -C \cdot \check{v}_b.$$

Somit

$$\vec{v}_b = \vec{v}_b(0) - T \cdot C \cdot \check{v}_b = 0 \rightarrow T = \frac{\vec{v}_b(0)}{C \cdot \check{v}_b(0)} = \frac{2 \cdot |\vec{v}_b(0)|}{7 \cdot g \cdot \mu} \quad (8)$$

Welches ist der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  zu dieser Zeit?

$$\vec{v}(T) = \vec{v}(0) - A \cdot \check{v}_b \cdot T = \vec{v}(0) - \frac{2 \cdot \vec{v}_b(0)}{7} \quad (9)$$

Diese Analyse ist auch in anderen Situationen, z. B. beim Billard anwendbar.

### Welche Parameter führen zum Ziel?

Wir arbeiten mit den Einheiten (m, kg, s) und einem Koordinatensystem mit Ursprung in der Mitte der Abwurflinie. Die Anlagengrößen sind fest vorgegeben, nämlich Bahnlänge = 18, Bahnbreite = 1.08 (ist voll nutzbar, d.h. zwischen Bahnrand und Begrenzungswand ist eine Rinne in welche die Kugel passt), Kugelradius = .11. Dazu die Erdbeschleunigung = 9.8.

Die Berechnung der Kugelbahn enthält 6 Parameter mit folgenden Richtwerten:

- Reibungskoeffizient  $\mu = 0.15$
- Wurfgeschwindigkeit  $v_0 = 8$
- Abgangswinkel  $\alpha = -2^\circ$
- y-Abgangskoordinate  $y_0 = -.2$
- Drehgeschwindigkeit beim Abwurf  $\omega_0 = -12$
- Richtung der Drehachse  $\beta = 5^\circ$ .

Der Einfluss auf den Bahnverlauf all dieser Parameter ist komplex. Wir können ihre Anzahl jedoch auf 3 reduzieren, da der Zielpunkt  $y_z = -.12$  und der Einfallswinkel  $\theta = 6^\circ$  erreicht werden sollen:

Die Parameterform der Bahnkurve lautet gemäß Gleichung (6)

$$x(t) = a_1 t + b_1 t^2; \quad y(t) = y_0 + a_2 t + b_2 t^2$$

Somit resultieren die 3 folgenden Gleichungen, wobei tt die Zeit ist, in der die Kugel das Ziel erreicht:

$$18 = a_1 tt + b_1 tt^2;$$

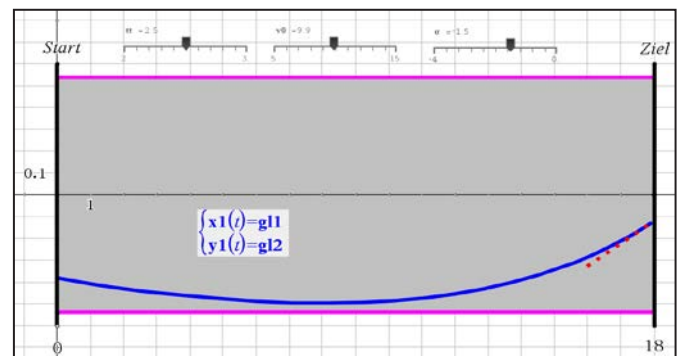
$$-.12 = y_0 + a_2 tt + b_2 tt^2;$$

$$\tan(\theta) = 0.104 = \frac{a_2 + 2 \cdot b_2 \cdot tt}{a_1 + 2 \cdot b_1 \cdot tt}$$

Dabei gilt:  $a_1 = v_0 \cdot \cos \alpha$  und  $a_2 = v_0 \cdot \sin(\alpha)$ .

Werden die Werte für tt,  $v_0$  und  $\alpha$  mit Schieberegler variabel gehalten, erhalten wir aus den 3 Gleichungen die Werte für  $y_0$ ,  $b_1$  und  $b_2$ . Da die Bahnkurve das Bahnde erreichen muss, ist damit der Wert tt auf dem Schieberegler vorgegeben und  $v_0$  und  $\alpha$  können entsprechend angepasst werden. Hier ein Beispiel:

```
tt = 2.5
v0 = 9.9
alpha = -1.5
a1:=v0*cos(alpha) = 9.897
a2:=v0*sin(alpha) = -0.2592
lsg:=zeros({{a1*tt+b1*tt^2-18,y0+a2*tt+b2*tt^2+0.12, (a2+2*b2*tt)/(a1+2*b1*tt)-0.104},{y0,b1,b2}})
=[-0.3815 -1.079 0.1455]
g11:=a1*t+lsg[1,2]*t^2 = 9.897*t-1.079*t^2
g12:=lsg[1,1]+a2*t+lsg[1,3]*t^2 = 0.1455*t^2-0.2592*t-0.3815
```



Bevor die Aussage „Ziel erreichbar“ gemacht werden kann, müssen noch die errechneten Parameter  $b_1$  und  $b_2$ , in denen der Reibungskoeffizient und der abgegebene Drall verpackt sind, überprüft werden.

Gemäß Gleichung (6) ist  $b_1 = -0.5 \cdot g \cdot \mu \cdot v_{bx}$ , also  $v_{bx} = 2 \cdot b_1/g/\mu$ . Andererseits erhalten wir  $v_{bx}$  aus Gleichung (7), wenn wir  $\omega_{0x}$  entsprechend wählen. Entsprechendes für die y-Komponenten. Tatsächlich gelingt die Übereinstimmung mit  $\mu$ -Werten um 0.22 und  $\omega$ -Werten um  $-9.5$ .

$r:=0.11$   
 $\omega=-9.5$   
 $\beta=-4^\circ$   
 $\mu=0.222$   
 $vb1:=\text{unitV}([a1 \ a2 \ 0])+\text{crossP}([\omega \cos(\beta) \ \omega \sin(\beta) \ 0],[0 \ 0 \ r])=[0.9913 \ -0.1313 \ 0]$   
 Vergleich:  $\frac{-2 \cdot \text{Isg}[1,2]}{9.8 \cdot \mu} = 0.9916$ ;  $\frac{-2 \cdot \text{Isg}[1,3]}{9.8 \cdot \mu} = -0.1338$

### Ein Bowlingsimulator

In der Praxis wird das Erreichen des Ziels  $6^\circ/0.12$  m dadurch unterstützt, dass die ersten 2/3 der Bahn geölt werden. Auf diesem Bahnteil ist der Reibungskoeffizient kleiner, die Kugel gleitet wenig gebremst und nimmt dadurch wenig Drehmoment auf. Deshalb ist die Bahnkurve kaum gekrümmt. Im letzten Drittel ist der Reibungskoeffizient größer und die Krümmung der Bahnkurve ist größer.

**Festlegen der Kenngrossen** (m,kg,s)

Kugelradius  $r:=0.11$ ; Erdbeschleunigung  $g:=9.8$ ;  
 Reibungskoeffizient1  $\mu1:=0.05$ ; Reibungskoeffizient2  $\mu2:=0.25$ ;  
 Länge der Bahn  $lb:=18$ ; Übergang von  $\mu1$  zu  $\mu2$  bei Länge  $lii:=12$ ;  
 Abgangswinkel  $\alpha:=-1.^\circ$ ;  
 Geschwindigkeitskomponenten  $vx0:=v0 \cdot \cos(\alpha) = 7.999$ ;  
 $vy0:=v0 \cdot \sin(\alpha) = -0.1396$   
 Anfangsdrehung der Kugel  $\omega0:=-14$ ; Orientierung der Drehachse  $\beta:=-4.^\circ$ ;  
 $\omega x0:=\omega0 \cdot \cos(\beta) = -13.97$ ;  $\omega y0:=\omega0 \cdot \sin(\beta) = 0.9766$ ;  
 über Schieberegler in Graphik definiert  
 Startpunkt  $yt0 = -0.29$ ;  $\Rightarrow xs:=[0 \ yt0 \ 0]$ ;  
 Anfangsgeschwindigkeit  $v0 = 8$ .;

Zuerst die Analyse des geölte Bahnteils :

**Berechnung Abschnitt 1**

Einheitsvektor der Peripheriegeschwindigkeit beim Start:  
 $vb1:=\text{unitV}([vx0 \ vy0 \ 0])+\text{crossP}([\omega x0 \ \omega y0 \ 0],[0 \ 0 \ r])=[0.9782 \ -0.2077 \ 0]$ ;  
 Parameterform der Bahnkurve im 1. Teil:  
 $xk1:=r \cdot vx0 - 0.5 \cdot r^2 \cdot vb1[1,1] \cdot \mu1 \cdot g = 7.999 \cdot t - 0.2397 \cdot t^2$ ;  
 $yk1:=xs[1,2]+r \cdot vy0 - 0.5 \cdot r^2 \cdot vb1[1,2] \cdot \mu1 \cdot g = 0.0509 \cdot t^2 - 0.1396 \cdot t - 0.29$  ;  
 Wann und wo erreicht die Kugel das Ende des Abschnitts 1 (Gleitphase 1)?  
 $t1:=\text{zeros}(xk1-lii,t)[1] = 1.575$  ;  $y1:=yk1|t=t1 = -0.3837$  |  
 $x_1:=\text{seq}(xk1,t,0,t1,\frac{t1}{500})$ ;  $y_1:=\text{seq}(yk1,t,0,t1,\frac{t1}{500})$   
 Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t1:  
 $v1:=\text{unitV}([vx0 \ vy0 \ 0])-\mu1 \cdot g \cdot vb1 \cdot t1 = [7.244 \ 0.0206 \ 0]$ ;  
 Impaktwinkel:  $\theta1:=\text{atan}(\frac{v1[1,2]}{v1[1,1]}) = 0.1633^\circ$ ;  
 Drehvektor zur Zeit t1:  
 $\omega t1:=\text{unitV}([\omega x0 \ \omega y0 \ 0])+\frac{5 \cdot g \cdot \mu1 \cdot t1}{2 \cdot r^2} \cdot \text{crossP}([0 \ 0 \ r],vb1)=[-17.61 \ -16.18 \ 0]$

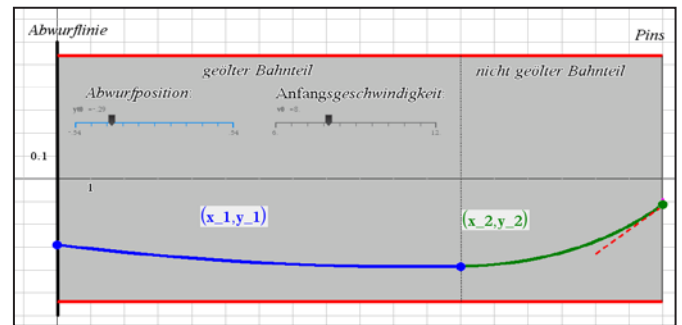
Die Kugel gleitet die ganze Zeit. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit hat wie erwartet leicht abgenommen. Die Drehgeschwindigkeit um die y-Achse hingegen hat wegen der Gleitreibung zugenommen. Nun werden die Endwerte des ersten

Abschnitts zu den Anfangswerten des zweiten:

**Berechnung Abschnitt 2**

Einheitsvektor der Peripheriegeschwindigkeit beim Start bleibt unverändert.  
 Startkoordinaten im Abschnitt 2:  $x_{t1}:=lii = 12$ ;  $y_{t1}:=y1 = -0.3837$ ;  
 Parameterform der Bahnkurve im Abschnitt 2 (Gleitphase 2):  
 $xk2:=x_{t1}+r \cdot v1[1,1] - 0.5 \cdot r^2 \cdot vb1[1,1] \cdot \mu2 \cdot g = -1.198 \cdot t^2 + 7.244 \cdot t + 12$ ;  
 $yk2:=y_{t1}+r \cdot v1[1,2] - 0.5 \cdot r^2 \cdot vb1[1,2] \cdot \mu2 \cdot g = 0.2545 \cdot t^2 + 0.0206 \cdot t - 0.3837$ ;  
 Wann erreicht die Kugel das Ende von Abschnitt 2 oder endet die Gleitphase?  
 $t2:=\text{min}(\frac{2 \cdot \text{norm}([v1[1,1] \ v1[1,2] \ 0])-\text{crossP}([\omega t1,[0 \ 0 \ r]])}{7 \cdot g \cdot \mu2}, \text{zeros}(xk2-lii,t)[1]) = 0.9906$   
 $x_2:=\text{seq}(xk2,t,0,t2,\frac{t2}{200})$ ;  $y_2:=\text{seq}(yk2,t,0,t2,\frac{t2}{200})$   
 Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t2 (Übergang Gleit-/Rollphase):  
 $v2:=\text{unitV}([v1[1,1] \ v1[1,2] \ 0])-\mu2 \cdot g \cdot vb1 \cdot t2 = [4.87 \ 0.5248 \ 0]$ ;  
 Zielcoordinate y:  $yk2|t=t2 = -0.1135$   
 Impaktwinkel:  $\theta2:=\text{atan}(\frac{v2[1,2]}{v2[1,1]}) = 6.15^\circ$

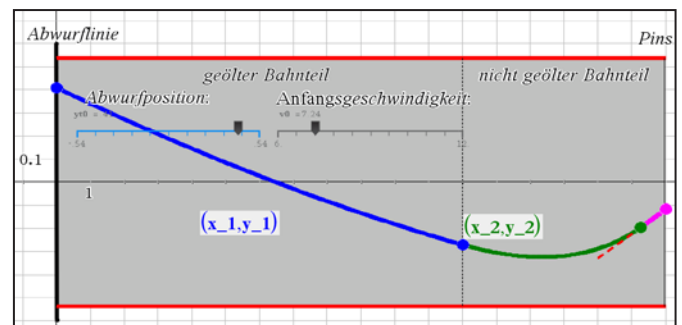
Die Kugel gleitet knapp über das Bahnde hinaus. Die Zielwerte  $6^\circ/0.12$  m werden erreicht.



Das Gleiten kann u. U. in der letzten Phase sogar in das Rollen übergehen. Wird der Abgangswinkel beispielsweise auf  $-4^\circ$  gesetzt, so kann mit den Schieberegler eine Lösung gefunden werden, in der die Kugel in der letzten Phase rollt.

**Berechnung Abschnitt 3**

Startkoordinaten im Abschnitt 2 (Rollphase):  $x_{t2}:=xk2|t=t2 = 17.27$ ;  $y_{t2}:=yk2|t=t2 = -0.1934$ ;  
 Abgangswinkel  $\alpha^\circ = -4$ .  
 $xk3:=x_{t2}+r \cdot v2[1,1] = 4.003 \cdot t + 17.27$ ;  $yk3:=y_{t2}+r \cdot v2[1,2] = 0.4185 \cdot t - 0.1934$ ;  
 Rollzeit:  $t3:=\text{right}(\text{solve}(xk3=18,t)) = 0.1818$ ;  
 $x_3:=\text{seq}(xk3,t,0,t3,\frac{t3}{200})$ ;  $y_3:=\text{seq}(yk3,t,0,t3,\frac{t3}{200})$ ;  
 Abweichung des Auftreffpunktes von der Bahnachse:  $y_{t3}:=yk3|t=t3 = -0.1173$



**Autoren:**

Dr. Alfred Roulier, Neuenegg (CH)  
 Michael Roser, Neftenbach (CH)

# Bestimmung von $\mu_0$ durch eine Schülerübung

Jürgen Enders



## Einleitung

In wohl jedem Physikkurs der SII wird die Konstante  $\mu_0$  eingeführt, meist durch entsprechende Messungen. Dazu muss man an einer langen Zylinderspule die drei Proportionalitäten  $B \sim I$ ,  $B \sim N$  und  $B \sim L^{-1}$  zeigen. Aber kann man auch mit kürzeren Spulen, etwa aus einem Aufbautransformator für Schülerübungen, arbeiten? Hier hätte man – im Gegensatz zu den großen Zylinderspulen – mehr Möglichkeiten, auch die Windungszahl  $N$  und die Spulenlänge  $L$  zu verändern, und man könnte  $\mu_0$  durch eine Schülerübung bestimmen lassen.

Nach dem Gesetz von Bio-Savart errechnet sich die Flussdichte im Zentrum einer kurzen Zylinderspule der Länge  $L$  mit dem Durchmesser  $D$  gemäß der Gleichung

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\sqrt{L^2 + D^2}}$$

Ist  $L \gg D$ , so erhält man daraus die bekannte Gleichung

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{L}$$

Für eine Abweichung von weniger als 10% sollte  $L$  deutlich größer als  $2D$  sein. Diese Bedingung ist bei den für die Demonstration vorgesehenen großen Zylinderspulen sicher gegeben, nicht aber bei den kürzeren Spulen, die zudem auch nicht zylinderförmig sind. Ein Vorversuch soll klären, ob diese Spulen dennoch geeignet sind.

## Grundsätzlicher Versuchsaufbau

Bei den nun folgenden Versuchen wurde immer derselbe Aufbau verwendet (Abb. 1). Der Magnetfeldsensor muss auf den Messbereich 6,4 mT eingestellt werden, bevor man ihn mit der LabCradle verbindet. Er zeigt dann einen Wert an, der von seiner Orientierung im Raum abhängt. Deshalb darf der Sensor bei allen weiteren Messungen nicht mehr bewegt werden. Er muss ferner vor den Messungen im **[menu]** auf Null gesetzt werden (Abb. 2).

Der Sensor wird vorsichtig in einer Muffe festgeschraubt und die Muffe mit etwas doppelseitigem Klebeband auf dem Tisch fixiert. Die zweite Schraube der Muffe wird entfernt, um die Messungen nicht zu behindern. Parallel zum Magnetfeldsensor wird ein Maßstab ebenfalls mit doppelseitigem Klebeband fixiert. Er dient als Anschlag zum Ausrichten der Spule. Als Stromversorgung habe ich ein Gerät genommen, das auch als Konstantstromquelle dienen kann und eine genaue Digitalanzeige hat, so dass ich auf ein Amperemeter verzichten kann und bei Änderung der Spulenparameter nicht nachregeln muss. Natürlich kann auch eine Kombination aus einem einfachen Netzgerät, das auf jeden Fall eine geglättete Ausgangsspannung haben muss, und einem externen Amperemeter verwendet werden.

