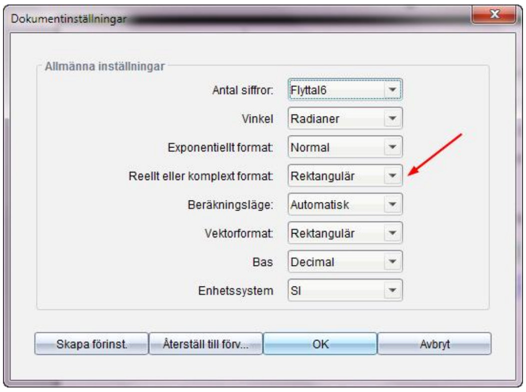
Komplexa tal

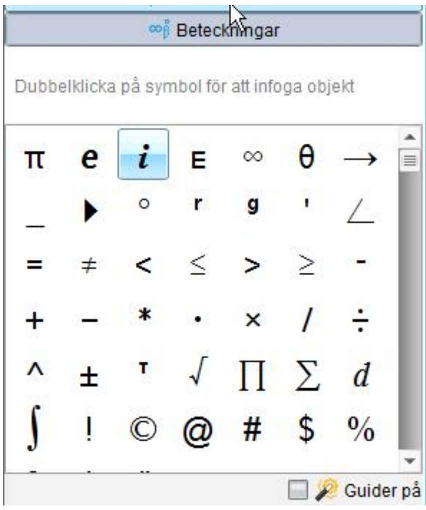
Komplexa tal stötte vi på redan i kurs 2 i samband med lösningar till andragradsekvationer. Detta är startpunkten för denna ganska omfattande aktivitet om komplexa tal, som behandlas i kurs 4.

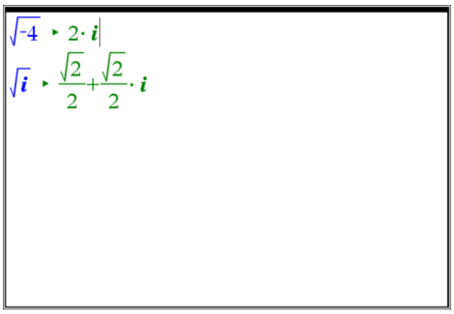
Aktiviteten kan användas av eleverna som en repetition av momentet komplexa tal eftersom det finns beskrivande text på anteckningssidor.

För att kunna göra beräkningar på komplexa tal har vi ställt in på rektangulärt format under dokumentinställningar. Nu kan vi t.ex. beräkna roten ur ett negativt tal.



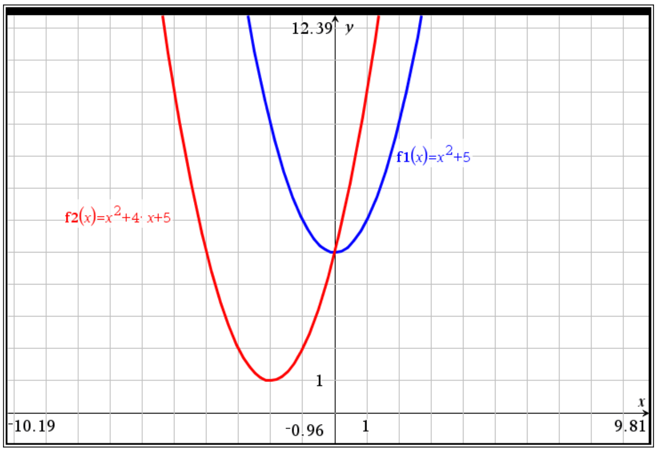
Imaginär enheten ***i*** finns under Beteckningar i Dokumentverktygslådan. På en handenhet så finns den under π-knappen.



