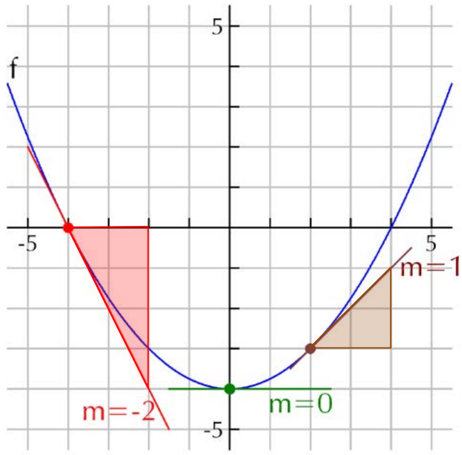
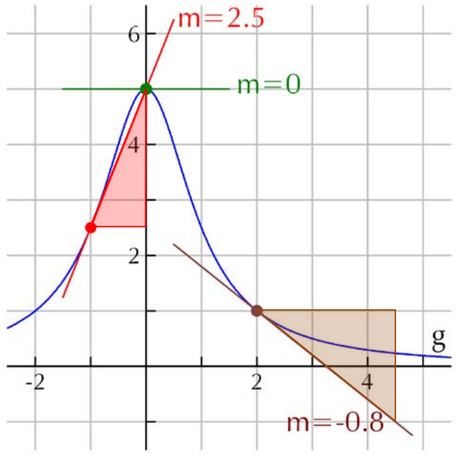
Lösungen

19. Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle

C. Aufgaben zum Grundstoff

1. a) 6 m/s b) 10.5 m/s c) 9 m/s d) 13.5 m/s e) 12 m/s f) 15 m/s
2. a) 6 b) 10.5 c) 9 d) 13.5 e) 12 f) 15
3. a) 4.905 m b) 4.905 m/s c) 9.81 m/s d) 19.62 m e) 9.81 m/s f) 19.62 m/s
   g) 31.32 m/s
4. a) Sekantensteigungen: $m_1=0$, $m_2=0.5$, $m_3=1$, $m_4=1.5$
   Tangentensteigung: $m_t=2$
   b) Sekantensteigungen: $m_1=-0.5$, $m_2=0$, $m_3=0.5$, $m_4=1.5$
   Tangentensteigung: $m_t=1$
5. a) $f'(-4)=-2$, $f'(0)=0$, $f'(2)=1$ b) $g'(-1)=2.5$, $g'(0)=0$, $g'(2)=-0.8$





6. a) $f'(-1)=2$, $f'(2)=2$ b) $f'(-3)=-1$, $f'(3)=1$, $f'(0)$ existiert nicht (Beispiel 19.4.1 (2a)).
   c) $f'(-3)=-3$, $f'(2)=2$, $f'(0)=0$ d) $f'(1)\approx1.44$, $f'(4)\approx0.36$
   e) $f'(0)=1$, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.5$, $f'(\pi)=-1$ f) $f'(0)=1$, $f'(1)\approx2.72$, $f'(-0.69)=0.5$
7. a) $f'(-1)=2$, $f'(2)=2$ b) $f'(-3)=-1$, $f'(3)=1$, $f'(0)$ existiert nicht (Beispiel 19.4.1 (2a)).
   c) $f'(-3)=-3$, $f'(2)=2$, $f'(0)=0$ d) $f'(1)\approx1.442695$, $f'(4)\approx0.360674$
   e) $f'(0)=1$, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.5$, $f'(\pi)=-1$ f) $f'(0)=1$, $f'(1)=e\approx2.718282$, $f'(-\ln 2)=0.5$
8. $f'(0)=-\frac{1}{4}$, $f'(3.99)=-5$, $f'(4)$ existiert nicht (senkrechte Tangente).
9. a) 0 m/s b) für $t\in[4, 6]$ und $t\in[8, 10]$ c) Das Fahrzeug steht still. d) 1 m/s e) 1 m/s
   f) Beschleunigung für $t\in[0, 4]$ und $t\in[10, 12]$, Abbremsen für $t\in[6, 8]$
10. $x_1=-4$ (senkrechte Tangente), $x_2=-2$ (Unstetigkeitsstelle), $x_3=2$ (Knickstelle), $x_4=3$ (Knickstelle)
11. a) Es ist die durchschnittliche Temperaturabnahme pro Höhenmeter zwischen 2 Messpunkten, von denen der eine auf 700 m ü. M. und der andere auf 1000 m ü. M. liegt. Einheit: °C/m.

Beim zweiten Differenzenquotienten liegt der eine Messpunkt auf 700 m ü. M., der andere Δh Meter höher.

b) Es ist ein Minuszeichen.

c) Die örtliche Temperaturabnahme auf exakt 700 m. ü. M. Einheit: °C/m.

d) Es ist ein Minuszeichen.

D. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

1. a) $1.5 \cdot t_0$ b) $3 \cdot t_0$
2. a) $\frac{a}{2} \cdot t_0$ b) $a \cdot t_0$
3. a) $\frac{1}{2} g \cdot t_0^2$ b) $\frac{1}{2} g \cdot t_0$ c) $g \cdot t_0$
4. a) $f'(-3)=-6$ b) $f'(-2)=-4$ c) $f'(0)=0$ d) $f'(1)=2$ e) $f'(5)=10$
5. t [s] = Zeit, während der Wasser in den Tank fliesst
   V(t) [dm^3 = Liter] = Volumen des Wassers, das nach t Sekunden im Tank ist
   h(t) [dm] = Höhe des Wassers nach t Sekunden
   A [dm^2] = Grundfläche des Tanks
   $V(t) = 50t,\ A = 12^2 \cdot \pi,\ h(t) = \dfrac{V(t)}{12^2 \cdot \pi} = \dfrac{25}{72\pi} \cdot t$
   a) $h'(10) \approx 0.110524$ dm/s b) $h'(20) \approx 0.110524$ dm/s
   c) $h'(60) \approx 0.110524$ dm/s d) $h'(t_0) \approx 0.110524$ dm/s
6. t [min] = Zeit seit dem Austreten von Öl
   r(t) [m] = Radius des Kreises nach t Minuten
   A(t) [m^2] = Fläche des Kreises nacht t Minuten
   $r(t)=2t,\ A(t) = \pi \cdot r(t)^2 = \pi \cdot 4t^2,\ A'(25) \approx 628.319\ [m^2 / min]$
   Variante: Beginnt die Zeitmessung erst dann, wenn der Kreisradius bereits 50 m misst, ist $r(t)=50+2t,\ A(t) = \pi \cdot r(t)^2 = \pi \cdot (50+2t)^2,\ A'(0) \approx 628.319\ [m^2 / min]$.
7. t [h]=Zeit nach dem Moment, in dem das Flugzeug von der Radarstation 10 km entfernt ist
   d(t) [km]=Abstand zwischen Flugzeug und Radarstation zum Zeitpunkt t
   x(t) [km]=horizontaler Abstand zwischen Flugzeug und Radarstation zum Zeitpunkt t
   h [km] = Flughöhe $= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ km
   $d(t) = 10 + 600 \cdot t,\ x(t) = \sqrt{d(t)^2 - 8^2} = \sqrt{360'000t^2 + 12'000t + 36},\ x'(0)=1000$ km/h
8. t [s] = Zeit nach dem Moment, als die Frau 3 m vor der Strassenlaterne war
   d(t) [m] = Abstand der Frau vom Fuss der Strassenlaterne zum Zeitpunkt t
   s(t) [m] = Schattenlänge zum Zeitpunkt t
   $d(t)=3-1.5t$, solange $t \le 2$ s ist
   Aus dem 2. Strahlensatz $s(t) : (s(t)+d(t))=1.75 : 7$ folgt $s(t) = 1 - \frac{1}{2}t;\ s'(0) = -\frac{1}{2}$ m/s.
9. t [s]=Zeit, während der der Nebenbuhler am unteren Leiternende zieht
   x(t) [m]=Abstand des unteren Leiterendes von der Hauswand nach t Sekunden
   h(t) [m]=Höhe des oberen Leiterendes über dem Boden
   $x(t)=1+0.5t,\ h(t) = \sqrt{5^2 - x(t)^2} = \sqrt{-\frac{1}{4}t^2 - t + 24}$
   a) $h'(1) \approx -0.157243$ m/s b) $h'(2) \approx -0.218218$ m/s c) $h'(4) = -0.375$ m/s
   d) $h'(6) \approx -0.666667$ m/s.

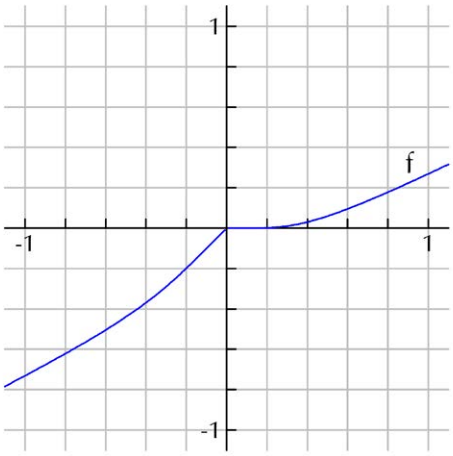
10. t [s] = Zeit nach dem Startschuss
d(t) [m] = Abstand zwischen dem Läufer und seinem Trainer zum Zeitpunkt t
α(t) = Winkel zwischen der Strecke Kamera–Läufer und der Normalen zur Bahn zum Zeitpunkt t
a) $d(t) = \sqrt{(100-10t)^2 + 5^2}$, $d'(5) \approx -9.950372$ m/s
b) $\tan\alpha(t) = \frac{100-10t}{5} = 20-2t$; $\alpha(t) = \arctan(20-2t)$
$\alpha'(5) \approx -0.019802$ /s (Bogenmass) bzw. -1.134570 °/s
Variante: Beginnt die Zeit erst 5 Sekunden nach dem Startschuss zu laufen, also in dem Augenblick, der für die Aufgabe wichtig ist, erhält man:
a) $d(t) = \sqrt{(50-10t)^2 + 5^2}$, $d'(0) \approx -9.950372$ m/s
b) $\tan\alpha(t) = \frac{50-10t}{5} = 10-2t$; $\alpha(t) = \arctan(10-2t)$
$\alpha'(0) \approx -0.019802$ /s (Bogenmass) bzw. -1.134570 °/s