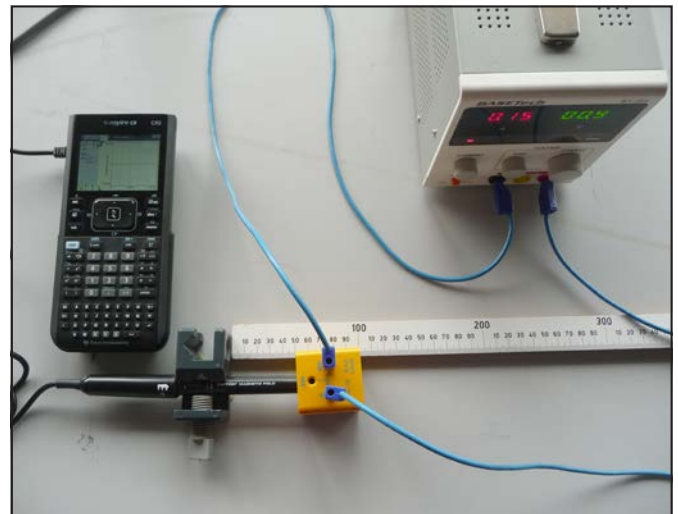


Abb. 1

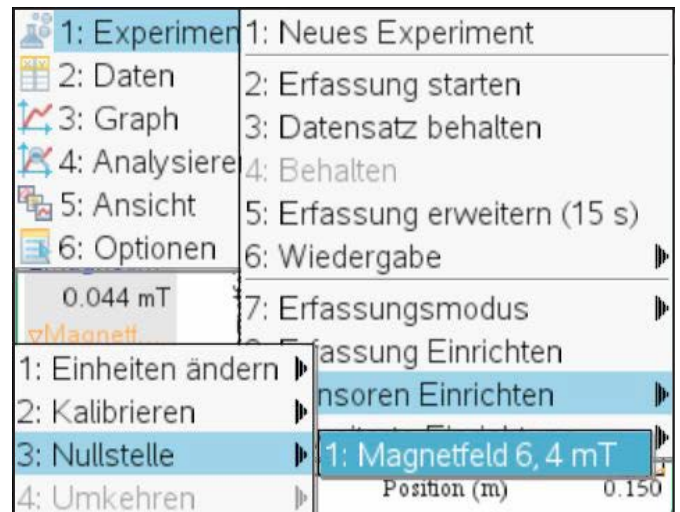


Abb. 2

## Vorversuch: Position des Sensors in der Spule

Im Vorversuch wird der axiale Verlauf des Magnetfeldes in der Spule ausgemessen. Dazu wird der Aufbau noch ergänzt um den Ultraschallsensor CBR 2 und ein steifes Stück Papier, das als Reflektor wieder mit doppelseitigem Klebeband an der Spule befestigt wird (Abb. 3). Der CBR 2 muss auf einer Unterlage von ca. 5 cm Höhe stehen, um störende Reflexe der Tischoberfläche zu unterbinden. Über „Experiment – Experiment einrichten“ wird die Messzeit auf 10 s verkürzt, aber alle anderen Werte werden so gelassen (Abb. 4). Dann wird die Spule ganz nach links geschoben, so dass der Sensor aus der Spule rechts herausragt (Abb. 3). Nach dem Starten der Messung (Start-Button: weißes ► in grünem Feld) wird die Spule am Maßstab entlang nach rechts verschoben, bis die Spule wieder ein Stück vom Sensor entfernt ist. Man erhält die untere dunkle Kurve aus Abb. 5. Verwendet wurde eine Spule mit 600 Windungen bei einem Strom von 0,15 A.

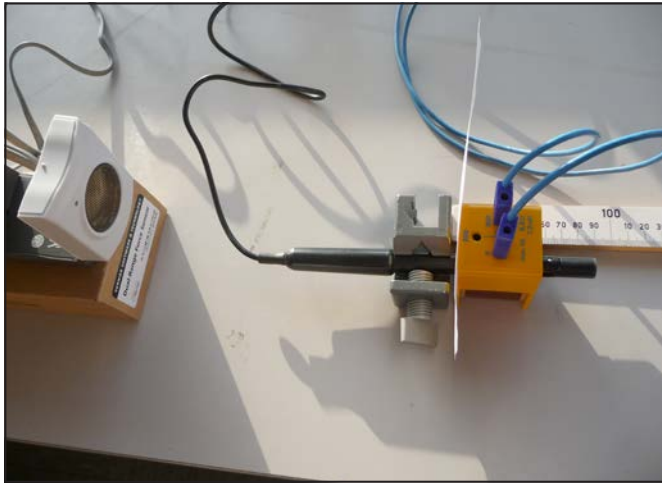


Abb. 3

Für die praktische Durchführung bedeutet dieses Ergebnis, dass man  $\mu_0$  mit einer Genauigkeit von 10%–15% bestimmen kann, wenn sich der Sensor in der Mitte der Spule befindet. Die obere, hellere Kurve zeigt den Verlauf der Flussdichte bei zwei hintereinander geschalteten Spulen und anderer Stromstärke. Auch hier wird das Maximum an derselben Stelle in der Spule erreicht, so dass man die einmal gefundene Position des Sensors beibehalten kann. Deutlich zu erkennen ist der Einbruch der Flussdichte an der Stelle, wo die Spulen aneinander stoßen.

Im Vorversuch verschiebt man also die Spule langsam und beobachtet die Flussdichte. Ist der Sensor in der Mitte des Bereiches maximaler Flussdichte angekommen, so kann man sich am Maßstab die Position der Spule merken, die dann für alle weiteren Versuche beibehalten wird. Der Vorversuch ist notwendig, da man im Laufe der Versuche die Spulen wechseln muss und die genaue Position des Hallgenerators im Sensor nicht markiert ist.

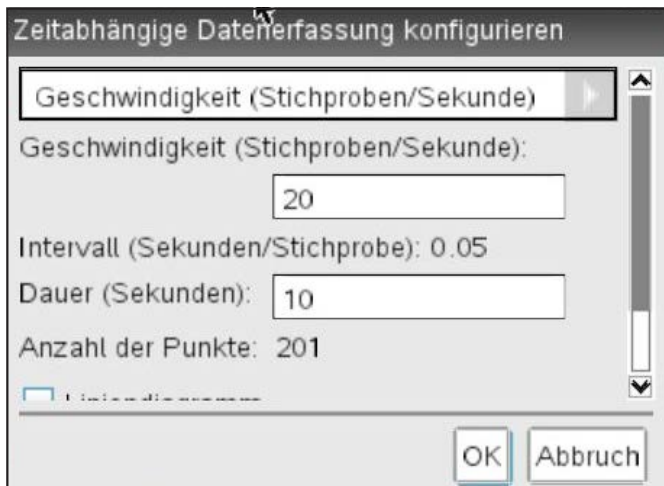


Abb. 4

## Die Hauptversuche

### Einstellungen

Alle 3 Versuche werden als verschiedene Durchläufe („run“) innerhalb einer Messreihe durchgeführt. Für alle wurde im **menu** der Erfassungsmodus „Ereignisse mit Eingabe“ gewählt (Abb. 6). Die Vorgabe „Ereignis“ wurde neutral mit „Wert“ ohne Einheiten überschrieben, da diese Einstellungen für alle Durchläufe gleich bleiben. Der Haken bei „Durchschnitt über 10s“ (Abb. 7) sollte unbedingt gesetzt werden, um bessere Werte für B zu bekommen, da hier automatisch der Mittelwert von vielen Messungen gebildet wird.

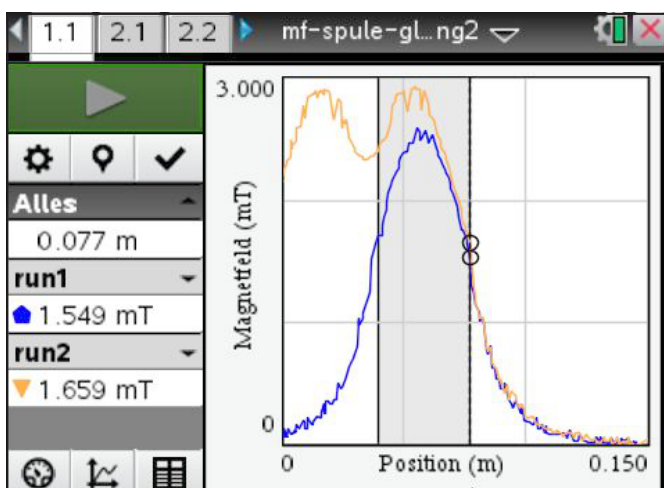


Abb. 5

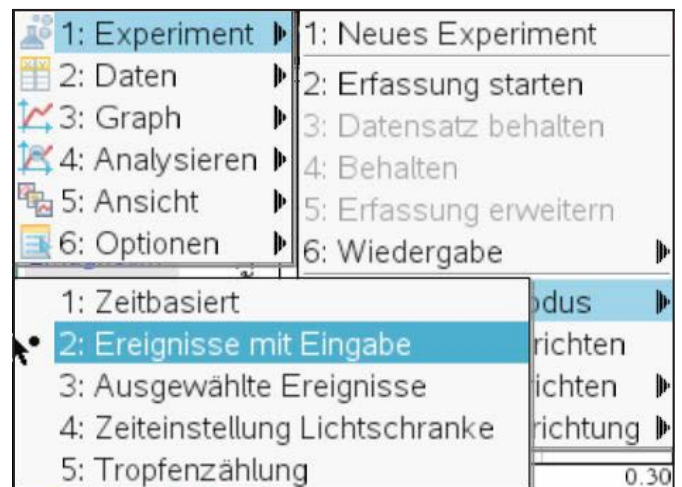


Abb. 6

Der grau hinterlegte Bereich entspricht der Länge der Spule. Es kann also nicht von einem homogenen Feld ausgegangen werden. In einem ca. 5 mm breiten Bereich werden maximal Werte um 2,55 mT erreicht; das sind 88% des nach der üblichen Formel zu erwartenden Wertes von 2,9 mT.

# Bestimmung von $\mu_0$ durch eine Schülerübung

Jürgen Enders

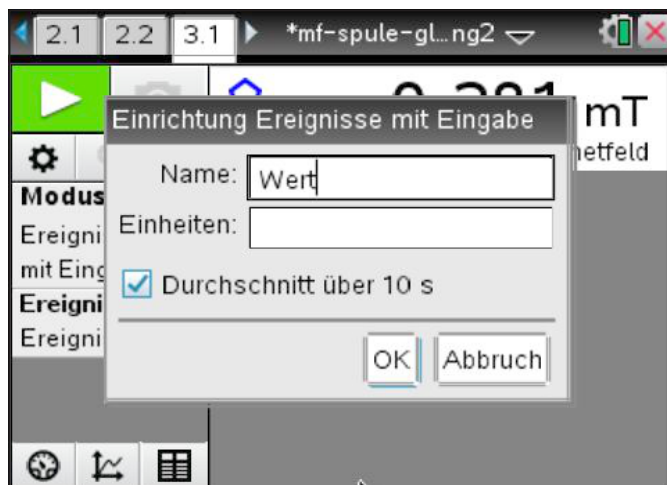


Abb. 7

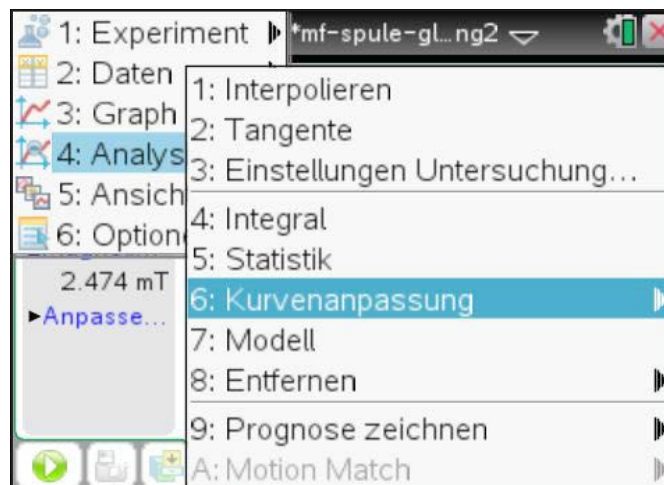


Abb. 10

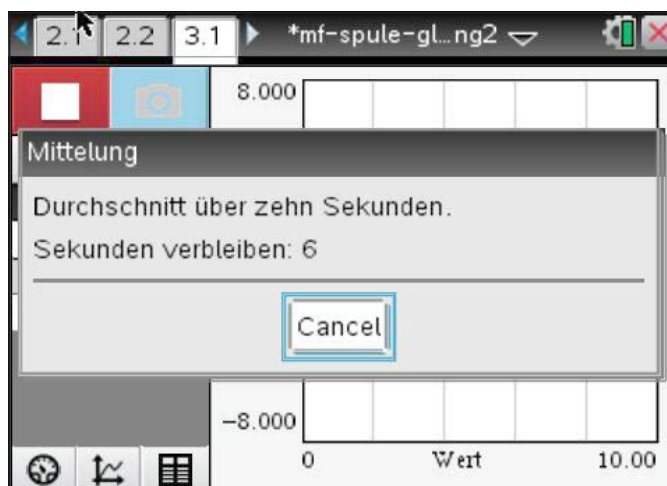


Abb. 8

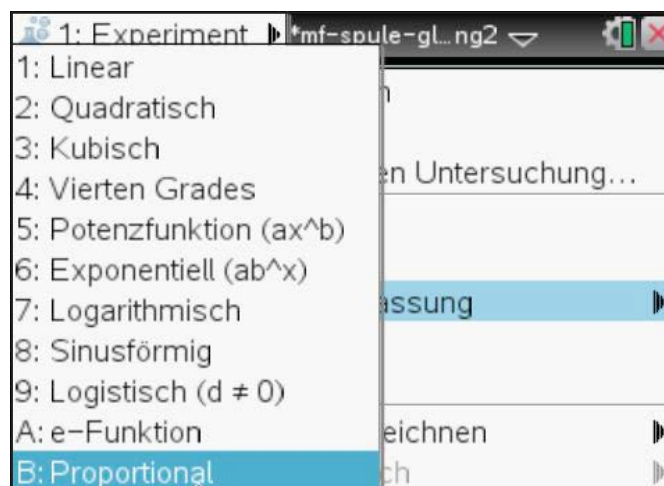


Abb. 11



Abb. 9

Die einzelne *Messreihe* wird mit dem weißen ► im grünen Feld links oben gestartet. Während die Messreihe läuft, hat sich der Button in ein weißes Quadrat auf rotem Grund verwandelt, den Stopp-Button. Soll dann ein Messwert aufgenommen werden, so muss der Button unmittelbar daneben (der „Photoapparat“) gedrückt werden. Ein Countdown läuft (Abb. 8), und am Ende wird man aufgefordert, den externen Wert einzugeben (Abb. 9). Nach der Bestätigung mit „ok“ kann eine neue Messung gemacht werden. Während der ganzen Messung wird der Messwert als vertikal bewegter Punkt mit angezeigt. Soll die Messreihe gespeichert werden, so beendet man sie durch Drücken des Stopp-Buttons und drückt anschließend den dritten Knopf in der Reihe darunter, den „ok“-Haken. Automatisch wird dann ein neuer „run“ angelegt.

Die Abb. 10 und 11 zeigen die Menüs für die anschließende grafische Auswertung, die ebenfalls wieder über **menu** zu erreichen sind.

## Die Versuche

1.  $B \sim I$   
 Strom  $I$  im Abstand von 0,05 A  
 $N = 600$  Windungen  
 $L = 0,038$  m  
 Proportionale Regression  
 $a = B/I = 16,74$  mT/A  
 Messbereich des Sensors nicht überschreiten!

