Thema: Integralrechnung 2:
Anwendungen der Integralrechnung

Name: Helmut Heugl, Gertrud Aumayr ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte:
Bestimmtes und unbestimmtes Integral, Flächeninhalt, Volumen, Bewegungsaufgaben, Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, mittlere und momentane Änderungsrate, Zuflussrate, Arbeit, Energie.

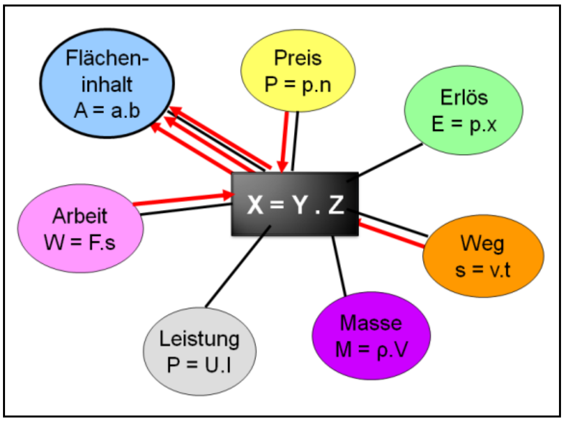
Einen Überblick über die **Kompetenzanforderungen im neuen Lehrplan** (Stand August 2017) und im **Grundkompetenzkatalog der Reifeprüfung** finden sie im **Anhang**.

__Wir lassen uns bei der Definition des Integrals von der Interpretation als „Flächeninhalt" leiten. Haben wir einmal den allgemeinen Integralbegriff gefunden, dann „vergessen" wir diese Interpretation wieder, da das Integral in vielen anderen Zusammenhängen gebraucht wird. [Cigler 1978, S.117]__

Didaktischer Kommentar:

Im Kapitel Integralrechnung 1 erfolgte der Einstieg über den Inhaltsbegriff. Nach einer theoretischen Absicherung des Integralbegriffs in der abstrakten Phase folgt der wichtigste Teil des Lernprozesses – die Anwendungsphase.

Der eigentliche Grund für die Behandlung der Integralrechnung im Schulunterricht ist der Umstand, dass man in verschiedenen Anwendungsbereichen Probleme findet, für die dasselbe mathematische Modell wie beim Flächeninhalt passend ist. Diese Verwandtschaft über das gemeinsame Modell ermöglicht das Lösen von Problemen in verschiedenen Kontexten durch Nutzen der Erkenntnisse über den Flächeninhalt (siehe Zitat von Cigler).



Charakteristische Anwendungsbereiche:

- Ermittlung eines Bestandes aus gegebenen Änderungsraten
- Bewegungsaufgaben
- Flächen- und Volumsberechnungen
- Arbeit bei veränderlicher Kraft

Aufgabenbeispiele

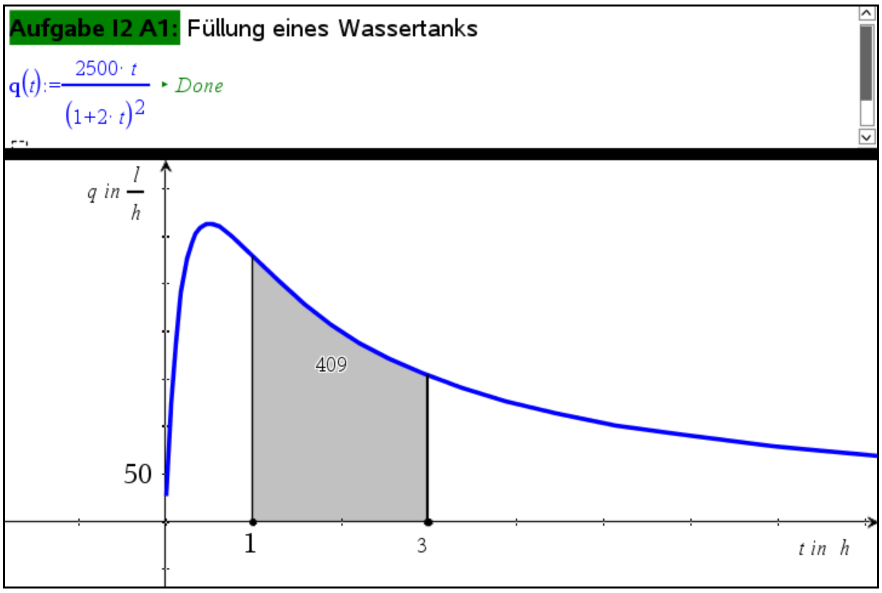
Aufgabe I2 A1: Füllung eines Wassertanks
Quelle: Savard, G., Pineau, K., 2008: Lecture at the Conference TIME 2008 in South Africa: http://rfdz.ph-noe.ac.at/acdca/konferenzen/south-africa-2008.html

