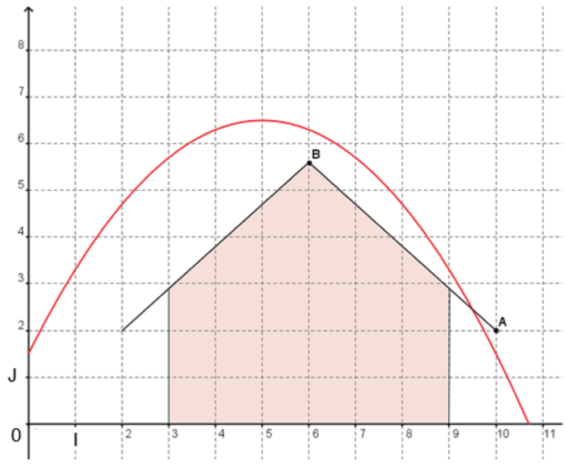
2nd degré : maximum & intersection

Enoncé

Durant une balade en forêt, un enfant se fabrique un arc et des flèches. Il s'intéresse à la trajectoire d'une de ses flèches. L'enfant décide de tirer sa flèche par-dessus un hangar désaffecté. La trajectoire est une portion de la courbe représentative de la fonction f située dans le quart plan rapporté au repère (O, I, J) ci-contre et définie pour tout réel x, par $f(x) = -0{,}2x^2 + 2x + 1{,}5$.



Une unité graphique correspond à 1 mètre dans la réalité.

1. a. De quelle hauteur, en mètre, la flèche est-elle tirée ? Justifier.

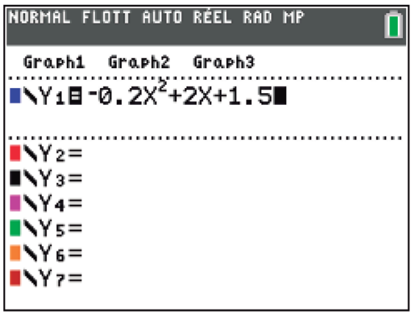
   b. Quelle hauteur maximale, en mètre, atteint-elle ? Justifier.

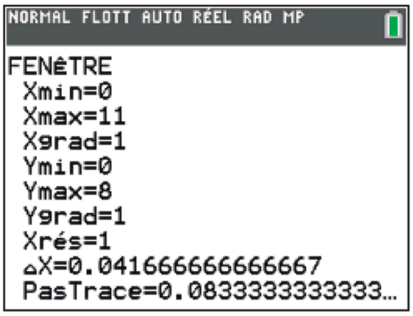
Une équation de la droite (AB) est $y = -0{,}9x + 11$. Démontrer que pour tout réel x, on a : $f(x) - y = -0{,}2(x-5)(x-9{,}5)$

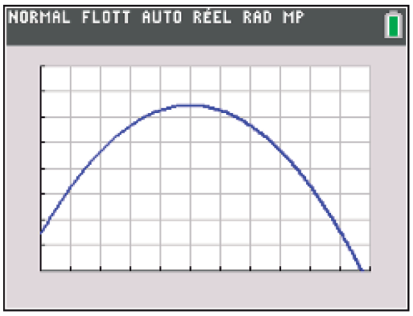
2. Quelles sont les coordonnées exactes du point d'impact sur le toit ?

Tracé initial

On commence par utiliser le menu f(x) pour entrer la fonction dans **Y₁**. Le graphique de l'énoncé nous permet de paramétrer rapidement une fenêtre adaptée à notre tracé, à l'aide du menu fenêtre . La touche graphe nous permet finalement d'obtenir la parabole de l'énoncé, ce qui va nous permettre de conjecturer les différentes réponses de l'exercice.

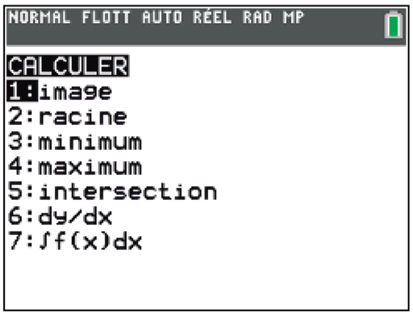


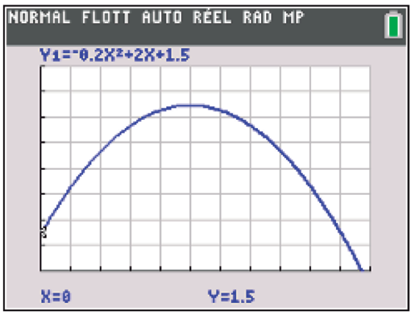


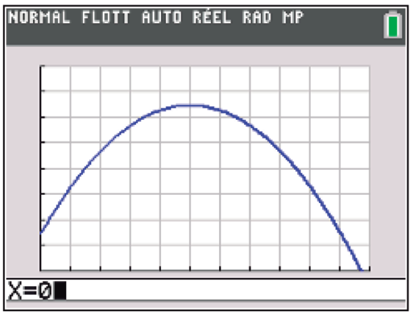


1.a. Image d'un réel par une fonction

Dans le menu 2nde trace (calculs f4), on sélectionne **1:image**, puis on entre la valeur **X=0** et on valide par entrer .