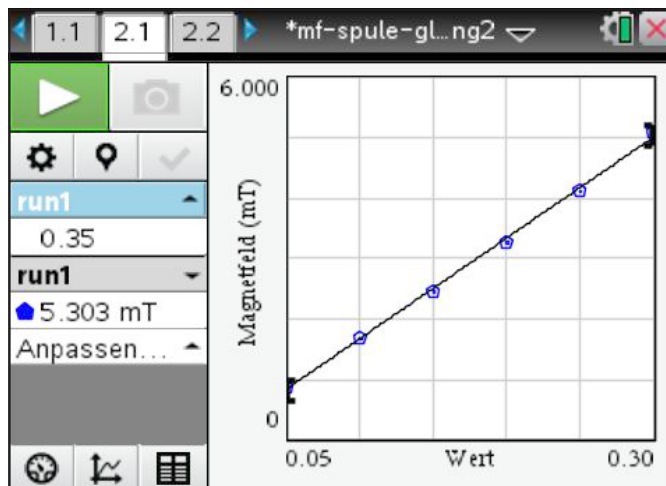


Abb.12

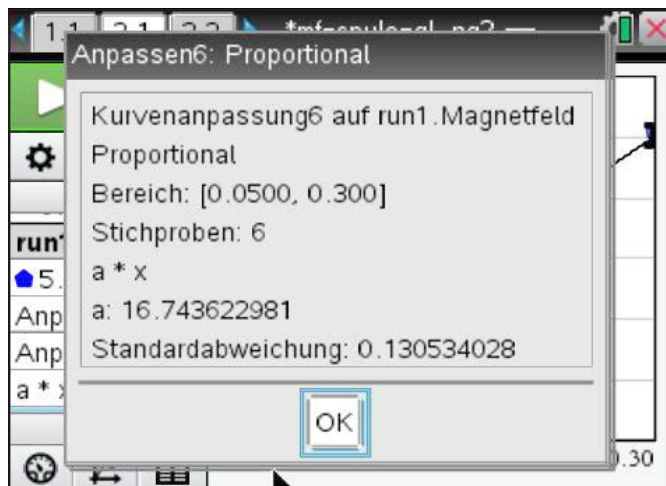


Abb.13

2.  $B \sim N$   
 Mit 2 Spulen mit Mittenanzapfung ließen sich 5  
 Windungszahlen realisieren:  
 $N = 200 - 400 - 600 - 800 - 1200$  Windungen  
 $I = 0,15$  A  
 $L = 0,038$  m  
 Proportionale Regression  
 $a = B/N = 0,004413$  mT

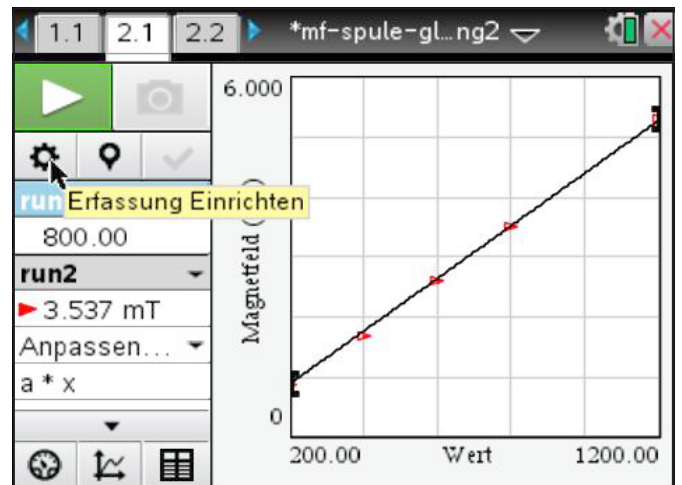


Abb.14

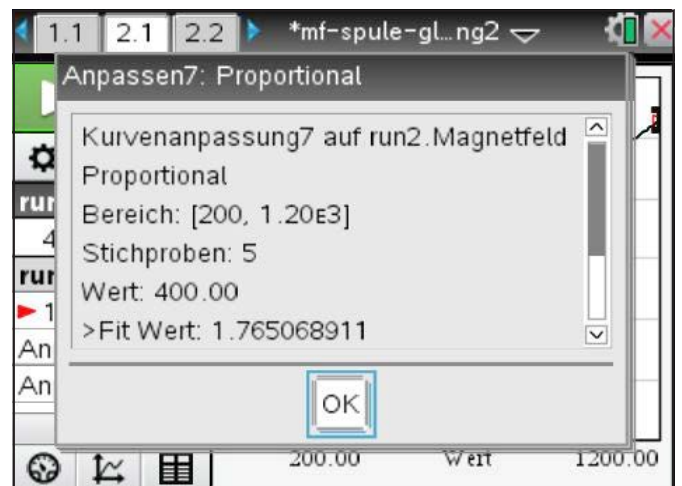


Abb.15

3.  $B \sim L^{-1}$   
 Die Spulenkombinationen 1x1200, 2x600, 3x400 und 6x200  
 ergeben vier Längen:  
 $L = 0,038 - 0,078 - 0,128 - 0,258$  m  
 $N = 1200$   
 $I = 0,15$  A

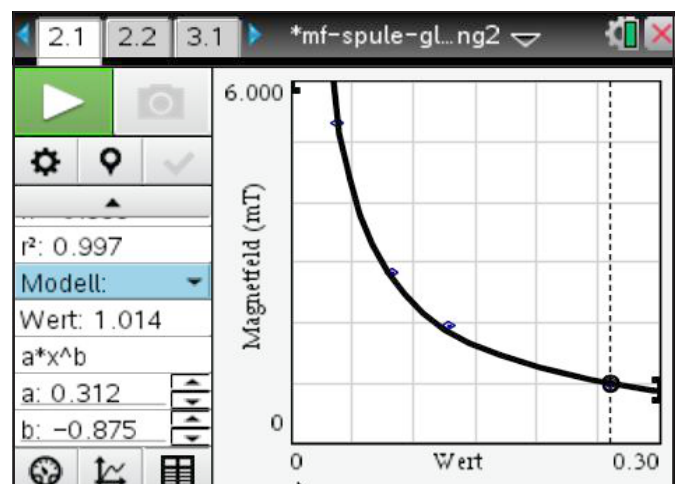


Abb.16



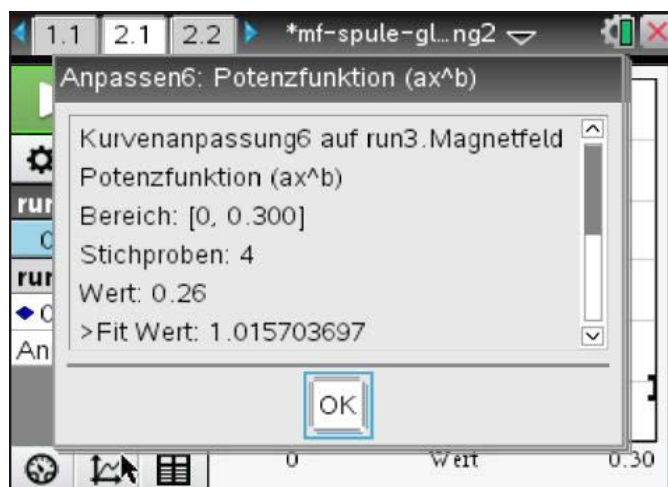


Abb.17

Die Potenzregression ergibt den schlechten Exponenten  $-0,875$  (Abb. 16 und 17). Deshalb wurde mit dem Modell  $a \cdot x^b$  (Auswahl s. Abb. 10 „Modell“) eine manuelle Anpassung mit  $b = -1$  vorgenommen (Abb. 18 und 19).  
 $a = B \cdot L = 0,242 \text{ mT} \cdot \text{m}$

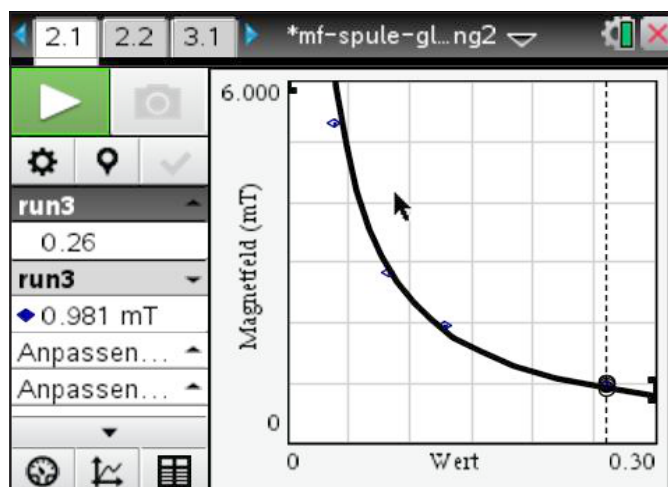


Abb.18

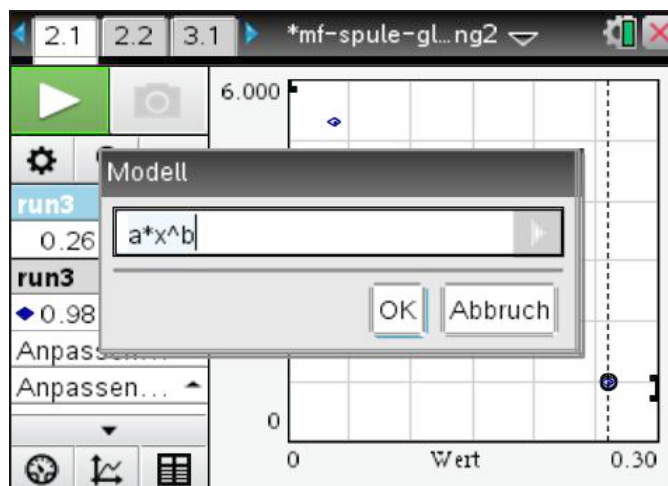


Abb.19

## Auswertung

In der Tabelle sind die Daten für die einzelnen Versuche noch einmal zusammengestellt. Die magnetische Feldkonstante wurde für jeden Versuch berechnet mit der Gleichung

$$\mu_0 = \frac{B \cdot L}{N \cdot I}$$

	a	N	I	L	$\mu_0$ in Vs/Am	Abweichung
B ~ I	16,74 mT/A	600	---	0,038 m	$1,06 \cdot 10^{-6}$	16 %
B ~ N	0,004413 mT	---	0,15 A	0,038 m	$1,12 \cdot 10^{-6}$	11 %
B ~ L <sup>-1</sup>	0,242 mT·m	1200	0,15 A	---	$1,34 \cdot 10^{-6}$	6 %
Mittelwert:					$1,17 \cdot 10^{-6}$	7 %

Die ermittelten Werte für  $\mu_0$  weichen unterschiedlich stark vom Literaturwert ab. Bildet man den Mittelwert, so ist die Abweichung mit 7% aber nur gering – eine Scheingenauigkeit, denn im Mittelwert weichen die 3 Messungen ca. 11% vom Literaturwert ab, ein Wert, der durch die Voruntersuchung zu erwarten war. Nimmt man diese prinzipielle Ungenauigkeit in Kauf, so eignet sich die vorgestellte Schülerübung durchaus, um die Gleichung für das Magnetfeld einer langen Zylinderspule zu bestätigen.

## Autor:

Jürgen Enders, Bad Pyrmont (D)

**Eine App. Die ganze Mathematik.**

TI-Nspire™ App für iPad® und TI-Nspire™ CAS App für iPad®. Ideal für Schule und Hochschule, zu Hause und unterwegs! Die TI-Nspire™ App für iPad® bietet vollen Leistungsumfang bei mobilem Einsatz. Die innovative TI-Nspire™ Technologie vereint unterschiedliche Applikationen zur dynamischen Geometrie, Statistik, Tabellenkalkulation oder auch Textverarbeitung in einer interaktiven Lösung. Tauschen Sie über die App Ihre Dokumente mit anderen via E-Mail, iTunes® oder Dropbox aus. So erkunden Sie die Mathematik ganz neu.

# Listenverarbeitung

Hansruedi Schneider



Definiert man analog zum Mengenbegriff die Aneinanderreihung von beliebigen Objekten zu einem neuen Ganzen als Liste, erhält man den universellen Datentyp der Liste mit dem sämtliche Datenstrukturen modelliert werden können. Viele Programmiersprachen sind über dem Fundament der Listenstruktur aufgebaut. Allen voran LISP, ihr „Kind“ LOGO aber auch LUA! Die Modellierung einer Datenstruktur in einer dieser Sprachen geschieht dann über ein beliebig kompliziertes Gebilde von Listen, die selber wieder Listen als Elemente enthalten können. Somit ist einleuchtend, dass das wichtigste Werkzeug im Umgang mit Listen die Rekursion ist. Die Idee zu diesem Artikel stammt aus der LOGO-Programmierung. Die grundlegenden Aspekte der Listenverarbeitung mit Rekursion können aber auch sehr schön mit dem TI-Nspire™ gezeigt werden.

Der von TI-Nspire™ angebotene Datentyp der Liste entspricht der eindimensionalen Arraystruktur, deren Indizierung stets mit 1 beginnt und deren Komponenten wahlweise Zahlen, Zeichenketten oder Rechenausdrücke sein dürfen. Eine Liste kann also selbst keine Liste als Element enthalten. Weiter werden für das Einfügen oder das Entfernen von Elementen aus einer Liste, sowie für andere nützliche Manipulationen keine einfachen, systemdefinierten Funktionen angeboten. In diesem Artikel wird deshalb zuerst ein Satz von grundlegenden Funktionen zur Verarbeitung von TI-Listen vorgestellt und deren Implementierung gezeigt.

Dann werden allein mit diesen Funktionen weitere Routinen für den erweiterten Zugriff, für das Arbeiten mit Mengen und allgemeiner für das Arbeiten mit „Familien“ programmiert. Weiter werden im Folgenden nur Listen mit (endlich vielen) natürlichen Zahlen betrachtet. Grundsätzlich gelten aber alle Überlegungen auch für Listen mit beliebigen Zahlen und Zeichenketten als Elemente.

## Grundbefehle – der Werkzeugkasten

<b>count</b>	Gibt die Anzahl Elemente einer Liste zurück. Beispiel: $count(\{1, 4, 2\}) \Rightarrow 3$
<b>empty</b>	Gibt für eine Liste true zurück, falls diese leer ist, andernfalls wird false zurückgegeben. Beispiel: $empty(\{ \}) \Rightarrow true$
<b>first, last</b>	Berechnet für eine Liste ihr erstes bzw. letztes Element. Beispiele: $first(\{1, 2, 4\}) \Rightarrow 1$ , $last(\{1, 2\}) \Rightarrow 2$ , $first(\{ \})$ , $last(\{ \})$ geben beide „Liste ist leer!“ zurück.
<b>butfirst, butlast</b>	Gibt die Liste ohne ihr erstes bzw. letztes Element zurück. Beispiele: $butfirst(\{6, 4, 7\}) \Rightarrow \{4, 7\}$ , $butlast(\{6, 4, 7\}) \Rightarrow \{6, 4\}$ , $butfirst(\{ \}) \Rightarrow \{ \}$
<b>join</b>	Verknüpft zwei Argumente zu einer Liste, die Argumente dürfen wahlweise vom Typ Zahl oder Liste sein. Beispiele: $join(\{2, 3\}, \{3, 2\}) \Rightarrow \{2, 3, 3, 2\}$ , $join(1, \{1\}) \Rightarrow \{1, 1\}$ , $join(\{2, \{3, 4\}\}) \Rightarrow \{2, 3, 4\}$ und $join(3, 4) \Rightarrow \{3, 4\}$

In Anlehnung an LOGO nennen wir die Funktion zur Bestimmung der Anzahl Elemente einer Liste **count**. Diese ist bereits im Catalog vom TI-Nspire vorhanden und bewirkt bei Verwendung mit einem Argument dasselbe wie die Funktion **dim**.

Nachfolgend sind die Vereinbarungen von **last**, **butfirst** und **join** wie sie im Programmeditor eingegeben werden müssen, aufgeführt.

Auf die Erläuterung von **first** und **butlast** wird hier verzichtet, da sie sich von **last** und **butfirst** nur unwesentlich unterscheiden.

### Beispiele

Variieren Sie die Parameter:

$count(\{0, 1, 2, 3, 5, 7\}) \triangleright 6$

$empty(\{2, 3, 4\}) \triangleright false$

$first(\{7, 2, 3, 4, 6, 4\}) \triangleright 7$

$last(\{7, 2, 3, 4, 6, 4\}) \triangleright 4$

$butfirst(\{7, 2, 3, 4, 6, 4\}) \triangleright \{2, 3, 4, 6, 4\}$

$butlast(\{7, 2, 3, 4, 6, 4\}) \triangleright \{7, 2, 3, 4, 6\}$

$join(\{2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}) \triangleright \{2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 5, 7\}$

Abb. 1

Bei der Behandlung des Themas im Unterricht, empfehle ich, den „Werkzeugkasten“ als „black box“ abzugeben und den Fokus auf das rekursive Programmieren zu richten.

```

Define last(liste)=
Func
Local res
If not empty(liste) Then
  res:=liste[dim(liste)]
Else
  res:="Liste ist leer!"
EndIf
Return res
EndFunc
    
```

Abb. 2

```

Define butfirst(liste)=
Func
  Local res,k
  If empty(liste) Then
    res:=liste
  Else
    res:=newList(dim(liste)-1)
    For k,1,dim(res)
      res[k]:=liste[k+1]
    EndFor
  EndIf
  Return res
EndFunc
    
```

Abb. 3

```

Define join(l1,l2)=
Func
  If getType(l1)≠"LIST" Then
    l1:={l1}
  EndIf
  If getType(l2)≠"LIST" Then
    l2:={l2}
  EndIf
  Return augment(l1,l2)
EndFunc
    
```

Abb. 4

Alle weiteren Funktionen zur Listenverarbeitung werden nun ausschliesslich mithilfe der Funktionen des Werkzeugkastens, d.h. mit **count**, **empty**, **first**, **last**, **butfirst**, **butlast** und **join** programmiert.

### 1. Funktionen für erweiterten Zugriff auf Listen

Die bool'sche Funktion **member**(x,liste) soll feststellen, ob die Zahl x in der Liste liste enthalten ist. **member** lässt sich direkt in einer Notes-Seite definieren:

**Definition:**

**member**(x,liste):=when(empty(liste),false,  
when(x=first(liste),true,member(x,butfirst(liste))))

Beispiele, Variieren Sie die Parameter:

**member**(4,{1,2,3,4,5,6}) ▶ true

Abb. 5

**member** arbeitet rekursiv: Ist die Liste leer, befindet sich das Element nicht in der Liste und es wird **false** zurückgegeben („Rekursionsanker 1“). Andernfalls hat die Liste ein erstes Element. Ist dieses gleich dem gesuchten Element wird **true** zurückgegeben („Rekursionsanker 2“).

Andernfalls wenden wir das bis hierhin vorgestellte Verfahren auf das gesuchte Element und die Liste ohne ihr erstes Element an (Rekursion). Da die Liste bei jedem Aufruf um ein Element kleiner wird, braucht die Funktion höchstens so viele Berechnungsschritte, wie die ursprüngliche Liste Elemente hat. Obwohl die Definition auch in einer Notes-Seite möglich ist, empfiehlt es sich zur besseren Übersicht, die Funktionen im Programmeditor zu schreiben. An Stelle der **when**-Funktionen treten **if**-Anweisungen. Weiter verwenden wir eine lokale Variable **res**, in welcher das Resultat berechnet wird und in der letzten Zeile jeweils mit **return res** zurückgegeben wird.

