

## Énoncé

On étudie le nombre de nouveaux abonnements à internet en très haut débit dans un pays chaque trimestre. A partir du 4<sup>ème</sup> trimestre de l'année 2016 le nombre de nouveaux abonnements augmente de 4% à chaque trimestre.

On note  $u_n$  le nombre, en millions, de nouveaux abonnements à internet en très haut débit en France au bout de  $n$  trimestres. On donne  $u_0 = 0,41$ .

1. Vérifier en détaillant le calcul que  $u_1 = 0,6765$ . Que représente ce nombre ?
2. Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ? Donner sa raison. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Selon ce modèle, combien de nouveaux abonnements y aura-t-il au 1<sup>er</sup> trimestre 2019 ? Au 4<sup>ème</sup> trimestre 2022 ?
5. Calculer le nombre de nouveaux abonnés de 2019 à 2022 (année entière).
6. On cherche à déterminer à partir de quelle valeur de  $n$ , le nombre de nouveaux abonnés  $u_n$  dépassera 2 millions. Compléter la fonction Python `seuil` qui permet de renvoyer cette valeur de  $n$ .

### 1. Calcul de $u_1$

Chaque trimestre, le nombre de nouveaux abonnés augmente de 4%. Le coefficient multiplicateur associé à cette augmentation est 1,04.

Donc  $u_1 = u_0 \times 1,04 = 0,4264$ . Ce qui représente 426400 nouveaux abonnements au 1<sup>er</sup> trimestre 2017.

### 2. Nature de la suite

Chaque trimestre, le nombre de nouveaux abonnés augmente de 4%, ainsi pour passer d'un terme au suivant de la suite on multiplie par 1,04 :

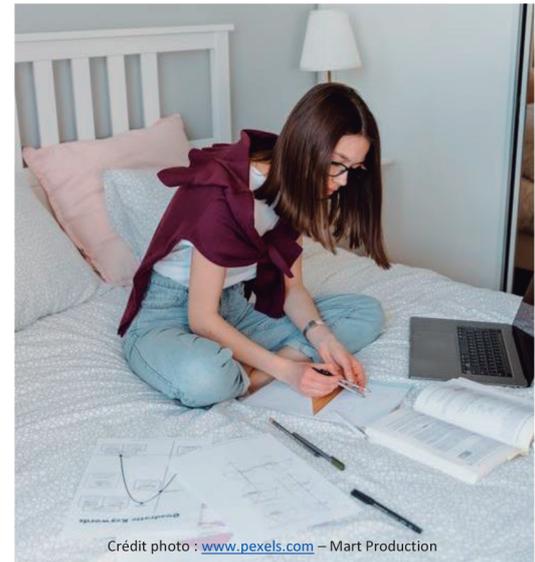
Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$   $u_{n+1} = 1,04u_n$  ce qui prouve que la suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q = 1,04$  et de premier terme  $u_0 = 0,41$ .

Etant donné que nous venons de calculer  $u_1$ , en écrivant **\*1.04** la calculatrice va effectuer le calcul **Rep\*1.04**. **Rep** signifie réponse précédente soit  $u_1$ , on a donc bien multiplié  $u_1$  par 1,04 ce qui nous donne  $u_2$  et en appuyant juste sur **entrer**, la calculatrice reproduit ce même calcul (sauf que **Rep** correspond à  $u_2$ ) et renvoie donc  $u_3$ .

Ainsi  $u_2 \approx 0,443$  et  $u_3 \approx 0,461$

### 3. Expression explicite de $u_n$

D'après le cours : pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $u_n = u_0q^n$  donc  $u_n = 0,41 \times 1,04^n$ .



```
ÉDITEUR : A
LIGNE DU SCRIPT 0006
def seuil(a):
    n=0
    u=0.41
    while u<...:
        n=n+1
        u=...
    return n
```

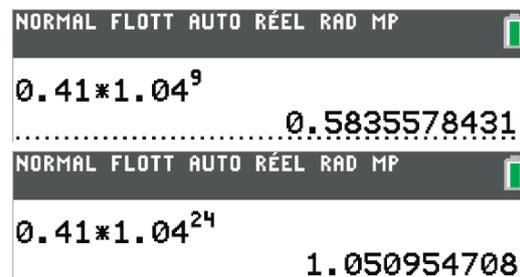
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP	
0.41*1.04	0.4264
Rep*1.04	0.443456
Rep*1.04	0.46119424

## 4. Prévision

Le 4<sup>ème</sup> trimestre 2016 correspond à  $u_0$ , donc le 4<sup>ème</sup> trimestre 2017 correspond à  $u_4$ , puis le 4<sup>ème</sup> trimestre 2018 à  $u_8$  et donc le 1<sup>er</sup> trimestre 2019 correspond à  $u_9$ . On a  $u_9 = 0,41 \times 1,04^9 \approx 0,584$

Et le 4<sup>ème</sup> trimestre 2022 correspond à  $u_{24} = 0,41 \times 1,04^{24} \approx 1,051$

Ce qui représente 1 million 51 mille abonnements.

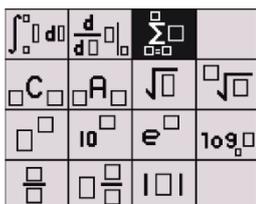


## 5. Calcul de somme

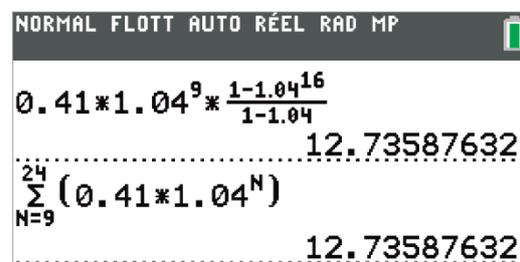
Le nombre total de nouveaux abonnés de 2019 à 2022 est

$$u_9 + u_{13} + \dots + u_{24} = u_9 \times \frac{1-q^{16}}{1-q} = 0,41 \times 1,04^9 \times \frac{1-1,04^{16}}{1-1,04} \approx 12,736$$

On peut vérifier ce calcul avec notre calculatrice à l'aide du symbole  $\Sigma$  accessible dans :



$$\sum_{n=9}^{24} u_n = \sum_{n=9}^{24} 0,41 \times 1,04^n = 12,736$$



Ce qui représente 12 millions sept cent trente-six mille abonnements.

## 6. Algorithme de seuil

On complète le script avec la condition  $u < a$  et pour calculer le terme suivant de la suite on écrit :  $u = 1.04 * u$ .

Après avoir exécuté le script on lance `seuil(2)` et on obtient  $n=41$ .

On vérifie en console en calculant  $u_{40}$  et  $u_{41}$  et on constate que 41 est bien la bonne réponse. 41 correspond au 1<sup>er</sup> trimestre 2027