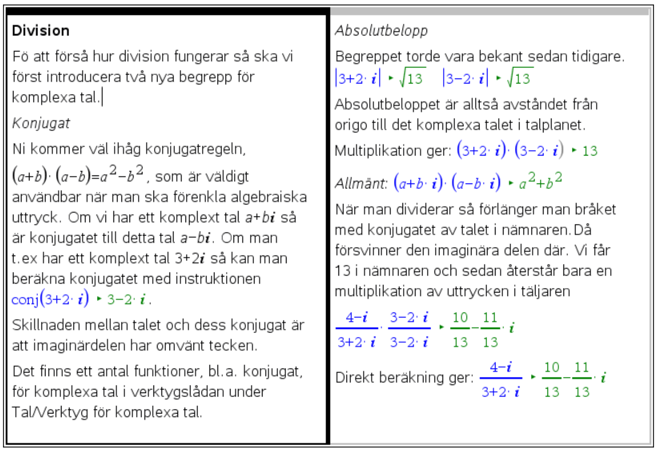


Sid 1:

Visa att ekvationerna på sid 1 saknar reella lösningar genom att plotta funktionerna.



Sid 4:



Division

Fö att förså hur division fungerar så ska vi först introducera två nya begrepp för komplexa tal.

Konjugat

Ni kommer väl ihåg konjugatregeln, $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$, som är väldigt användbar när man ska förenkla algebraiska uttryck. Om vi har ett komplext tal $a+bi$ så är konjugatet till detta tal $a-bi$. Om man t.ex har ett komplext tal $3+2i$ så kan man beräkna konjugatet med instruktionen $\text{conj}(3+2\cdot i) \blacktriangleright 3-2\cdot i$.

Skillnaden mellan talet och dess konjugat är att imaginärdelen har omvänt tecken.

Det finns ett antal funktioner, bl.a. konjugat, för komplexa tal i verktygslådan under Tal/Verktyg för komplexa tal.

Absolutbelopp

Begreppet torde vara bekant sedan tidigare.

$|3+2\cdot i| \blacktriangleright \sqrt{13}$ $\quad |3-2\cdot i| \blacktriangleright \sqrt{13}$

Absolutbeloppet är alltså avståndet från origo till det komplexa talet i talplanet.

Multiplikation ger: $(3+2\cdot i)\cdot(3-2\cdot i) \blacktriangleright 13$

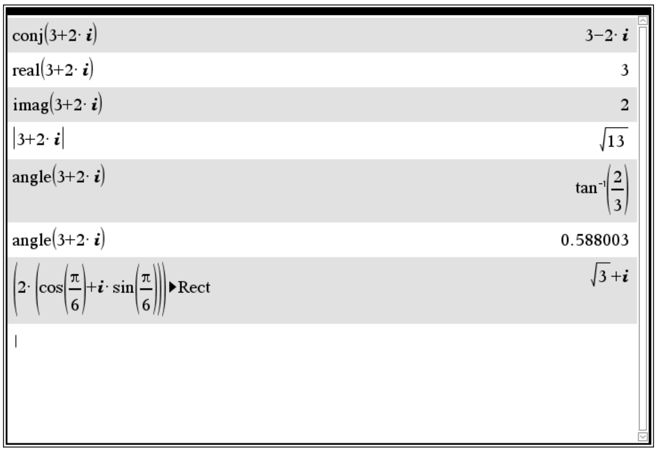
Allmänt: $(a+b\cdot i)\cdot(a-b\cdot i) \blacktriangleright a^2+b^2$

När man dividerar så förlänger man bråket med konjugatet av talet i nämnaren. Då försvinner den imaginära delen där. Vi får 13 i nämnaren och sedan återstår bara en multiplikation av uttrycken i täljaren

$\frac{4-i}{3+2\cdot i}\cdot\frac{3-2\cdot i}{3-2\cdot i} \blacktriangleright \frac{10}{13}-\frac{11}{13}\cdot i$