**first** und **last** „lesen“ das erste bzw. letzte Element einer Liste. Wir programmieren nun die Verallgemeinerung von **first** und **last**, welche erlaubt ein Listenelement aufgrund seiner Nummer (= Index) herauszulesen:

**item**(nr,liste) gibt den Wert des Elements mit Index nr zurück. Falls nr ein ungültiger Index ist wird die Zeichenkette „nr. Listenelement existiert nicht!“ zurückgegeben.

```

Define item(nr,liste)=
Func
  Local res
  If empty(liste) or nr<1 Then
    res:=string(nr)&" . Listenelement existiert nicht!"
  ElseIf nr=1 Then
    res:=first(liste)
  Else
    res:=item(nr-1,butfirst(liste))
  EndIf
  Return res
EndFunc
    
```

Abb. 6

Die Funktion **member** prüft nur, ob ein Element in der Liste ist. Mit demselben Aufwand könnte an Stelle des Rückgabewerts **true** der Index des Elements (1,2,3,...,n) und bei **false** der Wert n+1 zurückgegeben werden. Dies realisieren wir mit der Hilfsfunktion **pos**(x,liste). Den Wert Listenlänge+1 bei nicht Vorkommen zurückzugeben, ist unpraktisch. Besser ist es, den Rückgabewert 0 zu verwenden.

**itemnr**(x,liste) gibt den Index des ersten Vorkommens von x in liste zurück. Falls x nicht vorkommt wird 0 zurückgegeben.

```

Define pos(x,liste)=
Func
  Local res
  If empty(liste) or first(liste)=x Then
    res:=1
  Else
    res:=1+pos(x,butfirst(liste))
  EndIf
  Return res
EndFunc
    
```

Abb. 7

```

Define itemnr(x,liste)=
Func
  Local res
  res:=pos(x,liste)
  If res>count(liste) Then
    res:=0
  EndIf
  Return res
EndFunc
    
```

Abb. 8

Eine weitere wichtige Funktion der Listenverarbeitung ist das Entfernen eines Elements mit gegebenem Index. Diese „Arbeit“ übernimmt die Funktion **butitem**(*nr*,*liste*).

Beispiel:

**butitem**(3,{5,3,7,4}) berechnet {5,3,4}. **butitem** ist die Verallgemeinerung von **butfirst** bzw. **butlast**: **butfirst**(*liste*) entspricht **butitem**(1,*liste*), **butlast**(*liste*) entspricht **butitem**(*count*(*liste*),*liste*).

```

Define butitem(nr,liste)=
Func
  Local res
  If empty(liste) or nr<1 Then
    res:=liste
  ElseIf nr=1 Then
    res:=butfirst(liste)
  Else
    res:=join(first(liste),
      butitem(nr-1,butfirst(liste)))
  EndIf
  Return res
EndFunc
    
```

Abb. 9

## 2. Mengenoperationen

Nach Cantor ist eine Menge eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Dingen zu einem neuen Ganzen. Demnach ist eine Liste in unserem Sinne eine Menge, wenn jedes Element genau einmal enthalten ist. Wir benötigen deshalb zuerst eine Funktion, welche aus einer Liste eine Menge macht: **menge**(*liste*) entfernt aus einer Kopie von *liste* die „doppelt“ vorkommenden Elemente. Wiederum wird das Problem mittels Rekursion gelöst:

Ist *liste* leer, so wird die leere Liste zurückgegeben (Rekursionsanker). Andernfalls wird geprüft, ob **first**(*liste*) in **butfirst**(*liste*) liegt. Wenn ja, kommt **first**(*liste*) im Rest nochmals vor und es wird deshalb **menge**(**butfirst**(*liste*)) zurückgegeben (Rekursion 1). Andernfalls müssen wir **first**(*liste*) für die Rückgabe beachten, wir geben deshalb **join**(**first**(*liste*),**menge**(**butfirst**(*liste*))) zurück (Rekursion 2).

```

Define menge(liste)=
Func
  Local res
  If empty(liste) Then
    res:=liste
  ElseIf member(first(liste),butfirst(liste)) Then
    res:=menge(butfirst(liste))
  Else
    res:=join(first(liste),menge(butfirst(liste)))
  EndIf
  Return res
EndFunc
    
```

Abb. 10

Für die nun folgenden Funktionen zur Implementation der Mengenoperationen setzen wir voraus, dass die beteiligten Operanden Mengen sind. Die Vereinigung von zwei Mengen kann ganz einfach in einer Notes-Seite vereinbart werden:

```

Definition:
union(mg1,mg2):=menge(join(mg1,mg2))

Beispiele. Variieren Sie die Parameter:
union({0,2,4,6,8},{1,2,3,4,5,6}) = {0,8,1,2,3,4,5,6}
    
```

Abb. 11

Zur Berechnung des Durchschnitts bzw. der Differenz zweier Mengen nehmen wir wieder die bewährte Rekursion zur Hilfe. Tipp: Strukturieren Sie die *if*-Anweisungen so, dass die einfachen Teilprobleme (die Rekursionsanker!) zuerst erledigt werden. Die schwierigen Teilprobleme lösen sich mit Rekursion oft „wie von selbst“.

```

Define section(a,b)=
Func
  Local res
  If empty(a) or empty(b) Then
    res:={}
  ElseIf not member(first(a),b) Then
    res:=section(b,butfirst(a))
  Else
    res:=join(first(a),section(b,butfirst(a)))
  EndIf
  Return res
EndFunc

Define difference(a,b)=
Func
  Local res
  If empty(a) Then
    res:=a
  ElseIf member(first(a),b) Then
    res:=difference(butfirst(a),b)
  Else
    res:=join(first(a),difference(butfirst(a),b))
  EndIf
  Return res
EndFunc
    
```

Abb. 12

Abschliessend zum Exkurs über Mengen geben wir die Funktion zum Prüfen der Gleichheit von zwei Mengen:

```

Definition:
mgleich(a,b):=empty(difference(union(a,b),section(a,b)))

Beispiele, Variieren Sie die Parameter:
mgleich({0,2,4,6,8},{8,2,4,6,0,8}) ▶ true
    
```

Abb. 13

### 3. Kategorien

Die vorgestellten Funktionen für Mengen lassen sich leicht auf beliebige Listen von natürlichen Zahlen erweitern. Wir bezeichnen im Folgenden eine ungeordnete Liste von natürlichen Zahlen als Kategorie, wohl wissend, dass dieser Begriff weit über unsere Listen hinausgeht. In einer Kategorie darf ein Element mehrfach vorkommen. Weiter: Zwei Kategorien sind gleich, wenn sie in allen Elementen und deren Vielfachheiten übereinstimmen. Die folgenden Beispiele sollen die Verallgemeinerung von **union**, **section** und **difference** für Kategorien veranschaulichen:

```

Beispiele
Variieren Sie die Parameter:

vereinigung({0,3,7},{2,3,4,7}) ▶ {0,3,7,2,3,4,7}

durchschnitt({0,3,3,7,0,2},{2,3,4,5,3}) ▶ {3,3,2}

differenz({0,1,2,4,3,0},{2,3,4,5}) ▶ {0,1,0}
    
```

Abb. 14

Dabei entspricht **vereinigung** der Funktion **join**.

Zur Implementation von **durchschnitt** und **differenz** benötigen wir die Funktionen **itemnr** und **butitem**:

```

Define durchschnitt(a,b)=
Func
  Local res,nr
  If empty(a) or empty(b) Then: res:={} 
  Else
    nr:=itemnr(first(a),b)
    If nr=0 Then: res:=durchschnitt(butfirst(a),b)
    Else
      res:=join(first(a),
        durchschnitt(butfirst(a),butitem(nr,b)))
    EndIf
  EndIf: Return res
EndFunc
    
```

Abb. 15

```

Define differenz(a,b)=
Func
  Local nr,res
  If empty(a) Then: res:={ } 
  Else
    nr:=itemnr(first(a),b)
    If nr=0 Then
      res:=join(first(a),differenz(butfirst(a),b))
    Else
      res:=differenz(butfirst(a),butitem(nr,b))
    EndIf
  EndIf: Return res
EndFunc
    
```

Abb. 16

Die Gleichheit zweier Kategorien kann ähnlich wie die Mengengleichheit durch einen Ausdruck mit den Funktionen **vereinigung**, **durchschnitt** und **differenz** geprüft werden:

```

Definition:
kgleich(a,b):=empty(differenz(differenz(vereinigung(a,b),
durchschnitt(a,b)),durchschnitt(a,b)))

Beispiele, Variieren Sie die Parameter:
kgleich({2,1,6,6},{1,2,6}) ▶ false
    
```

Abb. 17

Erklärung:

Gilt  $a = b$ , so ist **durchschnitt(a,b) = a = b**. **vereinigung(a,b)** enthält jedes Element von  $a (= b)$  mit doppelter Vielfachheit. „Subtrahiert“ man zweimal **durchschnitt(a,b)**, also  $a$  bzw.  $b$ , so bleibt die leere Liste zurück. Es ist leicht einsehbar, dass für  $a$  verschieden von  $b$  der Term nicht leer sein kann. **kgleich** ist nicht sehr effizient! Besser verwendet man eine eigens für diesen Zweck programmierte Funktion:

```

Define equals(i1,i2)=
Func
  Local res,nr
  If empty(i1) and empty(i2) Then
    res:=true
  ElseIf not empty(i1) and not empty(i2) Then
    nr:=itemnr(first(i1),i2)
    If nr>0 Then
      res:=first(i1)-item(nr,i2)
      and equals(butfirst(i1),butitem(nr,i2))
    Else
      res:=false
    EndIf
  Else
    res:=false
  EndIf
  Return res
EndFunc
    
```

Abb. 18

#### Quellen:

Helmut Schauer: *LOGO jenseits der Turtle*, Springer (Kapitel 5: Listenverarbeitung)



Hansruedi Schneider, St. Gallen (CH)

# Verstehensorientierter Unterricht mit Blick auf die neue Reifeprüfung in Österreich

Gertrud Aumayr



„Aufgaben zum Lernen“ sollten sich deutlich von „Aufgaben zum Leisten“ unterscheiden. Während bei „Aufgaben zum Lernen“ Motivation durch spannende Aufgaben, explorativer Umgang mit eigenen Fehlern, Entdecken von eigenen Lösungswegen, Kooperation und Kommunikation im Fokus stehen können, orientieren sich „Aufgaben zum Leisten“ auf Fehlervermeidung, Einzelleistung und Auswertbarkeit. Die Reaktion auf die neue Reifeprüfung in Österreich kann daher nicht ein reines Training von Multiple Choice Aufgaben sein. Technologie spielt bei den „Aufgaben zum Lernen“ eine hervorzuhebende Rolle. Schüler nutzen dieses Werkzeug zum Experimentieren, d.h. sie variieren gezielt Größen und beobachten die Auswirkungen ihres Handelns, zum Exaktifizieren und zum Anwenden.

Im Folgenden werden spannende „Aufgaben zum Lernen“ vorgestellt und Verbindungen zu bereits veröffentlichten Musteraufgaben der zentralen Reifeprüfung hergestellt. Die Ausarbeitungen erfolgen mit TI-Nspire™.

## 1. Einleitung

Eine große Gefahr durch die neue Reifeprüfung besteht darin, dass sich der Unterricht verändert hin zum Eintrainieren von Prüfungsaufgaben, insbesondere der Multiple Choice Aufgaben, die im Teil 1 der neuen Reifeprüfung in Österreich vorgesehen sind. Ein reines Training dieser Aufgaben wird aber weder das Verständnis bzw. die Freude und das Interesse der Schüler an der Mathematik fördern, noch wird es die Begeisterung der Lehrer am Unterrichten vergrößern.

Wichtig ist daher, sich bewusst zu machen, dass Aufgaben, mit denen Kompetenzen besonders gut überprüft werden können, nicht gleichzusetzen sind mit Aufgaben, mit denen Kompetenzen besonders gut erworben werden können (vgl. Büchter & Leuders 2005).

Aufgaben für das Leisten	Aufgaben für das Lernen
Leistungserwartung	Neugier, Entdecken, exploratives Arbeiten
Fehlervermeidung	Lernen aus Fehlern
Einzelleistung & Auswertbarkeit	Kooperation & Kommunikation
produktorientiert	prozessorientiert
nur begrenzte Kontexte möglich	anwendungsorientierte Aufgaben

Wie unterrichtet man „verstehensorientiert“?

- Ziel ist, dass Lernende tragfähige und vielfältige Vorstellungen mathematischer Begriffe entwickeln
- Vermeidung von Fehlvorstellungen
- Keine „Gib-mir-die-Formel-Haltung“!
- Mehr Wertschätzung für verständiges Umgehen mit mathematischen Begriffen als für reine Anwendung von Regeln

## 2. Beispiele für verstehensorientierten Unterricht

Als Beispiel für verstehensorientierten Unterricht werden quasi als Lernlinie zum Thema Wachstumsfunktionen Aufgaben zu diesem Thema mit TI-Nspire™ vorgestellt, die in unterschiedlichen Klassenstufen bearbeitet werden können. Am Ende steht ein freigegebenes Beispiel der Reifeprüfung aus 2014.

Gleichzeitig wird versucht Verbindungen zu anderen Themen des Lehrplans herzustellen, indem bereits früh Vorbereitungen für die Begriffsbildung, das Verständnis bzw. die Einsicht der Nützlichkeit einzelner mathematischer Objekte gelegt werden, konkret für Differenzenquotient und Integralrechnung.

### 2.1 Neugier wecken durch erstaunliche Ergebnisse

„Die Neugier steht immer an erster Stelle eines Problems, das gelöst werden will.“ (Galileo Galilei)

**Aufgaben 1B: Die faszinierende Welt des Wachstums**

Nehmen wir an Josef hätte für Jesus einen Cent auf ein Sparbuch eingelegt  
bei einem Zinssatz von :  $p:=0.03$

Wie viel kg Gold hätte Jesus heute? (Goldpreis:  $g:=31000$  Euro pro kg)  
Schätze bevor du rechnest.

---

Ermittle aus dem Graphen auf der nächsten Seite, wie viel Gold ca. im vergangenen Jahrhundert gefördert wurde und vergleiche mit obigem Ergebnis.

$0.013842338707244 \cdot 1.03$	0.014258
$0.014257608868461 \cdot 1.03$	0.014685
$0.014685337134515 \cdot 1.03$	0.015126
$0.01 \cdot (1.03)^{2014}$	7.14777623

Abb. 1



Abb. 2

Die Aufgabenstellung „Wie viel Gold wurde ca. im vergangenen Jahrhundert gefördert?“ bietet die Möglichkeit, dass sich die Schüler mit einem Problem der Integralrechnung schon sehr früh beschäftigen (Abbildung 2 siehe [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gold\\_-\\_Trend\\_Gewinnung.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gold_-_Trend_Gewinnung.svg))

**Aufgaben 2: Die faszinierende Welt des Wachstums** [nach Herget 2013]

Wir verfolgen den Graphen der Funktion  $y=e^x$ .

Wir wollen den Graphen auf ein A4 – Blatt zeichnen, richten die y – Achse nach Norden aus. Schnell verläßt der Graph das Blatt.

Stell dir nun vor der Graph läuft entlang der Erdoberfläche über den Nordpol, weiter zum Südpol und wieder zurück zu uns. Trifft er wieder auf unser Blatt – wie weit entfernt von unserem Koordinatenursprung passiert uns der Graph? (A4 Format 29,7 mal 21 cm)

– Schätze zunächst und zeichne dann auf der nächsten Seite den zurückkehrenden Graphen ein. (Erdumfang 40000km)

–Lass nun den Graphen mehrfach um die Erde reisen.




Abb. 3

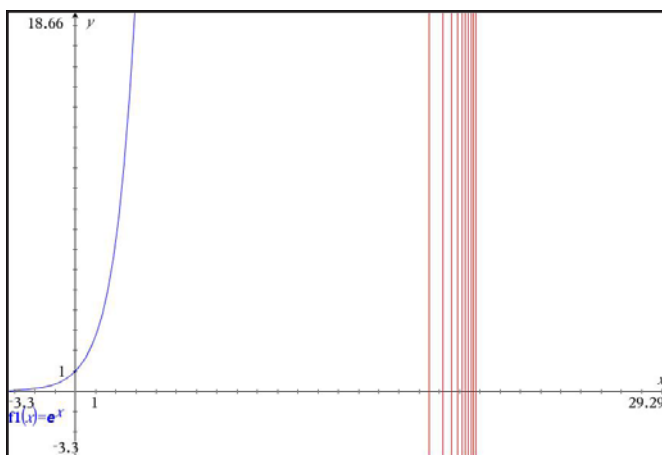


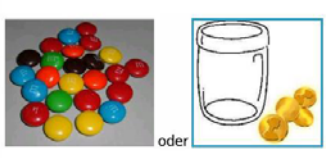
Abb. 4

**2.2 Experimentelles Entdecken**

„I don't love studying. I hate studying. I like learning. Learning is beautiful.“ (Natalie Portman)

**Simulation eines Wachstumsprozesses mit Hilfe von m&ms oder Münzen**

**Wachstum:**  
Es werden 4 m&ms (alternativ Münzen) geworfen. All jene, bei denen ein m oben liegt, "teilen sich" und es werden entsprechend viele neue m&ms dazugegeben und neuerlich geworfen, usw.



wurf	wachs1	wachs2
1	4	4
2	6	5
3	8	9
4	12	14
5	19	21
6	31	34

Abb. 5

Experimente mit eigenen Händen durchzuführen wirkt motivierend. Das oftmalige Wiederholen des Experiments kann dann an die TI-Nspire™ Technologie ausgelagert werden. Dabei können die Ergebnisse des Experiments mit den mathematischen Modellen verglichen werden.