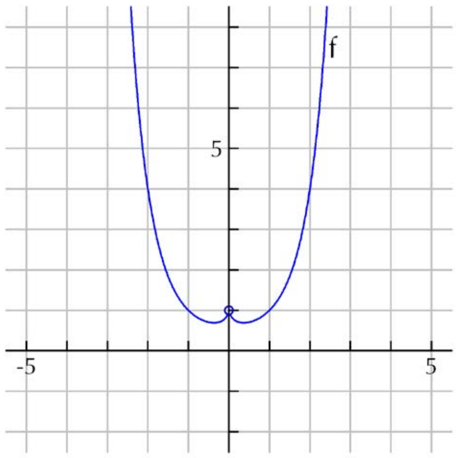
11. a) $\frac{V(t_1)-V(t_0)}{t_1-t_0}$ oder auch $\frac{V(t_0+\Delta t)-V(t_0)}{\Delta t}$ mit $\Delta t = t_1 - t_0$
b) $V'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{V(t_0+\Delta t)-V(t_0)}{\Delta t}$
c) $V'(t) < 0$

12. $A'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}$; Verkehrsdichte

13. a) stetig und differenzierbar b) weder stetig noch differenzierbar
c) stetig und differenzierbar d) stetig, aber nicht differenzierbar
e) stetig und differenzierbar f) stetig und differenzierbar

14. a) Graph siehe unten links b) ja c) nein





15. a) Graph siehe oben rechts.
b) Nein, 0^0 ist ein unbestimmter Ausdruck. Definiert man f(0)=1, ist f an der Stelle 0 stetig, aber nicht differenzierbar (Knickstelle).

16. a) f ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, f ist nicht differenzierbar an der Stelle x=−3.
b) f ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4, 7\}$, f ist nicht differenzierbar an den Stellen $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=7$.
c) f ist differenzierbar für $x \in (-5, 5)$, f ist nicht differenzierbar an den Stellen ±5.

d) f ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f ist an keiner Stelle nicht differenzierbar (an der Stelle 0 ist f nicht definiert und kann deshalb gar nicht auf Differenzierbarkeit untersucht werden).
e) f ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,\ 3\}$, f ist nicht differenzierbar an den Stellen ±3.
f) f ist differenzierbar für x>−4, f ist nicht differenzierbar an der Stelle 4. Für x<−4 ist f nicht definiert.
g) f ist differenzierbar für x< −3 und x>3, f ist nicht differenzierbar an den Stellen ±3. Für −3<x<3 ist f nicht definiert.
h) f ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f ist nicht differenzierbar an der Stelle 0.
i) f ist nirgends differenzierbar.

17. Der linksseitige Grenzwert und der rechtsseitige Grenzwert stimmen nicht überein:

$$\lim_{\Delta t \uparrow 0} \frac{\overbrace{f(180+\Delta t)}^{3} - \overbrace{f(180)}^{3}}{\Delta t} = 0, \quad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\overbrace{f(180+\Delta t)}^{6} - \overbrace{f(180)}^{3}}{\Delta t} = \infty$$

E. Aufgaben zum Ergänzungsstoff

1. –
2. a) f ist auf $\mathbb{R}$ definiert. f ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f ist nicht differenzierbar an der Stelle x=0.
   b) f ist auf $\mathbb{R}$ definiert. f ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, f ist nicht differenzierbar für $x \in \mathbb{Z}$.
3. a) f ist auf $\mathbb{R}$ definiert. An der Stelle x=0 ist f gemäss Abschnitt 18.5 (Band *Analysis 3*) nicht stetig und deshalb gemäss Satz 19.4.3 auch nicht differenzierbar.
   b) f ist auf $\mathbb{R}$ definiert. An der Stelle x=0 ist f gemäss Abschnitt 18.5 (Band *Analysis 3*) stetig, aber nicht differenzierbar:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \text{ existiert nicht.}$$

   c) f ist auf $\mathbb{R}$ definiert. An der Stelle x=0 ist f differenzierbar:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}_{\in[-1,\,1]} = 0$$

   Nach Satz 19.4.3 ist f an der Stelle x=0 auch stetig.

F. Aufgaben für Freaks

1. a) existiert nicht b) −11.171953 m/s c) −111.802560 m/s d) −1118.033905 m/s
   e) −11180.339876 m/s (mit über 40’000 km/h nach unten!) f) –