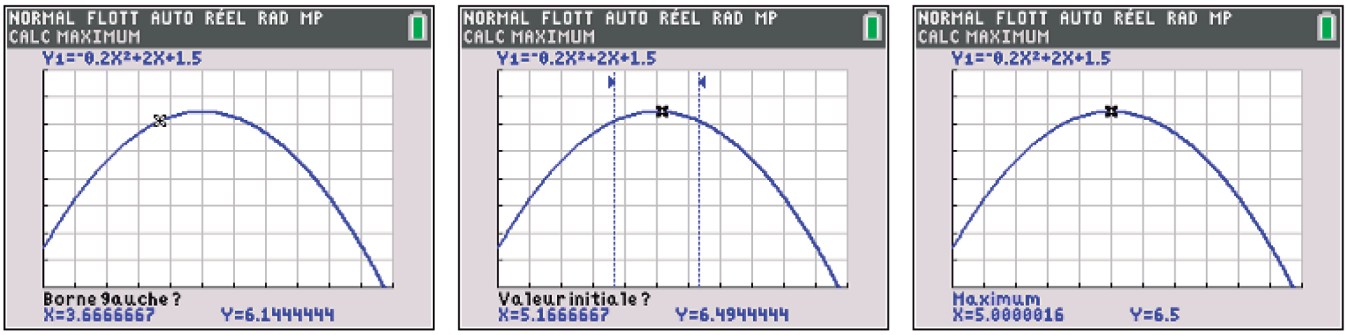
On valide ensuite cette conjecture par un calcul détaillé : $f(0) = -0{,}2 \times 0^2 + 2 \times 0 + 1{,}5 = 1{,}5$.

La flèche est donc tirée d'une hauteur de 1 mètre 50.

2^{nd} degré : maximum & intersection

1.b. Valeur maximale d'une fonction sur un intervalle

Dans le menu 2nde trace (calculs f4), on sélectionne **`4:maximum`**. De retour sur le graphique, on place le curseur à gauche du maximum et on appuie sur entrer. On se place ensuite à droite du maximum et on valide avec la touche entrer. On place enfin notre curseur près du maximum recherché et on appuie une troisième et dernière fois sur entrer.



L'abscisse du sommet S de la parabole est donné par la formule $-\frac{b}{2a}$. On a donc ici : $x_S = -\frac{2}{2\times(-0{,}2)} = 5$.

De plus, $y_S = f(5) = -0{,}2 \times 5^2 + 2 \times 5 + 1{,}5 = -5 + 10 + 1{,}5 = 6{,}5$. La hauteur maximale est donc de 6 mètres 50.

2. Justifier une égalité

D'une part : $f(x) - y = -0{,}2x^2 + 2x + 1{,}5 - (-\,0{,}9x + 11) = -0{,}2x^2 + 2x + 1{,}5 + 0{,}9x - 11 = -0{,}2x^2 + 2{,}9x - 9{,}5$

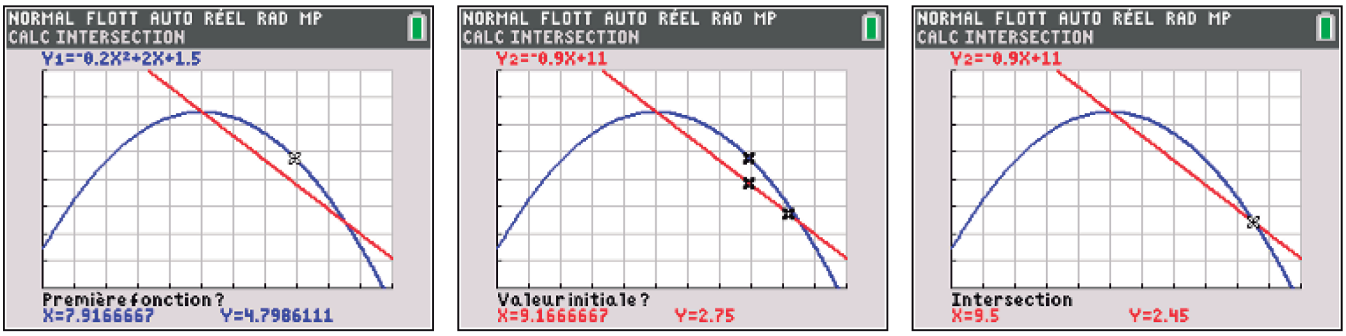
D'autre part : $-\,0{,}2(x-5)(x-9{,}5) = -0{,}2(x^2 - 9{,}5x - 5x + 47{,}5) = -0{,}2(x^2 - 14{,}5x + 47{,}5) = -0{,}2x^2 + 2{,}9x - 9{,}5$

L'égalité est ainsi justifiée, pour tout réel x.

3. Intersection de deux fonctions

Dans le menu f(x), on entre l'équation de la droite (AB) dans **Y2**.

Dans le menu 2nde trace (calculs f4), on sélectionne **`5:intersection`**. De retour au graphique, on valide le choix de **Y1** par la touche entrer, celui de **Y2** par entrer et enfin on se place près du point d'intersection recherché et on valide une troisième et dernière fois par entrer.



L'intersection I est justifiée par la résolution de l'équation $f(x) - y = 0$.

La question 2. nous permet donc d'écrire $-\,0{,}2(x-5)(x-9{,}5) = 0 \iff x = 5 \text{ ou } x = 9{,}5$.

Etant donné que nous recherchons une solution appartenant à l'intervalle $[6\,;10]$, on obtient donc $x_I = 9{,}5$.

De plus, $y_I = f(9{,}5) = -0{,}2 \times 9{,}5^2 + 2 \times 9{,}5 + 1{,}5 = -18{,}05 + 19 + 1{,}5 = 2{,}45$. Finalement, on a bien : $I(9{,}5\,;2{,}45)$.