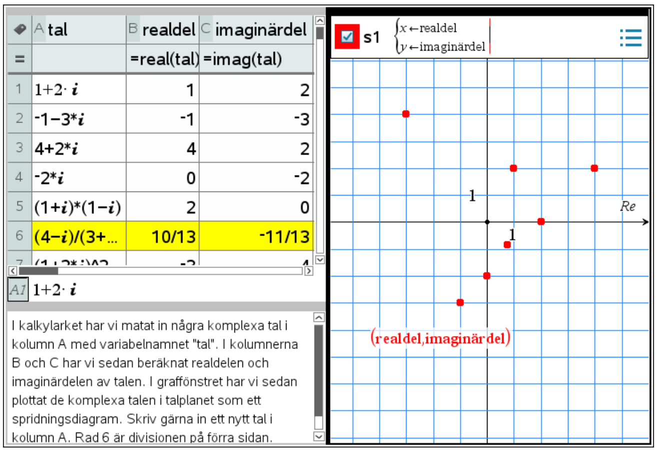
Direkt beräkning ger: $\frac{4-i}{3+2\cdot i} \blacktriangleright \frac{10}{13}-\frac{11}{13}\cdot i$

Ett antal räkneoperationer för komplexa tal finns i dokumentverktygslådan under Tal/Komplext. Där finns bl.a. konjugat, realdel, imaginärdel, absolutbelopp, vinkel för polära koordinater osv.



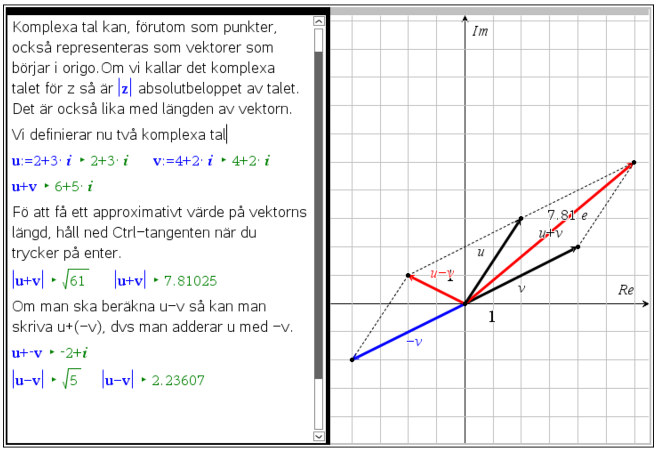
Sid 5:

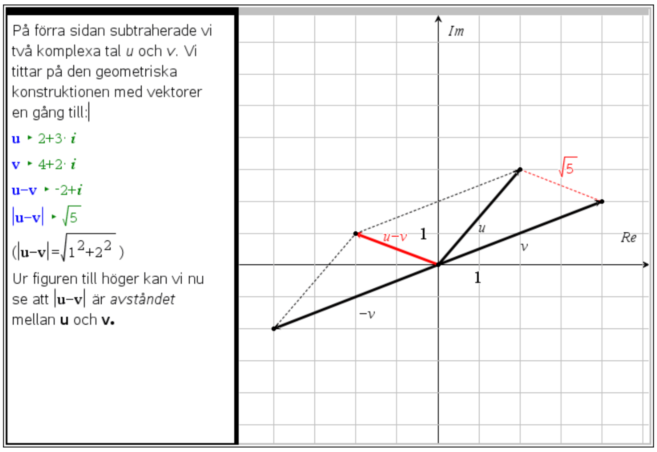
I kalkylarket har vi matat in några komplexa tal i kolumn A med variabelnamnet "tal". I kolumnerna B och C har vi sedan beräknat realdelen och imaginärdelen av talen. I grafönstret har vi sedan plottat de komplexa talen i talplanet som ett spridningsdiagram. Skriv gärna in ett nytt tal i kolumn A. Rad 6 är divisionen på förra sidan.



Sid 5-6:

Här visar vi hur man kan representera komplexa tal som vektorer. Vi har definierat två komplexa tal ***u*** och ***v***. Det gör man med instruktionen **:=**. Sedan har vi utfört beräkningarna ***u***+***v*** och **u**-*v*.

