STI2D

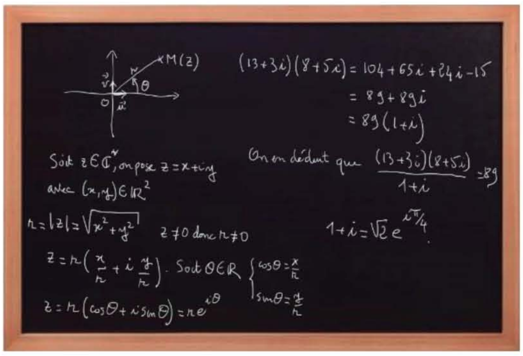
Thème: Nombres Complexes

Forme algébrique, trigonométrique

TI-82 Advanced
Edition Python

TI-83 Premium CE
Edition Python

Enoncé



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les nombres complexes $z_1 = \frac{12+16i}{7+i}$ et $z_2 = -2 + 2i$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_2.

   En déduire que z_2^4 est un réel que l'on déterminera.
3. Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

   $z_A = 2 + 2i,\ z_B = -2 + 2i$ et $z_C = 4i$

   Monter que le triangle ABC est rectangle isocèle.

1. Forme algébrique

On a $z_1 = \frac{12+16i}{7+i}$, pour déterminer la forme algébrique de z_1 il faut multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, soit $7 - i$. Ainsi :

$$z_1 = \frac{(12+16i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{12\times7-12i+16\times7i-16i^2}{49+1} = \frac{84-12i+112i+16}{50} = \frac{100+100i}{50} = \frac{50(2+2i)}{50}$$

Ce qui nous donne $z_1 = 2 + 2i$.

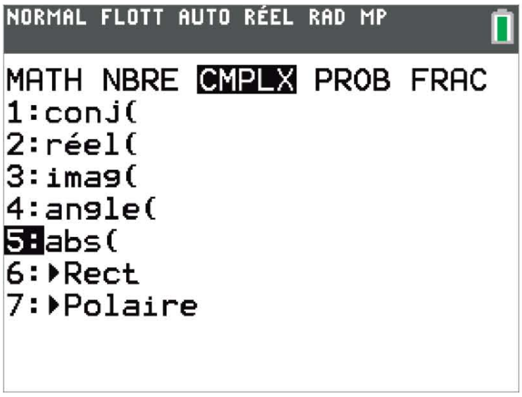
On vérifie nos calculs à l'aide de la calculatrice. Le nombre complexe i est obtenu en appuyant sur 2nde . .

2. Forme exponentielle

On a $z_2 = -2 + 2i$. Commençons par calculer le module de z_2 :

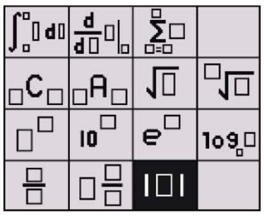
$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Vérifions notre calcul en appuyant sur math puis onglet **CMPLX** et choisir **abs**



Puis on entre $-2 + 2i$.

On peut aussi utiliser la touche 2nde puis choisir |□|) :

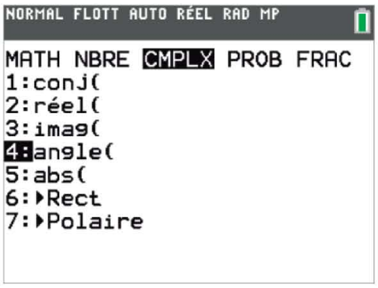


Déterminons maintenant un argument de z_2 :

On a $z_2 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

On reconnait la ligne trigonométrique $\frac{3\pi}{4}$: $\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

On peut vérifier ce résultat à l'aide de l'instruction **angle** accessible dans math onglet **CMPLX** :



Ce qui nous donne :

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

d'où $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

On peut aussi vérifier ce dernier résultat en convertissant notre nombre complexe à l'aide de l'instruction **Polaire** :

3. Interprétation géométrique

Calculons $AB = |z_B - z_A| = |-2 + 2i - (2 + 2i)| = |-2 + 2i - 2 - 2i|$

On a donc $AB = |-4| = 4$

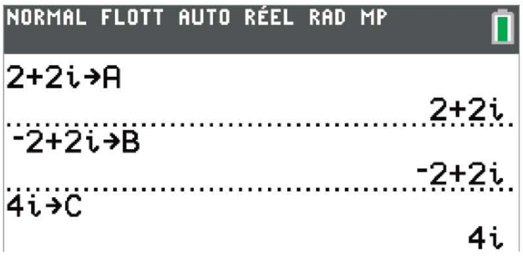
D'autre part $AC = |z_C - z_A| = |4i - (2 + 2i)| = |-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$

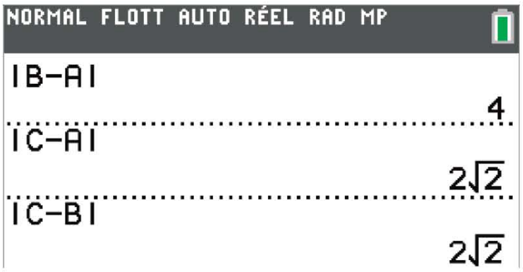
Ce qui nous donne $AC = \sqrt{8}$.

Et enfin $BC = |z_C - z_B| = |4i - (-2 + 2i)| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2}$

D'où $BC = \sqrt{8}$.

On vérifie nos calculs en affectant aux variables **A**, **B** et **C** de notre calculatrice TI les affixes respectives z_A, z_B et z_C. Puis on calcule les différents modules comme ci-contre.





On vient de voir que $AC = BC = \sqrt{8}$, le triangle ABC est donc isocèle en C.

Montrons maintenant que le triangle ABC est un triangle rectangle :
On a $AC^2 + BC^2 = 8 + 8 = 16$ et $AB^2 = 4^2 = 16$.

Ainsi on obtient l'égalité $AC^2 + BC^2 = AB^2$, ce qui prouve, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle ABC est rectangle isocèle en C.