**Simulation eines Wachstumsprozesses mit Hilfe von TI-Nspire**

**Wachstum:**  
Es werden 4 m&ms (alternativ Münzen) geworfen. All jene, bei denen ein m oben liegt, "teilen sich" und es werden entsprechend viele neue m&ms dazugegeben und neuerlich geworfen, usw.  
Dieser "Münzwurf" soll jetzt mit den Zufallszahlen 0 und 1 simuliert werden.

ww	sim
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7
9	8
10	9
11	10
12	11
13	12
14	13

Abb. 6

**2.3 Anwenden**

„Es gäbe die Mathematik nicht, wäre sie nicht anwendbar.“ (Helmut Heugl)

Als mögliche Anwendung wurde hier „Wachstum mit Störung gewählt“ (Schuldentilgung, Abschussquote, Fangquote). Sehr schöne Anwendungsbeispiele dazu findet man in Heugel, H. (2014): *Mathematikunterricht mit Technologie*; Veritas.

**Wachstum mit Störung:**  
Anfangswert:  $a = 100000$   
jährliches Wachstum um p Prozent:  $p = 6$ .  
jährliche lineare Abnahme um:  $r = 5500$ .

**Anwendung:**  
Schuldentilgung  
Abschussquote  
Fangquote

**Anwenden:**  
Es gäbe die Mathematik nicht, wäre sie nicht anwendbar.

Abb. 7

Obiges Modell kann man anschließend etwa verwenden um über die Staatsschulden zu diskutieren.

**Arbeitsauftrag:** Die österreichische Staatsschuld beträgt momentan ca.  $s = 245000000000$   
Wie viel müsste jeder Österreicher an jährlicher Rate bei einer Verzinsung von 5% zahlen, damit diese Schuld in 30 Jahren abgetragen wäre?  
Einwohner in Österreich: ca. 8500000, (Anzahl der Erwerbstätigen ca. 4000000)

Abb. 8

Modelle sollten immer mit der Realität verglichen werden. Daher könnte ein weiterer Arbeitsauftrag lauten:

- Finde ein passendes Modell für den Anstieg der österreichischen Staatsschulden.
- In welchen Intervallen passen die Modelle gut?

Es könnte eventuell fächerübergreifend mit dem Fach „Politische Bildung“ besprochen werden, wodurch der Schuldenberg Österreichs grundsätzlich beeinflusst wird bzw. welche Maßnahmen dazu geführt haben, dass er sich wie unten im Diagramm gezeigt entwickelt hat. (Graphik aus diepresse.com)

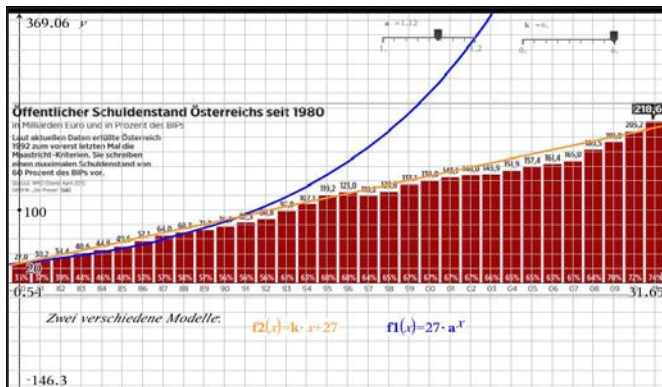


Abb. 9

Die Aufgabenstellung

- Berechne für den Zeitraum 1980 bis 2010 den Schuldenzuwachs pro Jahr.
- Berechne für den Zeitraum 1980 bis 2010 den Schuldenzuwachs pro Sekunde.

bietet die Möglichkeit eine Vernetzung zur Differentialrechnung zu knüpfen und den Begriff Differenzenquotient zu besprechen.

### 3. Überprüfung der erworbenen Kompetenzen

Ziel eines verstehensorientierten Unterrichtes sollte es sein, dass die Schülerinnen und Schüler jene Kompetenzen erwerben, die für die Reifeprüfung notwendig sind, ohne den Unterricht in reines Training von Prüfungsaufgaben zu verwandeln.

Exemplarisch wird hier eine freigegebene Typ-1-Aufgabe angeführt:

**Aufgabe 10**     **Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung Mathematik 9. Mai 2014 Teil-1-Aufgaben**

**Wachstum**  
 Die Funktion  $f$  beschreibt einen exponentiellen Wachstumsprozess der Form  $f(t) = c \cdot a^t$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

**Aufgabenstellung:**  
 Ermitteln Sie für  $t = 2$  und  $t = 3$  die Werte der Funktion  $f$ !

$t$	$f(t)$
0	400
1	600
2	$f(2)$
3	$f(3)$

$f(2) =$  \_\_\_\_\_  
 $f(3) =$  \_\_\_\_\_

Abb. 10

Das Beispiel stammt aus „Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung Mathematik“, Teil-1-Aufgaben (bifie 9. Mai 2014).

### 4. Hilfreiche Materialien für den Unterricht mit Technologie

T<sup>3</sup> Österreich ist bemüht jene Lehrer zu unterstützen, die Ihren Unterricht mit Technologie neu gestalten wollen. Dazu hat ein Autorenteam Aufgabenbeispiele als Begleitung zum Lehrplan bereitgestellt. Die Aufgaben für die 9. Schulstufe stehen bereits online zur Verfügung.

(<http://www.t3oesterreich.at/index.php?id=215>)

Zusätzlich bietet T<sup>3</sup> Österreich Workshops an, die in einem Art Baukastensystem zusammengefügt werden können und daher individuell an die Bedürfnisse der einzelnen Schulen angepasst werden können.

Mögliche Bausteine:

- TI-Nspire™ Technologie – die verschiedenen Werkzeugarten an Beispielen
- Didaktik des technologiegestützten Mathematikunterrichtes
- Aufgaben zum Lernen – Aufgaben zum Leisten
- Die Rolle der Technologie beim Erlernen und Festigen von Grundkompetenzen für die Reifeprüfung
- Nutzen, Verknüpfen und Entwickeln von Modulen
- Wachstumsprozesse mit Differenzgleichungen
- Analytische Geometrie (inkl. 3D)
- Trigonometrie – periodische Prozesse
- Differentialrechnung verstehensorientiert
- Integralrechnung verstehensorientiert
- Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Technologie
- Kann dies Zufall sein? Verschiedene diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- TI-Nspire™ in der 9. Schulstufe

**Literatur:**

- BÜCHTER, A.; LEUDERS, T. (2005): *Standards für das Leisten brauchen Aufgaben für das Lernen!*; in: PM – Praxis der Mathematik in der Schule, 47 (2), S. 40–41.  
 HERGET, W.; MERZIGER, P. (2013): *Vom Staunen zum Lernen*; in: Zeitschrift mathematiklehren, 181, S. 4–11.  
 HEUGL, H. (2014): *Mathematikunterricht mit Technologie*; Veritas  
 BIFIE (2014): *Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung Mathematik*, 9. Mai 2014, Teil-1-Aufgaben; siehe <https://www.bifie.at/node/2633>

**Autor:**

Mag. Gertraud Aumayr, T<sup>3</sup> Österreich, KPH Wien/Krems (A)



# Österreichischer Lehrplan mit Technologie-Begleitung

Gertrud Aumayr, Helmut Heugl



T<sup>3</sup> ÖSTERREICH



Ein großes Anliegen von T<sup>3</sup> Österreich ist die Bereitstellung von Materialien, die für den einzelnen Lehrer im Alltag gut nutzbar sind. Immer wieder wurde bei diversen Fortbildungsveranstaltungen geklagt, dass es wegen der Fülle an vorhandenen Artikeln im Internet sehr zeitaufwändig sei, etwas Brauchbares zu finden. Passend zum Lehrplan der AHS wurden daher von einem Autorenteam<sup>1</sup> Pakete geschaffen, die auf der T<sup>3</sup> Österreich Webpage<sup>2</sup> gratis zum Download bereitstehen. Zur Zeit ist die 9. Schulstufe vorhanden. Weitere Schulstufen werden in den nächsten Jahren folgen.

Ausgangspunkt ist der Lehrplan der 9. Schulstufe. Ziele bzw. Kompetenzen, bei denen Technologieeinsatz sinnvoll ist, sind gekennzeichnet (☒). Das bedeutet aber nicht, dass man das Operieren in diesen Bereichen der Technologie als Black Box überlässt. Händisches Operieren mit einfachen Ausdrücken ist weiterhin unverzichtbar. In der ersten Phase soll Technologie nur als Kontrollinstrument eingesetzt werden. Erst nach einer Phase des verstehenden Lernens („White Box“) kann Operieren der Technologie als Black Box überlassen werden (z.B. Nutzen von „solve“-Befehlen).

Die Anwendung der Technologie soll sich nicht auf das Rechenwerkzeug beschränken. Moderne Technologien („Lernplattformen“) wie der TI-Nspire™ bieten verschiedene Werkzeuge an, die unter einer gemeinsamen Benutzeroberfläche arbeiten:

- ☒ Numerisches Rechenwerkzeug
- ☒ CAS Werkzeug (beinhaltet die Möglichkeiten des numerischen Rechenwerkzeugs)
- ☒ Graphikwerkzeug
- ☒ Tabellenkalkulationswerkzeug
- ☒ Geometriewerkzeug
- ☒ Statistikwerkzeug

Die Inhaltsbereiche der 9. Schulstufe in Österreich umfassen

- Zahlen und Rechengesetze
- Funktionen
- Gleichungen und Gleichungssysteme
- Trigonometrie
- Vektoren und analytische Geometrie der Ebene

Exemplarisch sei hier im Folgenden das Kapitel Funktionen vorgestellt:

## Ziele

- Reelle Funktionen darstellen (Terme, Graphen, Tabellen); zwischen Darstellungsarten wechseln ☒
- Beschreiben und untersuchen von linearen und einfachen nichtlinearen Funktionen ( $a/x$ ,  $a/x^2$ , quadratische Funktion, abschnittsweise definierte Funktion) ☒
- Nutzen von Funktionen zum Modellbilden in Anwendungsbereichen (insbesondere direkte und indirekte Proportionalität) ☒
- Funktionale Interpretation von Formeln, Einfluss von Parametern untersuchen ☒
- Anwendungsaufgaben ☒

## Aufgaben

- Funktion 1: Lage von Geraden
- Funktion 2: Steigung lineare Funktion
- Funktion 3: Lage von Parabeln
- Funktion 4: Abschnittsweise-definiert
- Funktion 5: Anwendung – Zeit -Ort
- Funktion 6: Anwendung – Taxikosten
- Funktion 7: Anwendung – eingleisige Bahnstrecke

## Werkzeugart

In einer weiteren Spalte wird der Beitrag der Technologie zum Kompetenzerwerb und zur Nutzung der Kompetenzen angeführt. Die dabei genutzte Werkzeugart wird angegeben.

- Reelle Funktionen darstellen; zwischen Darstellungsarten wechseln
  - ☒ Rechenwerkzeug inklusive CAS
  - ☒ Graphikwerkzeug
  - ☒ Tabellenwerkzeug
- Beschreiben und untersuchen von linearen und einfachen nichtlinearen Funktionen
  - ☒ Graphikwerkzeug
  - ☒ Tabellenwerkzeug
- Nutzen von Funktionen zum Modellbilden in Anwendungsbereichen
  - ☒ Rechenwerkzeug inklusive CAS
  - ☒ Graphikwerkzeug
  - ☒ Tabellenwerkzeug
- Funktionale Interpretation von Formeln, Einfluss von Parametern untersuchen
  - ☒ Graphikwerkzeug
- Anwendungsaufgaben
  - ☒ Rechenwerkzeug inklusive CAS
  - ☒ Graphikwerkzeug
  - ☒ Tabellenwerkzeug

Die angebotenen Aufgaben stehen als pdf-Files und zum Großteil auch als direkt mit dem TI-Nspire™ verwendbare tns-Files zur Verfügung.

Die Langfassung dieses Artikels mit Beispielkopiervorlage „Kleine Lösungsformel“ finden Sie auf der Materialdatenbank.

## Literatur

- [1] Gertrud Aumayr (Gesamtkoordination), Beate Arand, Helmut Heugl, Andreas Knapp, Thomas Müller, Christoph Neulinger, Raimund Porod, Franz Schlöglhofer, Fritz Tinhof und Christian Zöpfl
- [2] **Webpage und Download der Materialien:**  
<http://www.t3oesterreich.at/index.php?id=215>

## Kontakt:

Mag. Gertrud Aumayr, T<sup>3</sup> Österreich, KPH Wien/Krems (A)

# Kurvenanpassung mit der Applikation „Transformation Graphing“

Hans-Ulrich Lampe

## Einleitung

Schieberegler haben sich als sehr hilfreich erwiesen, wenn man zu Daten einen funktionalen Zusammenhang finden möchte und zu dem gewünschten Funktionstyp kein Regressionsmodell zur Verfügung steht. Der Umgang mit Schieberegler öffnet aber auch einen Blick auf die Wirkung von Parametern im Sinne eines Funktionenlabors. Klassische Beispiele sind hier die Veränderung der Parabelform oder das „Wackeln“ an der Geradensteigung und die Beobachtung des jeweiligen Effekts. Nun bieten die Taschenrechner aus der TI-84-Familie nicht den Komfort eines Schiebereglers. Abhilfe leistet hier aber die Applikation *Transfrm* (Transformation Graphing). Die Applikation ist meist standardmäßig installiert oder kann von der TI-Webseite kostenfrei heruntergeladen werden.

Dieser Applikation begegnen die meisten Lehrenden, wenn Schülerinnen oder Schüler hilfesuchend vor ihnen stehen, weil sich nur noch ein Graph zeichnen lässt und der  $y=-$ Editor verändert aussieht (s. Abb. 1a u. b). Dann ist die Applikation meist unbeabsichtigt aktiviert worden.

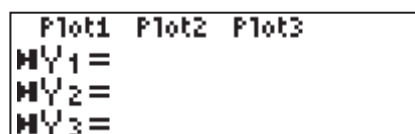


Abb. 1a:  $Y=-$ Editor in der Ansicht des TI-84 Plus

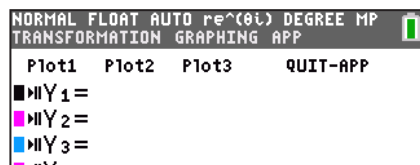


Abb. 1b:  $Y=-$ Editor in der Ansicht des TI-84 C



Abb. 2: Deaktivieren der Applikation

Zum Deaktivieren ruft man bei dem TI-84 Plus die Applikation auf und geht auf „Uninstall“ (s. Abb. 2). Die Applikation wird dann aber nicht deinstalliert, sondern nur wieder ausgeschaltet. Bei dem TI-84 C wählt man „QUIT-APP“ in der oberen Zeile aus (s. Abb. 1b). Man beachte, dass der TI-84 C die aktive Applikation in der Info-Box im oberen Bildschirmbereich anzeigt.

Hieran wird schon deutlich, dass sich die Applikationen bei beiden Modellen unterscheiden, dies betrifft aber überwiegend nur das Design. Für den TI-84 Plus ist die Version 1.03 aktuell, für den TI-84 C die Version 4.01. Beide Versionen sind nicht kompatibel, das muss man beim Download beachten.

Im Weiteren soll die Applikation aber aktiviert bleiben und ihr Potenzial bei der Kurvenanpassung genutzt werden. Hierzu

wird wegen der besseren Graphik der TI-84 C verwendet, das Gezeigte kann aber genauso mit dem TI-83 bzw. TI-84 Plus durchgeführt werden.

## Begrenztes Wachstum

Um die Applikation in einem einfachen Zusammenhang kennenzulernen, soll der Funktionsterm zu einem begrenzten Wachstum ermittelt werden. Als Beispiel dient die Erwärmung eines Getränks, das mit einer Temperatur von  $5^{\circ}\text{C}$  aus dem Kühlschrank genommen und einer Umgebungstemperatur von  $25^{\circ}\text{C}$  ausgesetzt wird. Die Temperatur wird in Minutenabständen gemessen (s. Tab. 1) und die erhaltenen Daten in einem Plot dargestellt (s. Abb. 3).

Zeit in Minuten	Temperatur in $^{\circ}\text{C}$
0	5,0
1	8,6
2	11,6
3	14,0
4	16,0
7	20,1
10	22,3
20	24,6

Tab. 1: Temperaturmessung einer Erwärmung

Zu dem vorliegenden Verlauf gibt es kein unmittelbar verwendbares Regressionsmodell. Wenn aus dem Unterricht der allgemeine Typ des begrenzten Wachstums bekannt ist, so kann mit *Transfrm* schnell eine Funktion hergeleitet werden.

Sei also  $f(x) = (a-g) \cdot e^{-k \cdot x} + g$  mit  $a$  als Anfangstemperatur,  $g$  als Temperaturgrenze und  $k$  als Wachstumskonstante. In *Transfrm* können im  $Y=-$ Editor Terme mit bis zu vier Parametern ( $A, B, C, D$ ) unter Nutzung der ALPHA-Taste eingegeben werden (s. Abb. 4a). Das Fenster der WINDOW-Einstellung hat nun ein neues Untermenü SETTINGS (s. Abb. 4b), in dem die Voreinstellungen für die Parameter eingegeben werden (s. Abb. 4c). In diesem Fall sind die Parameter  $A$  und  $B$  unmittelbar dem Sachzusammenhang zu entnehmen und fest, für  $C$  wird ein naheliegender Wert eingetragen. Unter Step wird die Schrittweite eingegeben, auch nachträglich kann die Schrittweite wie bei Wertetabellen bekannt noch verändert werden, um den Suchbereich zu verfeinern. Die Zeichen in der oberen Zeile werden im vorletzten Kapitel erläutert.

Die graphische Darstellung zeigt das Ergebnis der ersten Annäherung (s. Abb. 5). Da  $A$  und  $B$  fest sind, ist jetzt nur noch der Wachstumsfaktor  $C$  zu verändern. Dazu geht man mit dem Cursor  $\uparrow\downarrow$  auf  $C$ , mit Cursor  $\leftarrow$  (um Zehntel verkleinern) oder  $\rightarrow$  (um Zehntel vergrößern) stellt man den passenden Kurvenverlauf ein (s. Abb. 6). Genauso wie mit einem Schieberegler kann der Einfluss des Wachstumsfaktors auf den Verlauf des Graphen unmittelbar verfolgt werden.

