

Énoncé

On étudie le nombre de nouveaux abonnements à internet en très haut débit dans un pays chaque trimestre. A partir du 4^{ème} trimestre de l'année 2016 le nombre de nouveaux abonnements augmente de 4% à chaque trimestre.

On note u_n le nombre, en millions, de nouveaux abonnements à internet en très haut débit en France au bout de n trimestres. On donne $u_0 = 0,41$.

1. Vérifier en détaillant le calcul que $u_1 = 0,6765$. Que représente ce nombre ?
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner sa raison. Calculer u_2 et u_3 .
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Selon ce modèle, combien de nouveaux abonnements y aura-t-il au 1^{er} trimestre 2019 ? Au 4^{ème} trimestre 2022 ?
5. Calculer le nombre de nouveaux abonnés de 2019 à 2022 (année entière).
6. On cherche à déterminer à partir de quelle valeur de n , le nombre de nouveaux abonnés u_n dépassera 2 millions. Compléter la fonction Python `seuil` qui permet de renvoyer cette valeur de n .

1. Calcul de u_1

Chaque trimestre, le nombre de nouveaux abonnés augmente de 4%. Le coefficient multiplicateur associé à cette augmentation est 1,04.

Donc $u_1 = u_0 \times 1,04 = 0,4264$. Ce qui représente 426400 nouveaux abonnements au 1^{er} trimestre 2017.

2. Nature de la suite

Chaque trimestre, le nombre de nouveaux abonnés augmente de 4%, ainsi pour passer d'un terme au suivant de la suite on multiplie par 1,04 :

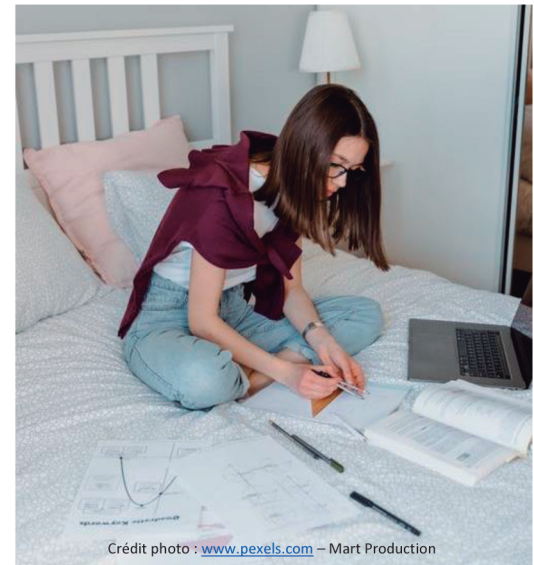
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 1,04u_n$ ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $u_0 = 0,41$.

Etant donné que nous venons de calculer u_1 , en écrivant ***1.04** la calculatrice va effectuer le calcul **Rep*1.04**. **Rep** signifie réponse précédente soit u_1 , on a donc bien multiplié u_1 par 1,04 ce qui nous donne u_2 et en appuyant juste sur **entrer**, la calculatrice reproduit ce même calcul (sauf que **Rep** correspond à u_2) et renvoie donc u_3 .

Ainsi $u_2 \approx 0,443$ et $u_3 \approx 0,461$

3. Expression explicite de u_n

D'après le cours : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0q^n$ donc $u_n = 0,41 \times 1,04^n$.



```
ÉDITEUR : A
LIGNE DU SCRIPT 0006
def seuil(a):
    n=0
    u=0.41
    while u<...:
        n=n+1
        u=...
    return n
```

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP	
0.41*1.04	0.4264
Rep*1.04	0.443456
Rep*1.04	0.46119424

4. Prévision

Le 4^{ème} trimestre 2016 correspond à u_0 , donc le 4^{ème} trimestre 2017 correspond à u_4 , puis le 4^{ème} trimestre 2018 à u_8 et donc le 1^{er} trimestre 2019 correspond à u_9 . On a $u_9 = 0,41 \times 1,04^9 \approx 0,584$


Et le 4^{ème} trimestre 2022 correspond à $u_{24} = 0,41 \times 1,04^{24} \approx 1,051$

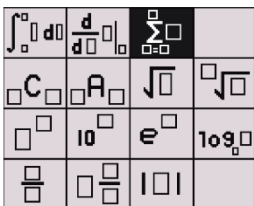
Ce qui représente 1 million 51 mille abonnements.

5. Calcul de somme

Le nombre total de nouveaux abonnés de 2019 à 2022 est

$$u_9 + u_{13} + \dots + u_{24} = u_9 \times \frac{1-q^{16}}{1-q} = 0,41 \times 1,04^9 \times \frac{1-1,04^{16}}{1-1,04} \approx 12,736$$

On peut vérifier ce calcul avec notre calculatrice à l'aide du symbole Σ accessible dans  :



$$\sum_{n=9}^{24} u_n = \sum_{n=9}^{24} 0,41 \times 1,04^n = 12,736$$

Ce qui représente 12 millions sept cent trente-six mille abonnements.

6. Algorithme de seuil

On complète le script avec la condition $u < a$ et pour calculer le terme suivant de la suite on écrit : $u = 1.04 * u$.

Après avoir exécuté le script on lance `seuil(2)` et on obtient $n=41$.

On vérifie en console en calculant u_{40} et u_{41} et on constate que 41 est bien la bonne réponse. 41 correspond au 1^{er} trimestre 2027

```

PYTHON SHELL
>>> # Shell Reinitialized
>>> # L'exécution de A
>>> from A import *
>>> seuil(2)
41
>>> 0.41*1.04**40
1.968418457454029
>>> 0.41*1.04**41
2.047155195752191
>>> |

```

```

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
0.41*1.04^9
.....0.5835578431
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
0.41*1.04^24
.....1.050954708

```

```

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
0.41*1.04^9*(1-1.04^16)/(1-1.04)
.....12.73587632
Σ(0.41*1.04^N)
N=9
.....12.73587632

```

```

ÉDITEUR : A
LIGNE DU SCRIPT 0007
def seuil(a):
    n=0
    u=0.41
    while u<a:
        n=n+1
        u=1.04*u
    return n

```

Fns... a A # Outils Exéc Script