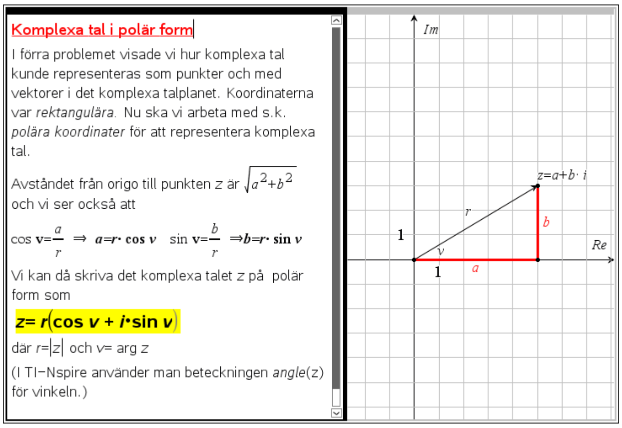




Problem 2

Sid 1:

I problem 2 övergår vi nu till polära koordinater. Vi har i dokumentet använt inställningen *radianer*.



Sid 2-3:

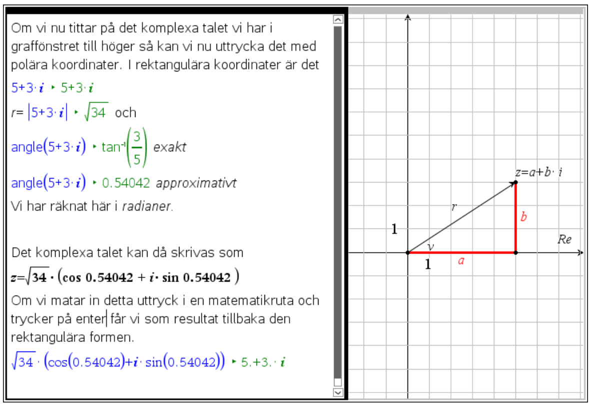
Här visar vi hur man kan konvertera det komplexa talet 5+3***i*** till polära koordinater. Observera att beräkningen av vinkeln v ger det exakta resultatet

$$\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right).$$

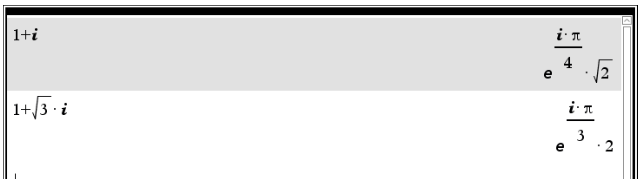
De trigonometriska funktionerna på TI-Nspire når du direkt från tangentbordet genom att skriva dem.

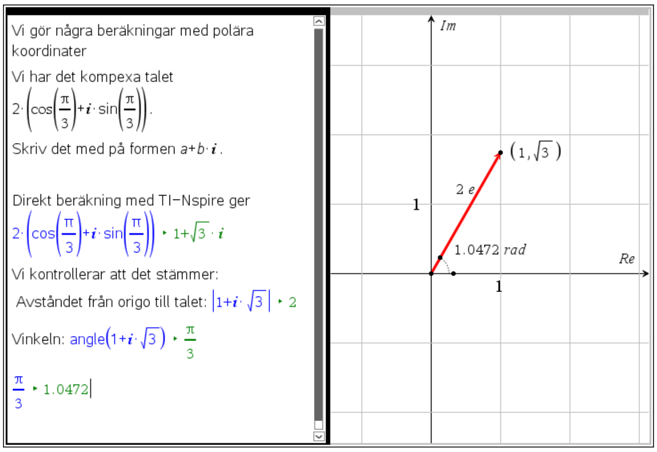
$\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ kan du direkt skriva som arctan(3/5).

Längst ner har vi skrivit in talet på polär form och tryckt på enter. Vi får då tillbaka talet i rektangulär form eftersom vi har den inställningen i dokumentet.



Med inställningen polära koordinater får vi talen på Eulerform:




Vi gör några beräkningar med polära koordinater

Vi har det kompexa talet $2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Skriv det med på formen $a+b\cdot i$.