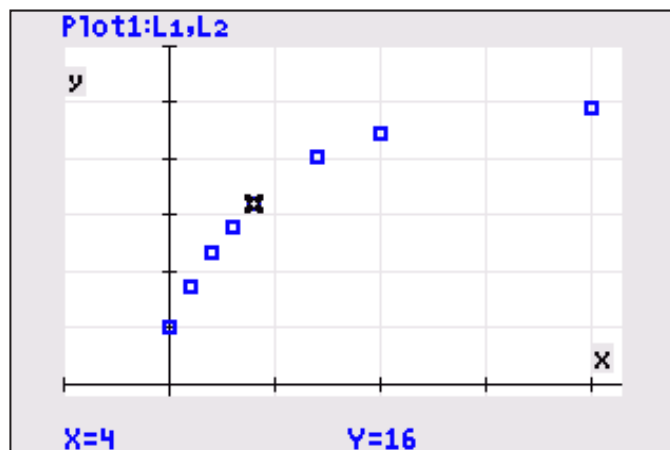


Abb. 3: Plot der Daten aus Tabelle 1

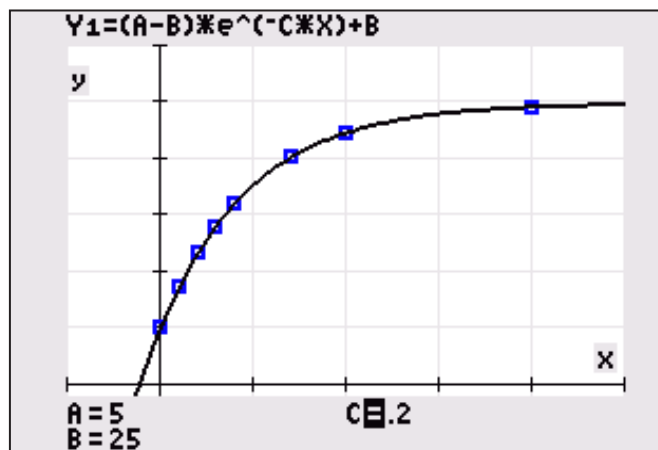


Abb. 6: Die fertige Anpassung

```

Plot1 Plot2 Plot3 QUIT-APP
▶|Y1|(A-B)*e^-C*X+B
▶|Y2|=
▶|Y3|=
    
```

Abb. 4a: Die allgemeine Funktionsgleichung zum begrenzten Wachstum

```

WINDOW SETTINGS
Xmin=-5
Xmax=25
Xsc1=5
Ymin=-1
    
```

Abb. 4b: WINDOW-Einstellung

```

WINDOW SETTINGS
>| | > >>
A=5
B=25
C=1
Step=.1
    
```

Abb. 4c: Das SETTINGS-Menü

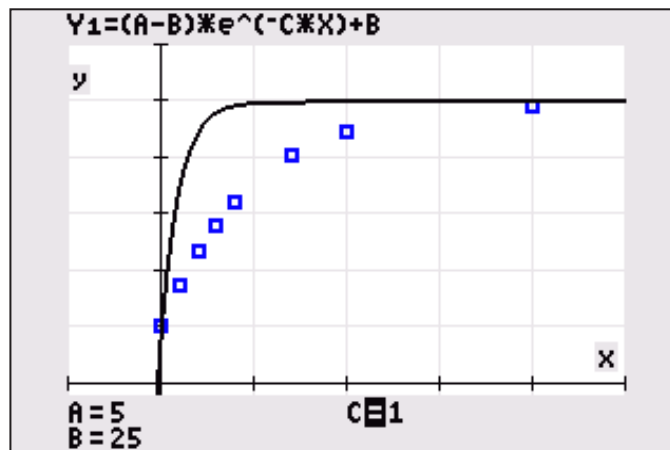


Abb. 5: Die „Schiebereglern“ im Einsatz

## Umrechnungsformel für Windstärken

Für Wassersportler wie Segler und Surfer sind Informationen über die Windgeschwindigkeit und damit die Stärke des Windes wichtig. Gebräuchlich ist die Angabe der Windstärke in BEAUFORT (s. Tab. 2), Wetterdienste geben allerdings überwiegend die Windgeschwindigkeit in km/h oder in Knoten (nautische Meilen pro Stunde, Einheit kn) an. Mit der BEAUFORT-Angabe wissen Segler und Surfer, mit welcher Segelgröße sie auf das Wasser gehen können. Da sich Umrechnungstabellen schwer merken lassen, wäre eine Formel praktisch, mit der man Windgeschwindigkeiten in km/h in BEAUFORT umrechnen kann. Diese soll mit Hilfe von *Transfrm* entwickelt werden.

Zuvor noch zwei Anmerkungen. Da die Umrechnung 1 kn = 1,852 km/h ein proportionaler Zusammenhang ist, soll im Weiteren die Einheit km/h im Vordergrund stehen. Informationen zu der Geschichte der Maßeinheit BEAUFORT und ausführlichere Versionen der Tab. 2 findet man in der Literatur oder bei WIKIPEDIA.

Windstärke in Bft	Windgeschwindigkeit in km/h	mittlere Windgeschwindigkeit in km/h	Beschreibung
0	< 1	0	Windstille
1	1 – 5	3	leichter Zug
2	6 – 11	8	leichter Wind
3	12 – 19	16	schwacher Wind
4	20 – 28	24	mäßiger Wind
5	29 – 38	34	frischer Wind
6	39 – 49	44	starker Wind
9	75 – 88	82	Sturm
12	> 118	125	Orkan

Tab 2: Zusammenhang von Windstärke und Windgeschwindigkeit. Die Tabelle zeigt nur einen Ausschnitt.

Die Bearbeitung der relativ offenen Problemstellung kann im Sinne des forschenden Lernens angelegt werden. Die Schülerinnen und Schüler experimentieren mit den Parametern allgemeiner Funktionstypen und können ihre Vermutungen direkt überprüfen und optimieren. Mögliche Schritte auf diesem Lernweg sollen im Folgenden aufgezeigt werden. Angesiedelt sei diese Erarbeitung in dem Zusammenhang quadratischer Funktionen.

Für die graphische Darstellung wird für die Windgeschwindigkeit der mittlere Wert in dem Intervall genommen. Der Punkteplot der Windgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Windstärke legt ein quadratisches Modell nahe, das sich mit *QuadReg* finden lässt und eine zufriedenstellende Annäherung liefert (s. Abb. 7). Damit der Graph durch den Punkt (0|0) verläuft, wurde eine zusätzliche Häufigkeitsliste verwendet (s. Abb. 8). Damit wird vorgetäuscht, dass der Punkt (0|0) 1000-mal vorkommt, die anderen jeweils nur einmal.

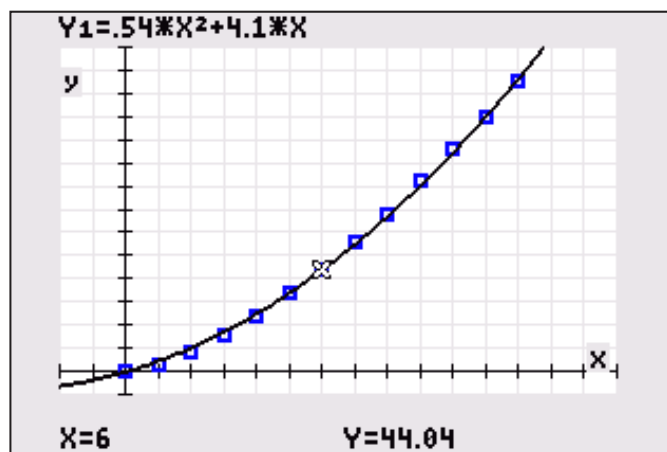


Abb. 7: Windgeschwindigkeit (y) in Abhängigkeit von der Windstärke (x). Für 6 Bft ergibt sich eine sehr gute Näherung.

L1	L2	L3	L4	L5	Σ
0	0	1000	-----	-----	
1	3	1			
2	8	1			
3	16	1			
4	24	1			
5	34	1			
6	44	1			

Abb. 8: Der Trick mit der Häufigkeitsliste. Die Liste L3 muss im Regressionseditor unter *FreqList* eingetragen werden.

Eigentlich sollte aber die Windstärke in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit betrachtet werden. Hier erweist sich die Idee der Umkehrfunktion als nützlich, so dass die Wurzelfunktion als mögliches mathematisches Modell ausgewählt wird. Für Wurzelfunktionen gibt es kein Regressionsmodell, hier hilft *Transfrm* weiter.

Die Betrachtung der Werte in der Tabelle 2 zeigt, dass die Funktion  $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$  ein erstes Modell sein könnte, wobei der

Parameter a in der Nähe von 1 liegen müsste. Mit der Schrittweite 0,1 für a tastet man sich auf den Wert 0,8 vor und stellt dann die Schrittweite auf 0,01 um. Die gefundene Funktion  $f(x) = 0,82 \cdot \sqrt{x}$  ist sicherlich nicht optimal (s. Abb. 9). Da sie aber bis Windstärke 6 Bft relativ gut übereinstimmt, wäre dieses Modell für den Praktiker schon hilfreich.

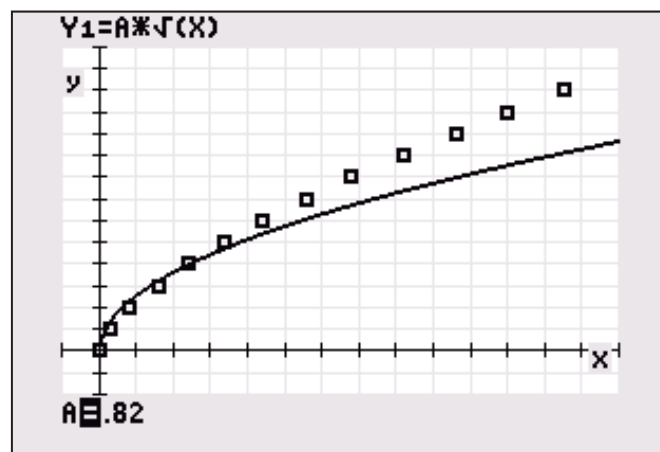


Abb. 9: Ein erstes Modell. Für den Praktiker geeignet.

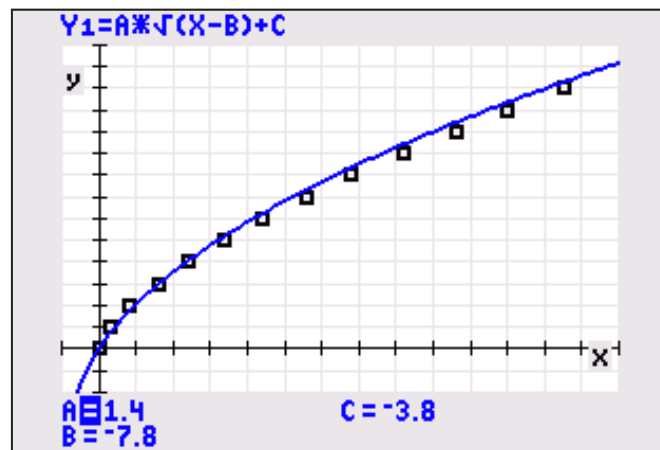


Abb. 10: Lohn der Mühe – Die fast perfekte Anpassung.

Mit der alleinigen Veränderung des Streckfaktors gelingt eine bessere Annäherung nicht. Der Graph muss offensichtlich in seiner Lage verändert werden. Hier könnte eine Verschiebung parallel zu den Achsen helfen. Wie schon bei der Parabelverschiebung könnte das neue Modell  $f(x) = a \cdot \sqrt{x - b} + c$  sein. Für die Voreinstellung in *SETTINGS* werden für die Parameter b und c negative Werte genommen. Damit die Suche schneller geht, sollte die Schrittweite wieder auf 1 gestellt werden. Die Parameterwerte können im Menü *SETTINGS* verändert werden, aber auch durch Eingabe von Werten bei dem aktivierten Parameter (wie bei dem Befehl *TRACE*). Eine gute Strategie ist, durch Veränderung der Parameter b und c den Graphen durch den Punkt (0|0) laufen zu lassen und dann mit dem Streckfaktor a nachzuarbeiten. Ein bisschen Durchhaltewille ist aber notwendig. Am Ende des Experimentierens könnte das Modell  $f(x) = 1,4 \cdot \sqrt{x + 7,8} - 3,8$  (s. Abb. 10) entstanden sein. Puristen können die Werte noch auf Hundertstel verfeinern. Mit dem

Streckfaktor  $a = 1,36$  erreicht man eine sehr gute Annäherung. Aus mathematischer Sicht sollte jetzt ein zweiter Blick auf die Problemstellung gerichtet werden. Hätte man das nicht alles vorher wissen können?

Der Graph der Funktion  $f(x) = 0,54x^2 + 4,1x$  für die Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit von der Windstärke (s. Abb. 7) ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt  $S(-3,8|-7,8)$ <sup>1</sup>. Unter Beachtung der Monotonieeigenschaften kann für  $x \geq 7,8$  die Umkehrfunktion bestimmt werden.

$$y = 0,54x^2 + 4,1x$$

$$(0,73x + 2,8)^2 = y + 7,8$$

...

$$x = 1,36 \cdot (\sqrt{y + 7,8} - 2,8)$$

$$x = 1,36 \cdot (\sqrt{y + 7,8}) - 3,8$$

und damit

$$f^{-1}(x) = 1,36 \cdot (\sqrt{x + 7,8}) - 3,8$$

Die Parameter  $b$  und  $c$  für die Verschiebung parallel zu den Achsen sind also durch die Koordinaten des Scheitelpunkts der Ausgangsfunktion vorgegeben, so dass eigentlich nur der Streckfaktor gesucht werden musste.

Mit der Erweiterung des Funktionenrepertoires ergibt sich mit der Potenzfunktion ein noch einfacherer Weg. Mit dem Regressionsmodell *PwrReg* (dazu muss das Datenpaar  $(0|0)$  aus den Listen entfernt werden) gelangt man zu dem Modell  $p(x) = 0,49 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ . Aber welche grundlegenden Erkenntnisse zur Parametervariation und zum Verständnis von Funktionstermen wären den Schülerinnen und Schülern dann entgangen!

### Der Umriss eines Hühnereies als Funktion

Bei der Behandlung von Rotationsvolumina wird häufig ein Hühnerei als Objekt eingesetzt. Neben dem Vorteil, dass mit einem gekochten Ei und einem Eierschneider die grundlegende Berechnungsmethode visualisiert werden kann, lässt sich das berechnete Volumen auch durch das Messen des verdrängten Wasservolumens überprüfen. Dazu ist aber eine möglichst genaue Funktion für den Hühnerei-Umriss notwendig. Die folgende Herleitung geht auf JAHNKE ET AL zurück.

Der Ei-Umriss ist dadurch gekennzeichnet, dass der eine Eipol halbkreisförmig ist, während der andere leicht konisch zuläuft, man bezeichnet so etwas als Eilinie oder Oval. Unter Berücksichtigung der Symmetrieachse von Pol zu Pol kann man die Eilinie so in ein Koordinatensystem legen, dass sie sich durch zwei zueinander symmetrische Funktionen beschreiben lässt (s. Abb. 11).

Die Genese der Funktion beginnt bei der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wobei die Halbachse  $a$  auf der  $x$ -Achse liegt und die Halbachse  $b$  auf der  $y$ -Achse. Jetzt erfolgt noch eine Verschiebung um  $a$  Einheiten in positiver  $x$ -Richtung und die Auflösung nach  $y$ . Man erhält

$$f(x) = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}}.$$

Für den Parameter  $a$  kann man als erster Näherung die Hälfte der Länge von Eipol zu Eipol nehmen, für den Parameter  $b$  den Radius des größten Durchmessers des Eies (s. Abb. 12). Damit der rechte Eipol eine konische Form bekommt wird  $f$  mit der Funktion  $g$  mit  $g(x) = 1 - cx$  multipliziert. Dieser Faktor sorgt dafür, dass mit wachsenden  $x$ -Werten die Ellipse gestaucht wird. Für  $c = 0,05$  ist dieser Effekt in Abb. 13 zu sehen. Durch die Stauchung passen allerdings die gewählten Werte für die Parameter  $a$  und  $b$  nicht mehr zu dem gemessenen Ei. Mit *Transfrm* werden jetzt die Parameter dem tatsächlichen Umriss des Eies angepasst werden (s. Abb. 14). Das gelingt besonders gut, wenn das Ei in die Projektion des Bildschirms (Beamer oder OHP-Display View-Screen™ Panel) gehalten wird.

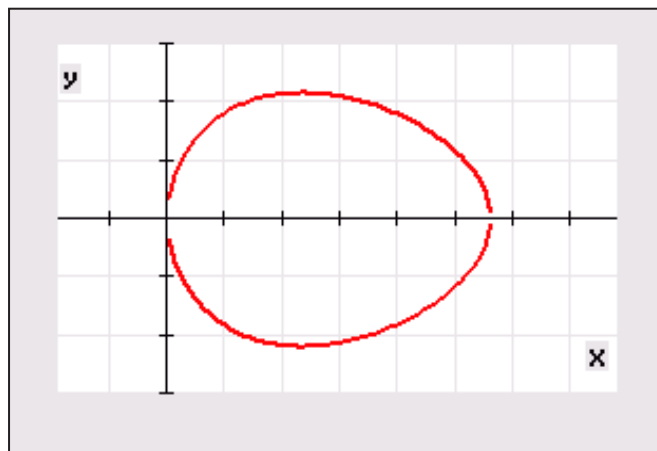


Abb. 11: Eilinie, erzeugt durch zwei zueinander symmetrische Funktionsgraphen. Es empfiehlt sich die Zoomeinstellung ZSquare.