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 l Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit einer Zuflussrate q mit $q(t) = \frac{2.500 \cdot t}{(1+2.t)^2}$. Die Zuflussrate q wird in Liter pro Stunde (l/h) gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

a) Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen q(t) und der t-Achse zwischen $t_1=1$ und $t_2=3$ hat den Wert 410. Was bedeutet dieser Wert im Zusammenhang mit dem Kontext „Wassertank"?
b) Berechne, wie groß das Wasservolumen im Tank um 15 Uhr ist. Erläutere deine Überlegungen.
c) Der Tank fasst maximal 1250 Liter. Berechne, um wieviel Uhr er etwa überfließen wird? Erläutere deine Überlegungen.
d) Ermittle mit Hilfe der Integralrechnung die durchschnittliche Zuflussrate zwischen 13 Uhr und 15 Uhr? Interpretiere den Wert graphisch im Bezug zum Graphen von q(t).
e) Ermittle eine Formel für das Wasservolumen im Tank in Abhängigkeit von der Zeit und stelle diese Funktion für 10 Stunden graphisch dar. Die Messung beginnt um 13 Uhr. Erläutere deine Überlegungen.

Didaktischer Kommentar:
Bei Nutzung von Technologie ist die Dokumentation des Lösungsweges und der Lösung eine wichtige Kompetenz. Daher wird bei jeder Teilaufgabe verlangt: „Erläutere deine Überlegungen". Kommunikationskompetenz erfordert aber eine sprachlich formulierte Argumentation und nicht nur eine Folge von Werkzeugbefehlen. Zitat von Genivieve Savard: „Ich bin kein TI-Nspire."

Mögliche Lösung:



a)
Visualisierung der Lösung:
Ca. 410 Liter sind in der Zeit zwischen 14 und 16 Uhr zugeflossen.

$$v15:=500.+\int_0^2 q(t)\,dt \qquad 1005.9$$

$$v(t):=500.+\int_0^t q(x)\,dx \qquad Done$$

$$v(t) \qquad \frac{125\cdot(5\cdot(2\cdot t+1)\cdot\ln(|2\cdot t+1|)-2.\cdot(t-2.))}{2\cdot t+1}$$

$$\text{solve}(v(t)=1250,t) \qquad t=^-5.48826 \text{ or } t=^-0.354381 \text{ or } t=3.47974$$

b)
Das Wasservolumen um 15 Uhr beträgt etwa 1005 Liter

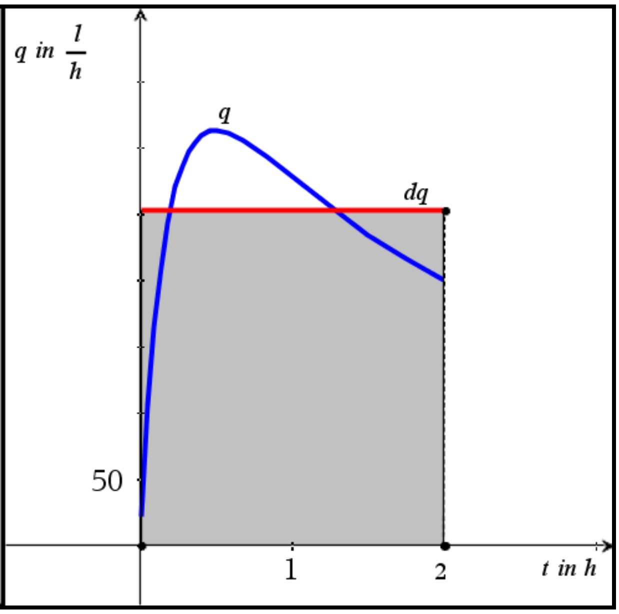
c)
Etwa um 16.30 Uhr wird der Tank überfließen