Direkt beräkning med TI−Nspire ger

$2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) ▸ 1+\sqrt{3}\cdot i$

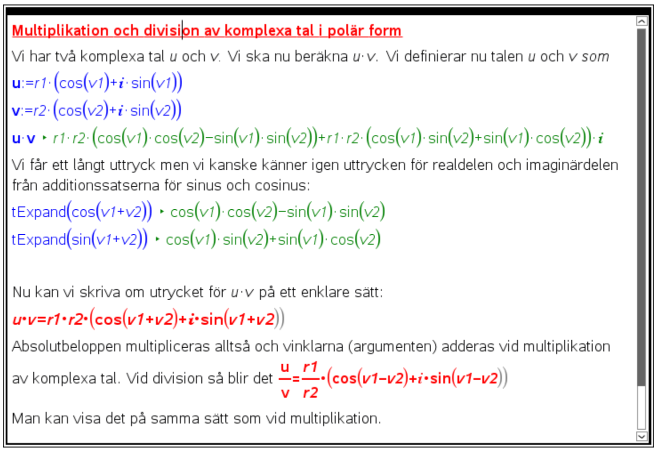
Vi kontrollerar att det stämmer:

Avståndet från origo till talet: $|1+i\cdot\sqrt{3}| ▸ 2$

Vinkeln: $\text{angle}(1+i\cdot\sqrt{3}) ▸ \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} ▸ 1.0472$

Sid 4-5:


Multiplikation och division av komplexa tal i polär form

Vi har två komplexa tal u och v. Vi ska nu beräkna $u\cdot v$. Vi definierar nu talen u och v som

$u:=r1\cdot(\cos(v1)+i\cdot\sin(v1))$

$v:=r2\cdot(\cos(v2)+i\cdot\sin(v2))$

$u\cdot v ▸ r1\cdot r2\cdot(\cos(v1)\cdot\cos(v2)-\sin(v1)\cdot\sin(v2))+r1\cdot r2\cdot(\cos(v1)\cdot\sin(v2)+\sin(v1)\cdot\cos(v2))\cdot i$

Vi får ett långt uttryck men vi kanske känner igen uttrycken för realdelen och imaginärdelen från additionssatserna för sinus och cosinus:

$\text{tExpand}(\cos(v1+v2)) ▸ \cos(v1)\cdot\cos(v2)-\sin(v1)\cdot\sin(v2)$

$\text{tExpand}(\sin(v1+v2)) ▸ \cos(v1)\cdot\sin(v2)+\sin(v1)\cdot\cos(v2)$

Nu kan vi skriva om utrycket för $u\cdot v$ på ett enklare sätt:

$u\cdot v=r1\cdot r2\cdot(\cos(v1+v2)+i\cdot\sin(v1+v2))$

Absolutbeloppen multipliceras alltså och vinklarna (argumenten) adderas vid multiplikation av komplexa tal. Vid division så blir det $\frac{u}{v}=\frac{r1}{r2}\cdot(\cos(v1-v2)+i\cdot\sin(v1-v2))$

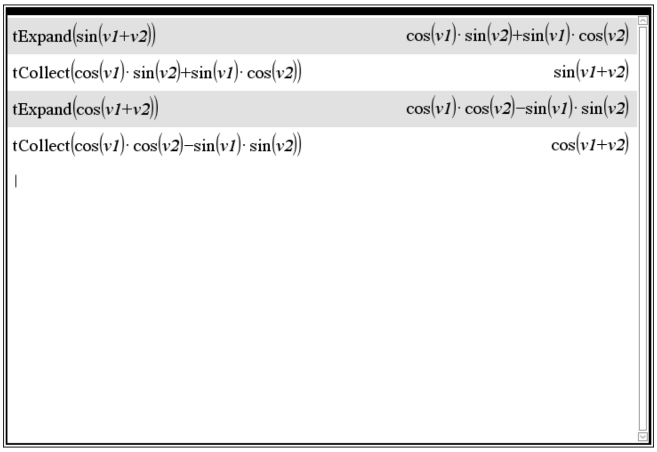
Man kan visa det på samma sätt som vid multiplikation.