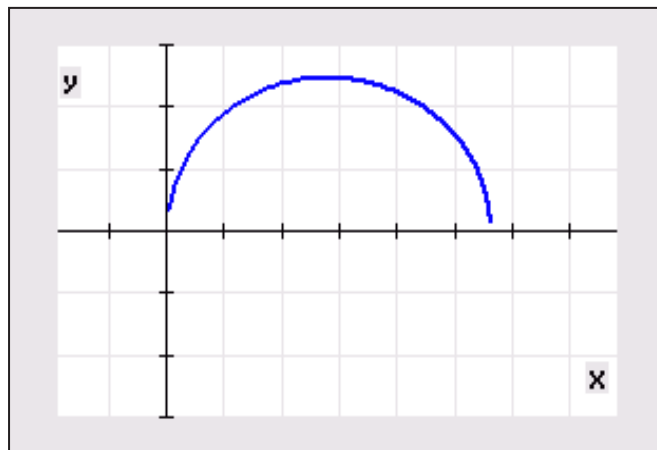


Abb. 12: Ellipse für  $y \geq 0$

<sup>1</sup> Alle Werte, auch die folgenden, sind gerundet angegeben, um die Lesbarkeit nicht zu stören.

Hans-Ulrich Lampe

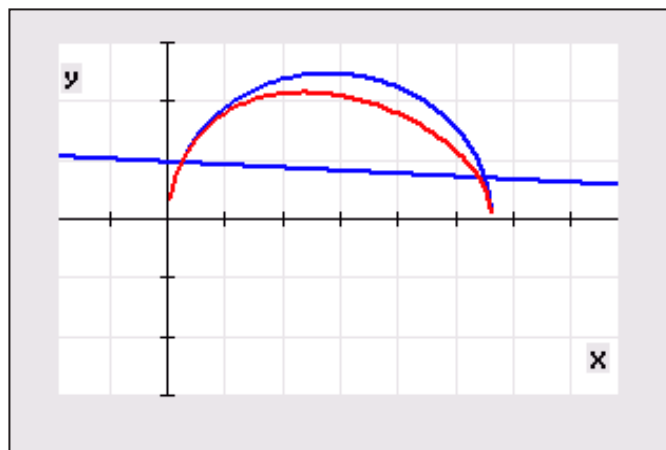


Abb. 13: Ellipse (blau), Gerade (blau) und resultierende Eilinie (rot).

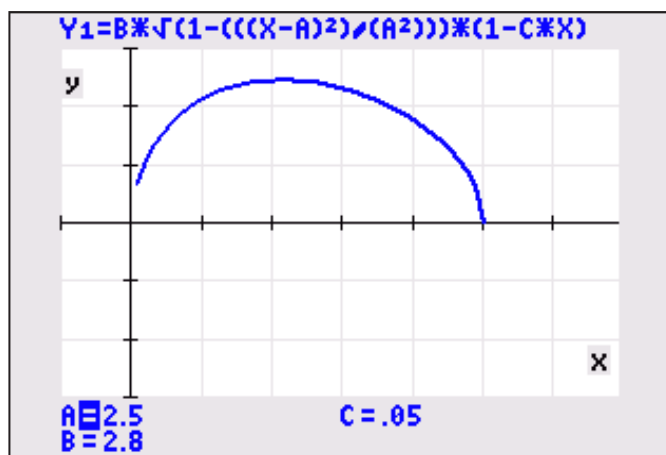


Abb. 14: Ein mögliches Resultat. In Transfrm kann immer nur ein Graph gezeichnet werden

## Das Menü SETTINGS

In dem Menü können drei Wiedergabemodi gewählt werden (s. Abb. 15).

>|| (Abspielen – Pause): Nach Änderung des Parameters wird der Graph unmittelbar gezeichnet.

> (Abspielen): Eine einzustellende Anzahl von Bildern wird gespeichert und dann wie in einer Diavorführung nacheinander gezeigt. Die Wiedergabe wird wiederholt, bis man mit ENTER abbricht.

>> (schnelles Abspielen): Wie oben, nur in rascherer Folge.



Abb. 15: Einstellmöglichkeiten für die Wiedergabe

## Schlussbemerkung

Natürlich kann man die in diesem Beitrag behandelten Problemstellungen auch durch algebraische Verfahren lösen. Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler werden diesen Weg sicherlich auch gehen und sollten darin bestärkt werden. Der Vorteil der hier gezeigten Vorgehensweise ist jedoch, dass die Parametervariation in den Vordergrund gestellt wird. Das Beobachten der schrittweisen Veränderung eines oder mehrerer Parameter trägt zum Verständnis von Funktionenscharen bei.

Diese Technik lässt sich bei beliebigen Funktionstypen verwenden, wenn das Zusammenspiel der Parameter einmal verstanden wurde. Man braucht eigentlich nur die Grundform einer Funktion  $f$  zu kennen und kann mit Hilfe des Zusammenhangs  $y = a \cdot f(b \cdot (x-c)) + d^2$  aus dem Grundtyp die gewünschte graphische Darstellung erstellen. Dieses ist auch als Anregung zu verstehen, die oft langatmige Wiederholung des „Funktionszoos“ einmal interessanter zu gestalten.

### Literatur:

Jahnke, T./Wuttke, H. (Hrsg.): Mathematik Analysis. Cornelsen Verlag 2001, S. 241  
Handbuch TI-83 Plus Transformation Graphing.  
<http://education.ti.com/de/deutschland/guidebook/search>

### Autor:

Hans-Ulrich Lampe, Stadthagen (D)

<sup>2</sup> Diese Schreibweise ist notwendig, um auch trigonometrische Funktionen zu erfassen. Bei der Wurzelfunktion ist  $b=1$ .

## Information von Texas Instruments zu Graphikrechnern (GTR) und Computeralgebrasystemen (CAS) in Prüfungen

Im Unterricht schätzen Lehrkräfte die Vielfalt an pädagogisch didaktischen Möglichkeiten, die Ihnen graphikfähige Taschenrechner anbieten. In einer Prüfung hingegen steht Sicherheit im Vordergrund. Um beiden Anforderungen gerecht zu werden, können

- GTR und CAS von Texas Instruments durch **Datenlösch**en und Zurücksetzen in den Ausgangszustand gebracht werden.
- Für die Modelle TI-Nspire™ CX, TI-Nspire™ CX CAS, TI-84 Plus und TI-84 Plus C Silver Edition von Texas Instruments gibt es den sogenannten

### Press-to-Test Modus:

- o Dabei wird der Zugriff auf die im Gerät gespeicherten Dateien und Programme blockiert, ohne die Dateien und Programme zu löschen.
- o Der Press-to-Test Modus wird auf dem Display und/oder durch blinkende LED's angezeigt.

Bei den TI-Nspire™ Modellen ist die Software für PC und Mac im Lieferumfang enthalten. Dadurch können erstellte Dateien auf dem PC gespeichert und wieder verwendet werden.

Texas Instruments empfiehlt immer das neueste Betriebssystem (OS) zu installieren. Das aktuelle Betriebssystem finden Sie auf den TI-Webseiten im Bereich „Downloads“. Zudem liefern Ihnen die TI-Handbücher zusätzliche Details.

# Iterationen

Robert Märki



Eine Iteration ist bekanntlich eine wiederholte Anwendung desselben Rechenverfahrens oder derselben Funktion. Iterationen finden Verwendung bei Approximationen aber auch bei der Entwicklung diskreter dynamischer Systeme. Sie gehören zu den wichtigsten Werkzeugen der numerischen Mathematik und der Informatik und sollten deshalb im Mathematikunterricht einen entsprechenden Stellenwert erhalten. Mit zeitgemäßen Hilfsmitteln, etwa der TI-Nspire™ Technologie können sowohl numerische wie grafische Darstellungen und Untersuchungen ohne großen zeitlichen Aufwand erfolgen.



Abb. 1

Im kürzlich von Texas Instruments herausgegebenen Unterrichtsmittel **Funktionen und Modelle, kontinuierlich und diskret** [1] werden Iterationen und ihre Darstellungsmöglichkeiten und Anwendungen in einem eigenen Abschnitt behandelt. Es zeigt sich hier wieder einmal mehr, dass der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsmodi von einem großen didaktischen Wert ist und dass er hilft, Zusammenhänge zu sehen und zu verstehen. Im vorliegenden Artikel wird zuerst die Grundidee der Fixpunkt-Iteration erläutert und einige Betrachtungen zur Konvergenz angeschlossen. Mit zwei Beispielen (diskretes logistisches Wachstum und verallgemeinertes Heron-Verfahren) wird anschließend die große Vielfalt und Bedeutung dieses Themas illustriert.

## 1. Fixpunkt-Iteration

Die Grundidee der Fixpunkt-Iteration besteht darin, dass an Stelle der Gleichung  $f(x)=0$  das Fixpunkt-Problem  $x=\varphi(x)$  mit der Iteration  $x_{n+1}=\varphi(x_n)$  für  $n=1,2,3 \dots$  approximativ gelöst wird. Die Iterationsfunktion  $\varphi$  ist im Allgemeinen jedoch nicht eindeutig. Oft ist es entscheidend, welche Iterationsfunktion gewählt wird.

Beispiel: Suche im Intervall  $(0,\pi)$  die Nullstelle von  $f(x)=x-2\cdot\sin(x)$ . Es gibt u.a. folgende zwei Lösungsmöglichkeiten:

a) Iteration mit  $x = 2 \cdot \sin(x) = \varphi_1(x)$

b) Iteration mit  $x = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi_2(x)$

Wir wählen jeweils den Anfangswert  $x_1=1,4$ . Beide Iterationen konvergieren, aber nur die Iteration a) führt zur Lösung der Aufgabe.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,8955$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

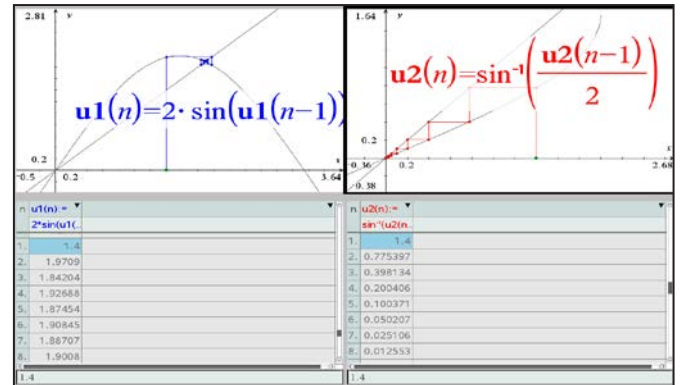


Abb. 2: Wahl der Iterationsfunktion

Entscheidend für die Konvergenz ist der Banachsche Fixpunktsatz: Wenn  $\varphi: D \rightarrow D$  die Bedingung

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y| \text{ für alle } x, y \in D$$

erfüllt (Lipschitz-Bedingung) und  $L < 1$  ist, dann gibt es genau einen Fixpunkt  $x_*$  von  $\varphi$  in  $D$ , d.h.  $\varphi(x_*) = x_*$  und für jeden Startwert  $x_1 \in D$  konvergiert die Fixpunktiteration  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  gegen diesen Fixpunkt.

Bemerkungen: Den Beweis des Satzes findet man in fast jedem Buch zur höheren Analysis, z.B. [2].  $L$  heißt Lipschitz-Konstante,  $L < 1$  bedeutet, dass die Abbildung kontrahierend ist. Für eine reelle Funktion  $\varphi$  heißt dies anschaulich, dass der Betrag der Steigung des Graphen von  $\varphi$  in  $D$  überall kleiner oder gleich  $L < 1$  ist, je kleiner  $L$  ist, desto besser die Konvergenz.

In der nachstehenden Abbildung wird die Iterationsfunktion  $it(x) = m \cdot (x - 0,5) + 0,5$  betrachtet, der Fixpunkt ist natürlich  $x = 0,5$ . Verändert man mit dem Schieberegler die Steigung  $m$ , dann ist deutlich zu sehen, dass Konvergenz nur für  $|m| < 1$  eintritt und diese um so rascher erfolgt, je kleiner  $|m|$  ist.

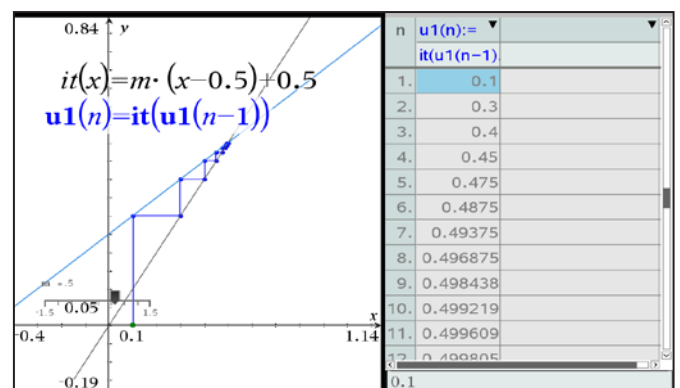


Abb.3: Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Steigung m

## 2. Diskretes logistisches Wachstum

Im schon erwähnten Unterrichtsmittel [1] erfolgt die Modellierung von Wachstumsprozessen über die (diskrete) Änderungsrate resp. über Differenzengleichungen. Ist bei einem beliebigen Wachstumsprozess eine Sättigungsgrenze  $G$  vorhanden, kann dies am einfachsten dadurch modelliert werden, dass man die Änderungsrate mit dem **wachstumsbegrenzenden Faktor**

$$b = \left(1 - \frac{x}{G}\right)$$

multipliziert ( $x$  ist die wachsende Größe,  $b$  heißt auch relatives Sättigungsmanko). Damit kommt das Wachstum beim Erreichen der Sättigungsgrenze zum Stillstand und wird negativ, wenn die Sättigungsgrenze übertroffen wird. Dieser wachstumsbegrenzende Faktor ist universell und kann sowohl bei diskreten wie auch bei kontinuierlichen Modellen von einer oder mehreren Größen und bei beliebigen Wachstumsvorgängen verwendet werden.

Das diskrete exponentielle Wachstum (geometrische Folge) wird durch die Änderungsrate resp. Differenzgleichung  $x_{n+1} - x_n = k \cdot x_n$  definiert. Mit Hilfe des wachstumsbegrenzenden Faktors wird dann das diskrete logistische Wachstum durch die Differenzgleichung

$$x_{n+1} - x_n = k \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{x_n}{G}\right)$$

definiert. Setzt man  $G = 1$ , dann erhält man

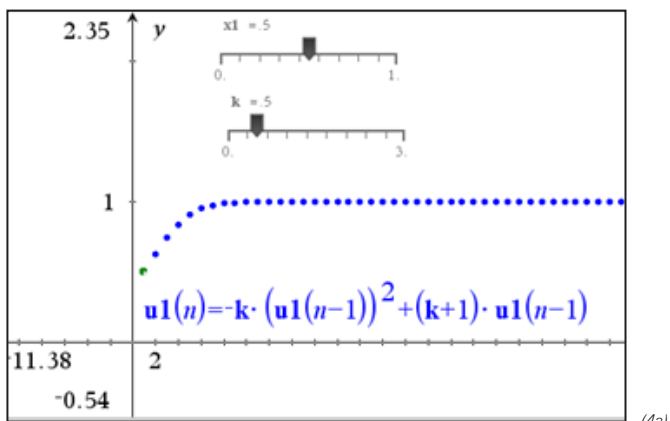
$$x_{n+1} = -k \cdot x_n^2 + (k+1) \cdot x_n,$$

respektive die Iterationsfunktion:

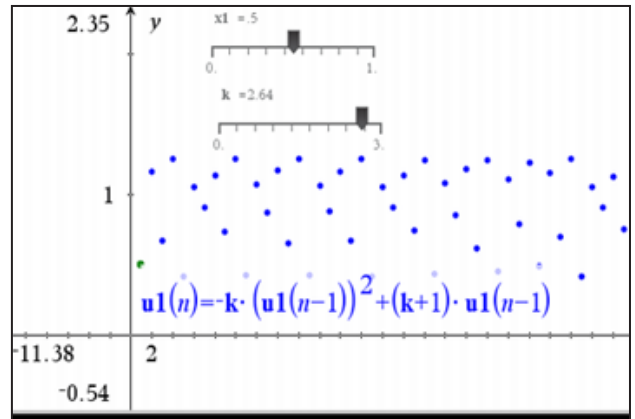
$$\varphi(x) = -k \cdot x^2 + (k+1) \cdot x,$$

In Abhängigkeit von  $k$  erhält man entweder Konvergenz gegen 1 oder periodisches oder chaotisches Verhalten.

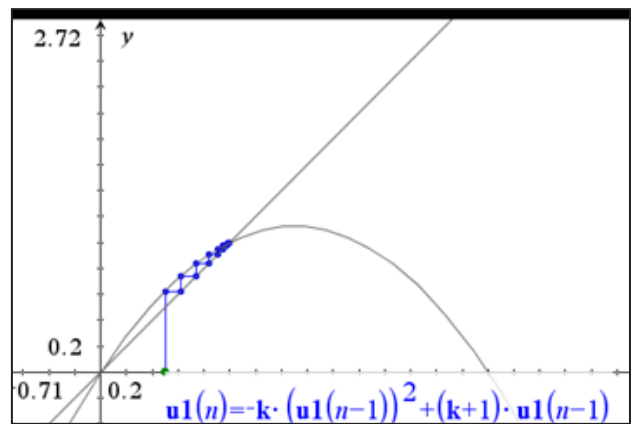
Wenn der Betrag der Steigung der Iterationsfunktion im Fixpunkt kleiner als 1 ist, dann konvergiert die Iteration. Im Cobweb-Diagramm (Abbildung 4) sieht man dies sehr schön und erkennt den Zusammenhang mit dem Fixpunkt-Satz.