Didaktischer Kommentar:

Für die Teile c) und e) muss ein Modell für das Wasservolumen v im Tank als Funktion der Zeit t gefunden werden. An dieser Aufgabe ist die Veränderung der mathematischen Handlungen durch Technologie deutlich erkennbar. Man benötigt nicht den expliziten komplexen Term der Funktion v (Zeile 3). Man arbeitet mit dem Namen der Funktion.

$$\frac{\int_0^2 q(t)\,dt}{2.-0} \qquad 252.949$$

$$dq:=252.949 \qquad 252.949$$



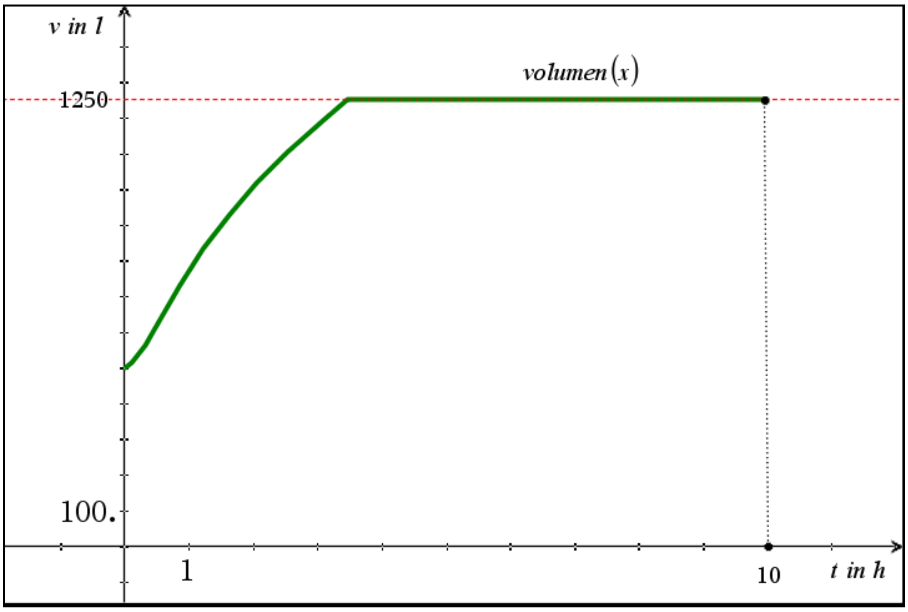
d)
Die durchschnittliche Zuflussrate ergibt sich aus dem gesamten Zufluss pro Zeiteinheit.

Sehr hilfreich für das Verstehen des Problems ist die graphische Darstellung, die eine Beziehung zwischen der Fläche unter der Kurve und der Rechtecksfläche unter der durchschnittlichen Zuflussrate ermöglicht.

$$v(t):=500.+\int_0^t q(x)\,dx \qquad Done$$

$$volumen(t):=\begin{cases} v(t), & 0\le t\le 3.48 \\ 1250, & t>3.48 \end{cases} \qquad Done$$

e)
Will man die Veränderung des Wasservolumens im Tank beschreiben, muss berücksichtigt werden, dass der Wasserbehälter nach 3,48 Stunden voll ist.



Daher eignet sich hier als Modell eine abschnittsweise definierte Funktion: „*volumen(t)*“.

Aufgabe I2 A2: Bakterienwachstum

Quelle: Thüringen Abitur 2017 – Prüfungsaufgaben Mathematik. Stark Verlagsgesellschaft 2016 (www.stark-verlag.de) S. Ü-29

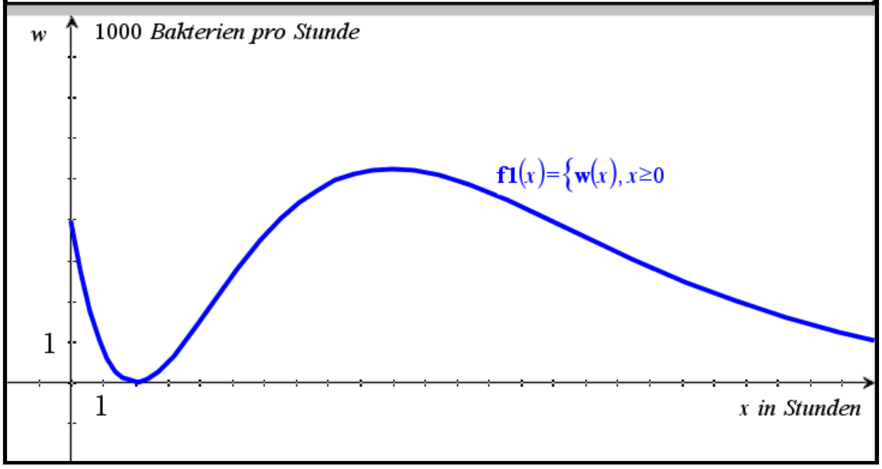
Die Funktion w: $w(x)=(x-2)^2\cdot e^{-\frac{x}{4}}$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit einer Bakterienkultur, das heißt die Änderungsrate des Wachstums. Die Variable x steht für die Zeit in Stunden, der Zeitpunkt x=0 beschreibt den Beobachtungsbeginn. Die Wachstumsgeschwindigkeit wird in Bakterienzahl in Tausend pro Stunde angegeben. Es wird davon ausgegangen, dass zum Zeitpunkt x=0 etwa 1000 Bakterien vorhanden waren und dass im Zeitraum von $0\le x\le 24$ keine Bakterien verloren gehen.

Entscheide, ob die folgenden Aussagen im hier betrachteten Sachzusammenhang wahr oder falsch sind. Begründe deine Entscheidungen:

A. Im Zeitraum $0\le x\le 2$ nimmt die Anzahl der Bakterien ab.
B. Zum Zeitpunkt x=2 sind keine Bakterien mehr vorhanden.
C. Nach 10 Stunden sind ungefähr 28 500 Bakterien vorhanden.
D. Wenn die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist, dann ist auch die Anzahl der vorhandenen Bakterien maximal.
E. Im Zeitraum x=5 bis x=10 steigt die Bakterienzahl um 100%, weil sich die Wachstumsgeschwindigkeit etwa verdoppelt.

Mögliche Lösung:

$w(x):=(x-2)^2 \cdot e^{\frac{-x}{4}}$ Done



Eine Grundlage für die Argumentation ist der Graph der Funktion w.

A. Aussage ist **falsch**. Die Wachstumsgeschwindigkeit sinkt zwar, sie wird aber nie negativ. Die Anzahl nimmt daher nicht ab, sondern nur langsamer zu.

B. Aussage ist **falsch**. Zum Zeitpunkt x=2 ist zwar die Wachstumsgeschwindigkeit 0, das bedeutet aber nicht, dass keine Bakterien mehr vorhanden sind. Es wurden zu diesem Zeitpunkt nur keine neuen Bakterien produziert.

C. Die Aussage ist **wahr:**

2 Wege für den Beweis:

Weg 1: Ermittlung der „Gesamtzahlfunktion“ nb als Stammfunktion:

$w(x):=(x-2)^2 \cdot e^{\frac{-x}{4}}$	Done
$n(x):=1000 \cdot \int w(x)\,dx+c$	Done
$\text{solve}(n(0)=1000.,c)$	$c=81000.$
$nb(x):=n(x)\vert c=81000.$	Done
$nb(x)$	$81000.-4000\cdot(x^2+4\cdot x+20)\cdot e^{\frac{-x}{4}}$
$nb(10)$	28465.6