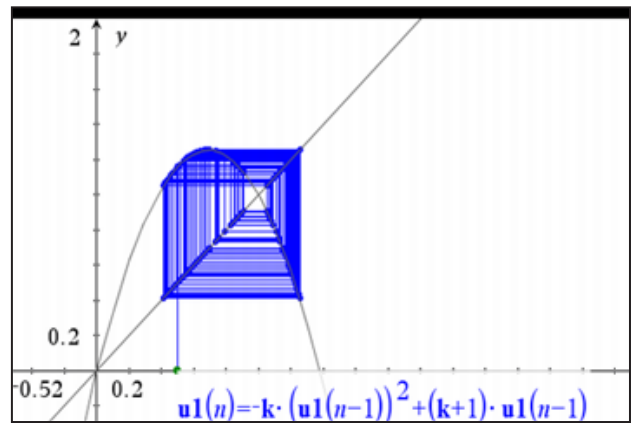
(4a)



(4b)



(4c)



(4d)

Abb.4a–4d: Diskretes logistisches Wachstum

## 3. Verallgemeinertes Heronverfahren

Im schon erwähnten Heft [1] wird das Heron-Verfahren ausführlich erklärt und eine offene Aufgabe dient der Verallgemeinerung.

Heron (Quadratwurzel): Aus  $x^2 = a$  mit  $a > 0$  folgt,

$$x = \frac{a}{x} = \varphi(x)$$

Diese Iterationsfunktion  $\varphi$  ist jedoch nicht geeignet. Ist  $x_1$  irgendein Näherungswert für die Wurzel aus  $a$  und ist  $x_1 < \sqrt{a}$ , dann ist

$$\frac{a}{x_1} > \sqrt{a}$$



und umgekehrt. Es ist deshalb naheliegend, als nächste Näherung einen Mittelwert, z. B. den arithmetischen zu nehmen:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( x + \frac{a}{x} \right) \quad \text{resp.} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Diese Iteration konvergiert bekanntlich sehr rasch.

**1. Verallgemeinerung (k-te Wurzel):**

Es scheint naheliegend die Methode auf höhere Wurzeln zu verallgemeinern. Aus  $x^k = a$ , ( $a > 0$ ) folgt:

$$x = \frac{a}{x^{k-1}}$$

Ist  $x_1$  irgendein Näherungswert und ist

$$x_1 < \sqrt[k]{a} \Rightarrow \frac{a}{x_1^{k-1}} > \sqrt[k]{a}$$

und umgekehrt. Dies führt auf die Iteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left( x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

Diese Verallgemeinerung konvergiert jedoch nur für  $k < 4$ . Für  $k > 3$  ist die Lipschitzbedingung (s. o.) für kein offenes Intervall, welches  $x_*$  enthält, erfüllt.

**2. Verallgemeinerung: k-te Wurzel mit gewichtetem Mittelwert (gewichtetes arithmetisches Mittel):**

Das arithmetische Mittel

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad a < b$$

teilt das Intervall  $[a,b]$  im Verhältnis 1:1. Möchte man dieses Intervall in einem andern Verhältnis  $u:v$  teilen, dann wird dies durch das **gewichtete arithmetische Mittel**

$$m' = \frac{v \cdot a + u \cdot b}{u + v}$$

bewirkt, wie leicht nachgerechnet werden kann. Betrachtet man die beiden erwähnten Näherungen  $x_1$  und  $x_1'$

$$x_1' = \frac{a}{x_1^{k-1}}$$

für die  $k$ -te Wurzel

$$x_* = \sqrt[k]{a}$$

etwas genauer, dann stellt man fest, dass das arithmetische Mittel von  $x_1$  und  $x_1'$  nicht besonders gut als nächste Näherung geeignet ist. Setzen wir  $x_1 = x_* + \Delta x$  ( $\Delta x \approx 0$ , so dass Summanden, welche die zweite, dritte, vierte etc. Potenz von  $\Delta x$  enthalten, vernachlässigt werden können), dann ist

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{a}{x_1^{k-1}} = \frac{x_*^k}{(x_* + \Delta x)^{k-1}} \\ &\approx \frac{x_*^k}{x_*^{k-1} + (k-1) \cdot \Delta x \cdot x_*^{k-2}} \\ &= \frac{x_*^2}{x_* + (k-1) \cdot \Delta x} \cdot \frac{x_* - (k-1) \cdot \Delta x}{x_* - (k-1) \cdot \Delta x} \\ &= \frac{x_*^2 \cdot (x_* - (k-1) \cdot \Delta x)}{x_*^2 - (k-1)^2 \cdot (\Delta x)^2} \approx x_* - (k-1) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Vergleicht man die beiden Näherungen  $x_1 = x_* + \Delta x$  und  $x_1' \approx x_* - (k-1) \cdot \Delta x$ , dann teilt  $x_*$  das Intervall  $[x_1, x_1']$  ungefähr im Verhältnis 1:( $k-1$ ). Folglich ist es naheliegend, als nächsten Näherungswert den gewichteten Mittelwert

$$x_2 = \frac{(k-1) \cdot x_1 + x_1'}{k}$$

zu verwenden. Man erhält die Iterationsfunktion

$$\varphi(x) = \frac{(k-1) \cdot x + \frac{a}{x^{k-1}}}{k} \quad \text{resp.} \quad x_{n+1} = \frac{(k-1) \cdot x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{k}$$

Damit kann jede  $k$ -te Wurzel aus einer positiven reellen Zahl iterativ approximiert werden. In der nachstehenden Abbildung 5 sieht man, wie sowohl der Wurzelexponent  $k$  wie auch der Radikand  $r$  und der Anfangswert  $a_1$  der Iteration mit einem Schieberegler verändert werden können. Weil die Steigung der Iterationsfunktion im Fixpunkt verschwindet, ist die Konvergenz besonders gut.

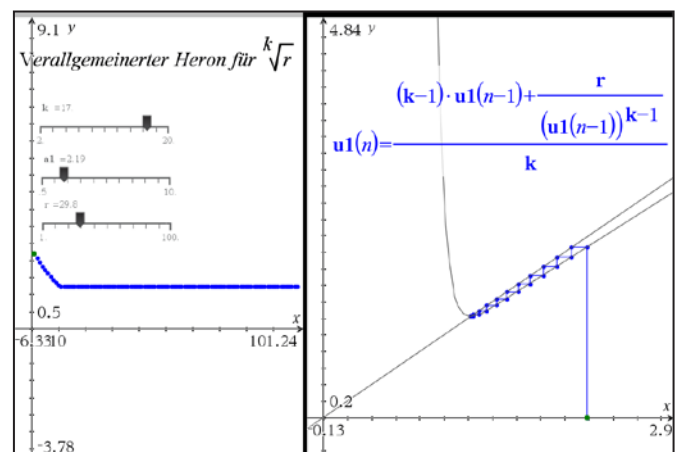


Abb.5: Verallgemeinertes Heron-Verfahren

Bemerkung: Das Newton-Verfahren, welches jedoch die Analysis voraussetzt, führt auf dasselbe Ergebnis. Die vorliegende Herleitung zeigt, wie auch mit elementaren Mitteln ein universelles Verfahren entwickelt werden kann.

**Literatur**

- [1] B. Frei, R. Hugelshofer, R. Märki: *Funktionen und Modelle, kontinuierlich und diskret*; Texas Instruments 2014
- [2] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*; Teubner 1981

**Autor:**

Robert Märki (T<sup>3</sup> Schweiz)

Informationen zum Lehrerfortbildungsprojekt T<sup>3</sup> finden Sie unter:

[www.t3deutschland.de](http://www.t3deutschland.de)  
[www.t3oesterreich.at](http://www.t3oesterreich.at)  
[www.t3schweiz.ch](http://www.t3schweiz.ch)

# Tipps und Tricks:

## Binomialverteilung und dreimal-mindestens Aufgabe Martin Kesting



Betrachtet wird eine Bernoulli-Kette der Länge  $n$ . Typische Aufgaben, in denen  $n$  gesucht ist, lauten etwa so:

*Wie viele Versuche benötigt man mindestens, um bei einer Trefferwahrscheinlichkeit  $p=0.3$  mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens 5 Treffer zu erreichen?*

Die Binomialverteilung kann mit Befehlen der Art **binomPdf** und **binomCdf** oft nur näherungsweise berechnet werden. Für eine exakte Formel ist es im Allgemeinen eine gute Idee, die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses zu betrachten, also „höchstens 4“ statt „mindestens 5“ Treffer:

Die Wahrscheinlichkeit bei  $n$  Versuchen höchstens 4 Treffer zu erhalten ist

$$\text{binomcdf}(n) := \sum_{k=0}^4 \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Der Befehl `binomCdf` sollte gleichwertig sein, liefert aber zum Beispiel für  $n=10$  eine Abweichung:  
`binomCdf(10, p, 4) - binomcdf(10)`  $\rightarrow$   $-4.93\text{E-}11$

Offenbar wird eine Näherungsformel verwendet.

Abb. 1

Der Versuch die Aufgaben mit Hilfe der fertigen Formeln per `solve`-Befehl zu lösen scheidet daher grundsätzlich. Die exakte Formel kann helfen:

`solve(1-binomCdf(n, p, 0.4) ≥ 0.9, n)`  
 $\rightarrow$  `binomCdf(n, 0.3, 0, 4) ≤ 0.1`

liefert keine Lösung, auch mit der exakten Formel scheitert `solve` an der Ungleichung, kann aber die Gleichung für den Grenzfall lösen:  
`solve(1-binomcdf(n)=0.9, n)`  $\rightarrow$   $n=24.515276808$

Die Lösung ist demnach  $n=25$ , denn  
`1-binomCdf(24, p, 4)`  $\rightarrow$   $0.888924776739$  und  
`1-binomCdf(25, p, 4)`  $\rightarrow$   $0.909528081446$

Abb. 2

Dieser Weg, eine letztlich sehr komplizierte Gleichung per `solve` lösen zu lassen, wobei zuvor die Bernoulli-Formel eingegeben wird, ist nicht unbedingt schneller, als gleich auf die Näherungsformel und systematisches Probieren zu setzen:

A	B	C
<code>=seq(1-binomcdf(n, 'p', 0, 4),</code>		
	0.853451248552	
23	0.864397033041	
24	0.888924776739	
25	0.909528081446	
26	0.926697502035	
27	0.940901295431	
A	<code>=seq(1-binomcdf(n, 'p', 0, 4), n, 1, 30)</code>	

Abb. 3

Der Befehl `seq()` gestattet die Ausgabe der Wahrscheinlichkeiten für verschiedene  $n$  in einer Tabelle.



Martin Kesting, Ilmenau (D)

## Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht. Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden. Ihr Lob spornt uns an.

**Senden Sie Ihre Beiträge bitte per E-Mail an unsere TI-Nachrichten Redaktion:**  
 ti-nachrichten@ti.com

**oder per Post an**

Texas Instruments, Education Technology, TI-Nachrichten, Haggertystraße 1, 85356 Freising, Deutschland

Bitte beachten Sie die Hinweise für Autoren auf unserer Webseite.

# Texas Instruments Serviceangebot

## Informieren & Ausprobieren

### Ich interessiere mich für

Bitte Zutreffendes ankreuzen – und künftig gezielte Informationen erhalten:

#### Numerische Graphikrechner (GTR):



TI-82 STATS



TI-84 Plus



TI-Nspire™ CX  
Handheld



TI-84 Plus C

#### Computeralgebrasystem (CAS):



TI-Nspire™ CX CAS  
Handheld

#### Software/Apps:



TI-Nspire™/TI-Nspire™ CAS Software

TI-Nspire™/TI-Nspire™ CAS App für iPad



Sonstige TI-Software  
(z.B. TI-SmartView™, Emulator Software)

#### TI-Nspire™ Navigator System:



Verbindet TI-Nspire™/TI-Nspire™ CAS  
Handhelds zu einer drahtlosen  
Lernumgebung im Klassenzimmer

#### Weitere TI-Produkte:

(wie z.B. TI-30X Plus MultiView™ Schulrechner)



\_\_\_\_\_

## Rückantwort an:

### Texas Instruments

Fax: +49(0) 81 61-80 31 85

E-Mail: [ti-nachrichten@ti.com](mailto:ti-nachrichten@ti.com)

Ich habe Interesse an einer *kostenlosen Rechnerausleihe mit Zubehör* für maximal 4 Wochen (für GTR und CAS möglich):

Gewünschtes Produkt: \_\_\_\_\_

Gewünschter Termin: \_\_\_\_\_

Ich bin an einer *Produktpräsentation/Lehrerfortbildung* interessiert, die von TI oder dem Lehrernetzwerk T<sup>3</sup> durchgeführt wird. Bitte kontaktieren Sie mich.

Ich bin an Informationen zu *Messwert-erfassungssystemen* interessiert.

Ich möchte auch zukünftig regelmäßig über TI-Produkte und Serviceleistungen informiert werden:

Ich bevorzuge E-Mails.

Ich bevorzuge Postsendungen.

Ich möchte auch zukünftig Aufgabenbeispiele sowie Tipps & Tricks zum Einsatz der TI-Technologie erhalten:

TI-Nachrichten Lehrer-Magazin (Print)

TI-Materialien E-Newsletter/E-Magazin

#### Kontaktdaten (Bitte vollständig und in Druckschrift ausfüllen.)

Privatadresse

Schuladresse

Schule \_\_\_\_\_

Name/Vorname \_\_\_\_\_

Straße \_\_\_\_\_

PLZ/Ort \_\_\_\_\_

Land \_\_\_\_\_

Telefon: \_\_\_\_\_

E-Mail \_\_\_\_\_

Ort/Datum \_\_\_\_\_

Unterschrift \_\_\_\_\_

Weitere Infos & Serviceangebote finden Sie hier:

[education.ti.com/deutschland](http://education.ti.com/deutschland)

[education.ti.com/oesterreich](http://education.ti.com/oesterreich)

[education.ti.com/schweiz](http://education.ti.com/schweiz)

Oder rufen Sie uns an! TI-Customer Service Center:

Tel: 00 800-4 84 22 73 7 (Anruf kostenlos)

Die oben genannten Daten werden elektronisch gespeichert und dienen dazu, Sie zukünftig über Angebote und Serviceleistungen von Texas Instruments zu informieren. Wenn Sie keine weiteren Informationen wünschen, kreuzen Sie bitte an:  Sie haben jederzeit Anspruch auf Zugang zu den Sie betreffenden Daten. TI behält sich das Recht vor, alle Preise, Produktspezifikationen und Serviceprogramme ohne vorherige Ankündigung zu ändern.

© 2014 Texas Instruments

 **TEXAS  
INSTRUMENTS**

Ihre Erfahrung. Unsere Technologie. Mehr Lernerfolg.

# Wir sind für Sie da

## Innovative Technologie

Graphikrechner TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-84 Plus C Silver Edition, TI-89 Titanium, Voyage™ 200, TI-Nspire™ (mit Touchpad), TI-Nspire™ CAS (mit Touchpad) und der TI-Nspire™ CX Modelle durch zusätzliche Applikationen und/oder Upgrades erweitern. Neben kompatibler PC Software gibt es nun auch die TI-Nspire™ App für iPad® und die TI-Nspire™ CAS App für iPad®. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

## Praktische Präsentationsmöglichkeiten

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen™, Overheadprojektor, Beamer oder auch am Whiteboard.

## Flexible Verbindungsmöglichkeiten

Die Verbindungskabel zu den TI-Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen ermöglichen eine schnelle und stabile Verbindung zum PC oder Mac.

## Unkomplizierte Messwerterfassung

Portable, universell einsetzbare Messwerterfassungssysteme für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Verschiedene Sensoren erhältlich.

## Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Graphikrechner oder ein Computeralgebrasystem testen? Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel-exemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!

Mehr Informationen, kostenlose Downloads sowie die Anmelde-möglichkeit zum E-Newsletter „TI-Materialien“ finden Sie auf den TI-Webseiten oder unter: [www.ti-unterrichtsmaterialien.net](http://www.ti-unterrichtsmaterialien.net)

Viele Handreichungen von TI und T<sup>3</sup> können Sie auch über den TI-Unterrichtsmaterialien Webshop beziehen: [www.ti-activities-shop.net](http://www.ti-activities-shop.net)

# Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Service Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

## Wir sind für Sie da:



Texas Instruments  
Customer Service Center  
Tel: 00 800 - 48 42 27 37 (Anruf kostenlos)  
Fax: +49 (0) 8161-80 3185

## Allgemeine Informationen:

[ti-cares@ti.com](mailto:ti-cares@ti.com)

## Unterrichtsmaterialien

Neben den „TI-Nachrichten“ gibt es eine Fülle von begleitenden Unterrichtsmaterialien zum Einsatz unserer Produkte. Zudem wird TI-Technologie in führenden Lehrwerken eingesetzt.

## Lehrerfortbildungen

Graphikrechner und CAS sind für viele Kolleginnen und Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen an Ihrer Schule oder auf Veranstaltungen! Wenden Sie sich direkt an T<sup>3</sup>. Mehr Informationen zu T<sup>3</sup> finden Sie im Internet:

T<sup>3</sup> Deutschland: [www.t3deutschland.de](http://www.t3deutschland.de)

T<sup>3</sup> Österreich: [www.t3oesterreich.at](http://www.t3oesterreich.at)

T<sup>3</sup> Schweiz: [www.t3schweiz.ch](http://www.t3schweiz.ch)

Oder kontaktieren Sie Ihren TI-Schulberater sowie unser Customer Service Team.

## Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen:

[ti-loan@ti.com](mailto:ti-loan@ti.com)

## Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:

[ti-nachrichten@ti.com](mailto:ti-nachrichten@ti.com)

## Garantie

Auf alle Graphikrechner und Computeralgebrasysteme von Texas Instruments bietet Texas Instruments 3 Jahre Herstellergarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Service Center an. Oft kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

[education.ti.com/deutschland](http://education.ti.com/deutschland) • [education.ti.com/oesterreich](http://education.ti.com/oesterreich) • [education.ti.com/schweiz](http://education.ti.com/schweiz)  
[ti-cares@ti.com](mailto:ti-cares@ti.com)