Die Aussage ist wahr:

nb(10) ≈ 28 500

Weg 2: Direkte Ermittlung der Gesamtzahl nach 10 Stunden mit dem bestimmten Integral

$w(x):=(x-2)^2\cdot e^{\frac{-x}{4}}$	*Done*
$n10:=1000.+1000\cdot\int_0^{10} w(x)\,dx$	28465.6

Die Aussage ist wahr:

n10 ≈ 28 500

D. Die Aussage ist **falsch**. Nach Erreichen der Maximalgeschwindigkeit ist die Wachstumsgeschwindigkeit noch immer positiv, daher erfolgt eine weitere Zunahme der Anzahl.

E. Die Aussage ist **falsch**:

2 Wege für den Beweis:

Weg 1: Ermittlung der „Gesamtzahlfunktion“ nb als Stammfunktion:

$nb(x)$	$81000.-4000\cdot(x^2+4\cdot x+20)\cdot e^{\frac{-x}{4}}$
$nb(10)$	28465.6
$nb(5)$	6508.75
$\frac{nb(10)}{nb(5)}$	4.37343
$\frac{nb(10)}{nb(5)}\cdot 100$	437.343

Die Anzahl der Bakterien steigt in diesem Zeitraum um mehr als 400%

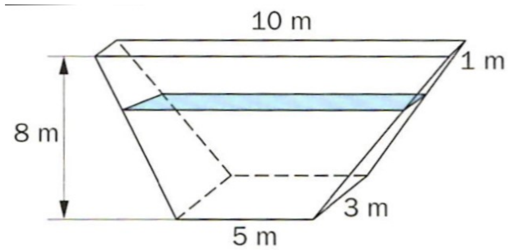
Weg 2: Direkte Ermittlung der Gesamtzahl nach 5 und nach 10 Stunden mit dem bestimmten Integral:

$w(x):=(x-2)^2\cdot e^{\frac{-x}{4}}$	*Done*
$n10:=1000.+1000\cdot\int_0^{10} w(x)\,dx$	28465.6
$n5:=1000.+1000\cdot\int_0^{5} w(x)\,dx$	6508.75
$\frac{n10}{n5}\cdot 100.$	437.343

Aufgabe I2 A3: Staumauer

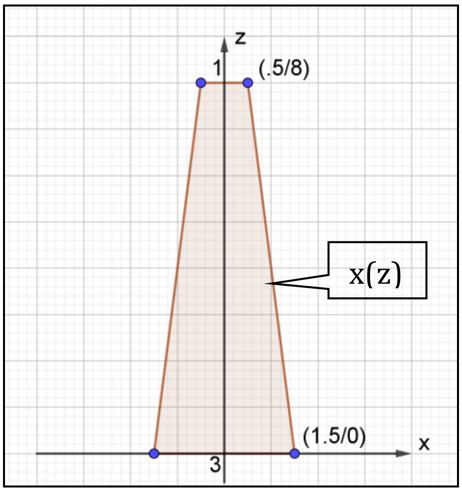
Quelle: „Thema Mathematik 8“ Veritas Verlag, Aufgabe 211, S. 51.
ISBN 978-3-7058-8373-4

Eine Staumauer ist 8 m hoch und besitzt in jeder Höhe eine rechteckige Querschnittsfläche. Die Länge der Mauer nimmt von 5 m an der tiefsten Stelle auf 10 m an der höchsten Stelle zu, die Breite nimmt von 3 m unten auf 1 m oben linear ab. Wie viel m³ Beton wurden etwa verbaut?



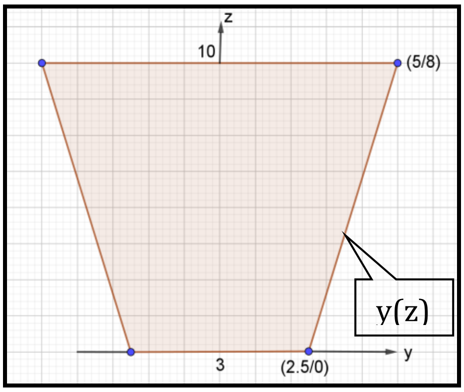
Mögliche Lösung:

Um die Querschnittsfläche a in Abhängigkeit von z zu erhalten benötigen wir zuerst die Funktionen x und y in Abhängigkeit von z. Man ermittelt x(z) und y(z) aus den 2 Schnittflächen, der x,z-Ebene und der y,z-Ebene:



x,z-Ebene:

$kx:=\frac{8}{-1}$	-8
$\text{solve}(0=kx\cdot 1.5+dx,dx)$	$dx=12.$
$\text{solve}(z=kx\cdot x+12.,x)$	$x=-0.125\cdot(z-12.)$
$x(z):=-0.125\cdot(z-12.)$	*Done*



y,z-Ebene:

$ky:=\frac{8}{2.5}$	3.2
$\text{solve}(0=ky\cdot 2.5+dy,dy)$	$dy=-8.$
$\text{solve}(z=ky\cdot y-8,y)$	$y=0.3125\cdot(z+8.)$
$y(z):=0.3125\cdot(z+8.)$	*Done*

$a(z):=2\cdot x(z)\cdot 2\cdot y(z)$	*Done*
$a(z)$	$-0.15625\cdot(z-12.)\cdot(z+8.)$
$v:=\int_0^8 a(z)\,dz$	113.333

Etwa 114 m³ Beton werden verbaut.

Aufgabe I2 A4: Drag Race

Quelle: South Australia 2017: Final exam „Mathematical Methods” Example 16

Bei einem „Drag Race“ legen die Autos aus dem Stand eine Strecke von 400 m zurück. Die Daten des Fahrzeuges und die Reaktion des Fahrers werden berücksichtigt in einem mathematischen Modell für die Geschwindigkeit v, die das Fahrzeug t Sekunden nach der Startlinie hat.

Zwei Fahrzeuge A und B treten gegeneinander an.

Die Geschwindigkeit va des Fahrzeuges A in Abhängigkeit von der Zeit ist gegeben durch:

$va = \frac{98}{1+19\cdot e^{-2t}} - 4.9$ für $0 \le t \le 7$ (t in Sekunden, v in m/s)

Die Geschwindigkeit vb des Fahrzeuges B in Abhängigkeit von der Zeit ist gegeben durch:

$vb = \frac{85}{1+9\cdot e^{-3t}} - 8.5$ für $0 \le t \le 7$ (t in Sekunden, v in m/s)

Berechne, welches Fahrzeug gewinnen wird?

Mögliche Lösung:

Schritt 1: Ermittlung der „Wegfunktionen“ sa und sb mit Hilfe des Integrals:

$va(x):=\frac{98}{1+19\cdot \mathbf{e}^{-2\cdot x}}-4.9$	*Done*
$vb(x):=\frac{85}{1+9\cdot \mathbf{e}^{-3\cdot x}}-8.5$	*Done*
$sa(x):=\int_0^x va(t)\,dt$	*Done*
$sb(x):=\int_0^x vb(t)\,dt$	*Done*

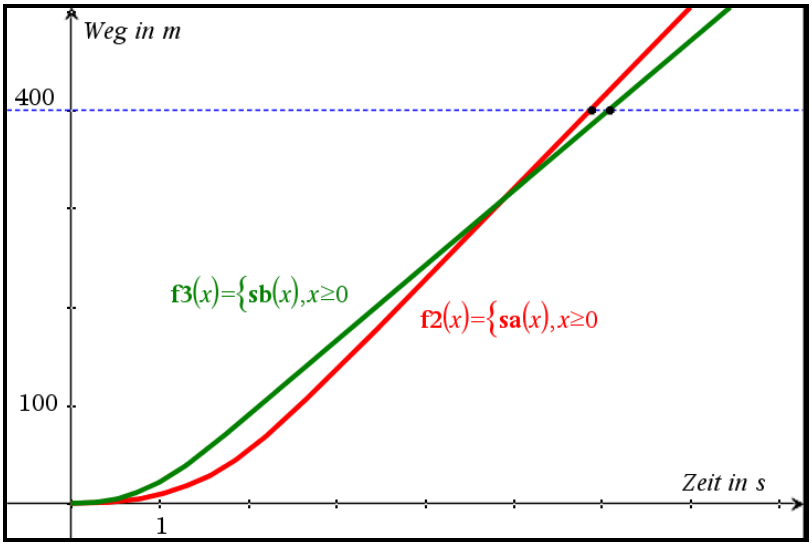
Schritt 2: Ermittlung der Laufzeit (Zeit für die Strecke von 400 m)

$\text{solve}(sa(x)=400,x)$	$x=-82.1456$ or $x=5.8730$
$\text{solve}(sb(x)=400,x)$	$x=-47.41$ or $x=6.0815$

ta=5.873 s, tb=6.082 s

⇨ Das Fahrzeug A gewinnt.

Nachdem man die Wegfunktionen sa und sb mit Hilfe von CAS ermittelt hat, kann man das Problem auch grafisch lösen:



Aufgabe I2 A5: Flächeninhalt

Quelle: Norwegen 2016: Final Exam Teil 2 Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit f(x) = x^2 .

Die Punkte A(a,a2) und B(b,b2)) mit a<b liegen auf dem Graphen von f

a) Berechne die Fläche T, die begrenzt wird vom Graphen von f und der Strecke AB (siehe Abb. 1.)

b) Berechne die Fläche S des Dreiecks ABC (siehe Abb. 2).

C hat die Koordinaten (c, c2) mit $c = \dfrac{a+b}{2}$. Zeige, dass

$$S = \frac{1}{8}\cdot(b-a)^3$$

c) Ermittle das Verhältnis $\dfrac{T}{S}$

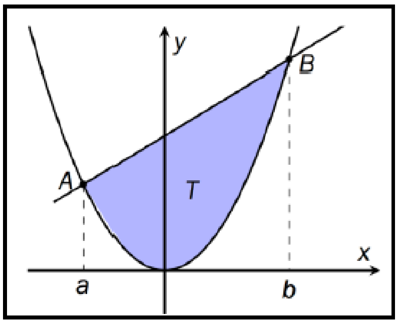


Abb. 1

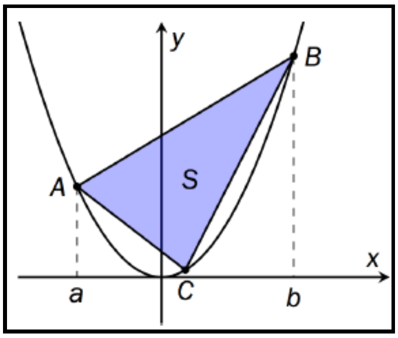


Abb. 2

Mögliche Lösung:

a)

$f(x):=x^2$ Done

$t:=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(-a+b)-\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad \dfrac{-a^3}{6}+\dfrac{a^2\cdot b}{2}-\dfrac{a\cdot b^2}{2}+\dfrac{b^3}{6}$

$\text{factor}\left(\dfrac{-a^3}{6}+\dfrac{a^2\cdot b}{2}-\dfrac{a\cdot b^2}{2}+\dfrac{b^3}{6}\right)$ $\quad \dfrac{-(a-b)^3}{6}$

Flächeninhalt Trapez – Flächeninhalt unter dem Parabelstück b)

$c:=\frac{a+b}{2}$	$\frac{a+b}{2}$
$a1:=\frac{f(a)+f(c)}{2}\cdot(-a+c)$	$\frac{-(a-b)\cdot(5\cdot a^2+2\cdot a\cdot b+b^2)}{16}$
$a2:=\frac{f(c)+f(b)}{2}\cdot(b-c)$	$\frac{-(a-b)\cdot(a^2+2\cdot a\cdot b+5\cdot b^2)}{16}$
$a3:=\frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(-a+b)$	$\frac{-(a-b)\cdot(a^2+b^2)}{2}$

Ermittlung des Inhalts von 3 Trapezflächen

$s:=a3-a2-a1$	$\frac{-(a-b)\cdot(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2)}{8}$
$\text{factor}\left(\frac{-(a-b)\cdot(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2)}{8}\right)$	$\frac{-(a-b)^3}{8}$
⚠ $\frac{t}{s}$	$\frac{4}{3}$

Ermittlung von S und Ermittlung des Verhältnisses von T und S durch Nutzung der Namen der Teilflächen

Aufgabe I2 A6: Arbeit im Gravitationsfeld

Die Erdanziehungskraft F ist eine Funktion der Entfernung r vom Erdmittelpunkt.

Das Gravitationsgesetz lautet: $F(r)=\frac{G\cdot me\cdot m}{r^2}$. $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ ist die Gravitationskonstante; $me = 6\cdot 10^{24}$ die Erdmasse in kg.

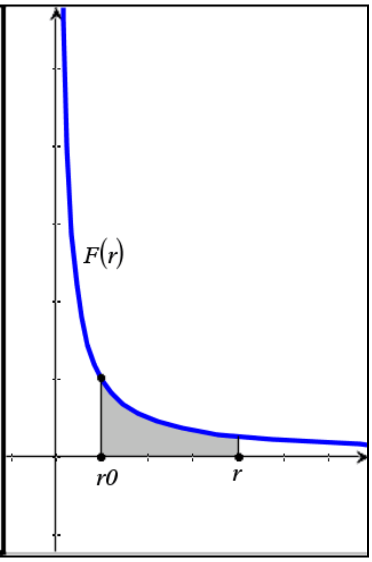
a) Ermittle jene Energie (Arbeit), die nötig ist, um die Masse 1 kg von der Erdoberfläche r0 in eine Umlaufbahn mit dem Radius r zu befördern.

b) Ermittle jene Energie (Arbeit), die nötig ist, um einen Nachrichtensatelliten mit der Masse m = 1000 kg in eine Höhe von 38 000 km zu befördern. Der Erdradius r0 beträgt 6 400 km.

Mögliche Lösung:

a)

$f(r):=\frac{g\cdot me\cdot 1}{r^2}$	*Done*
$e(r):=\int_{r0}^{r} f(r)\,dr$	*Done*
$e(r)$	$\frac{g\cdot me\cdot(r-r0)}{r0\cdot r}$
expand$(e(r))$	$\frac{g\cdot me}{r0}-\frac{g\cdot me}{r}$



Weder „*expand*“ noch „*factor*“ liefern die erwartete Lösung, die in Physikbüchern zu finden ist.

Strukturerkennungskompetenz ist nötig. Durch Herausheben erhält man:

$$E(r)=G\cdot me\cdot\left(\frac{1}{r0}-\frac{1}{r}\right)$$

b)

$g:=6.67\cdot 10^{-11}$	6.67E-11
$me:=6.\cdot 10^{24}$	6.E24
$r0:=6.4\cdot 10^{6}$	6.4E6
$r1:=r0+3.8\cdot 10^{7}$	4.44E7
$f(r):=\frac{g\cdot me\cdot m}{r^2}$	*Done*
$w:=\int_{r0}^{r1} f(r)\,dr$	5.35177E10

Die Hubarbeit beträgt etwa $5\cdot 10^{10}$ Joule.

Anhang

Ein Blick in den Lehrplan: Im Lehrplanentwurf für die modulare Oberstufe findet man ähnliche Kompetenzanforderungen wie im derzeit gültigen Lehrplan:

Lehrplanentwurf Mathematik Oberstufe AHS

Kompetenzorientierung und Semestrierung. (Stand August 2017)
12. Schulstufe, 7. Semester

Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung	Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen)	▪ Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (AN-R 4.3)

Anmerkungen: Analog zum Differentialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext. Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist die Berechnung von bestimmten Integralen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Integrationsregeln eingeschränkt.

BHS

Kompetenzkatalog Teil A - Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern
Analysis

4.6	Regeln zum Berechnen von Stammfunktionen von Potenz- und Polynomfunktionen verstehen und anwenden
4.8	das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt verstehen und anwenden