Här visar vi multiplikation och division av tal i polär form. Man utnyttjar då additionssatserna för sinus och cosinus:

$$\cos(v_1+v_2)=\cos(v_1)\cdot\cos(v_2)-\sin(v_1)\cdot\sin(v_2)$$

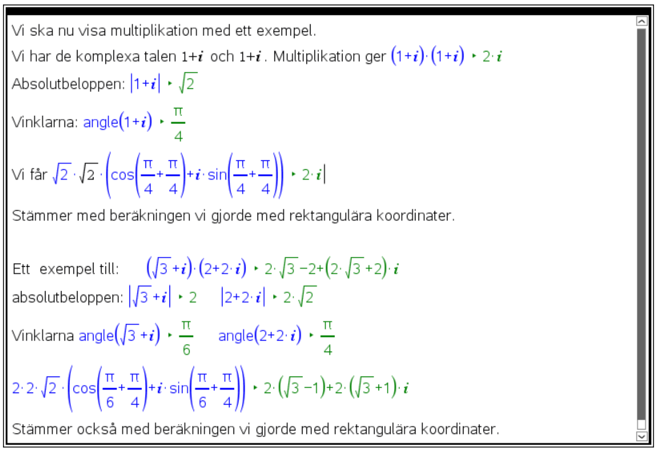
$$\sin(v_1+v_2)=\cos(v_1)\cdot\sin(v_2)+\sin(v_1)\cdot\cos(v_2)$$

I TI-Nspire finns verktyg för samma ihop och utveckla trigonometriska uttryck:



$\text{tExpand}(\sin(v1+v2))$	$\cos(v1)\cdot\sin(v2)+\sin(v1)\cdot\cos(v2)$
$\text{tCollect}(\cos(v1)\cdot\sin(v2)+\sin(v1)\cdot\cos(v2))$	$\sin(v1+v2)$
$\text{tExpand}(\cos(v1+v2))$	$\cos(v1)\cdot\cos(v2)-\sin(v1)\cdot\sin(v2)$
$\text{tCollect}(\cos(v1)\cdot\cos(v2)-\sin(v1)\cdot\sin(v2))$	$\cos(v1+v2)$

Två exempel på multiplikation


Vi ska nu visa multiplikation med ett exempel.

Vi har de komplexa talen $1+i$ och $1+i$. Multiplikation ger $(1+i)\cdot(1+i) ▸ 2\cdot i$

Absolutbeloppen: $|1+i| ▸ \sqrt{2}$

Vinklarna: $\text{angle}(1+i) ▸ \frac{\pi}{4}$

Vi får $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right) ▸ 2\cdot i$

Stämmer med beräkningen vi gjorde med rektangulära koordinater.

Ett exempel till: $(\sqrt{3}+i)\cdot(2+2\cdot i) ▸ 2\cdot\sqrt{3}-2+(2\cdot\sqrt{3}+2)\cdot i$

absolutbeloppen: $|\sqrt{3}+i| ▸ 2$ $\quad |2+2\cdot i| ▸ 2\cdot\sqrt{2}$

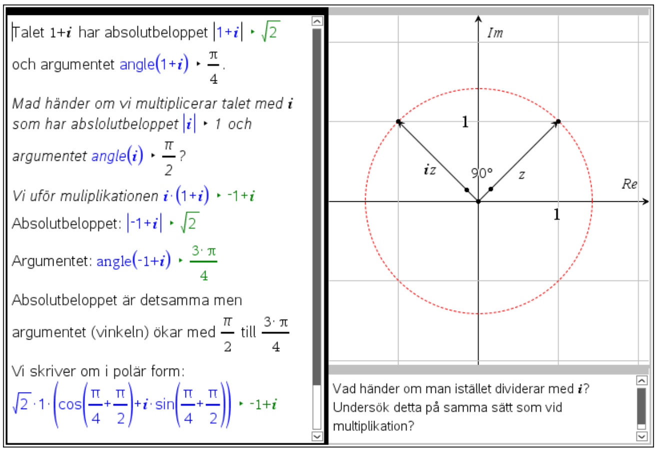
Vinklarna $\text{angle}(\sqrt{3}+i) ▸ \frac{\pi}{6}$ $\quad \text{angle}(2+2\cdot i) ▸ \frac{\pi}{4}$

$2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) ▸ 2\cdot(\sqrt{3}-1)+2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot i$

Stämmer också med beräkningen vi gjorde med rektangulära koordinater.

Sid 6:

Mad händer om vi multiplicerar talet med ***i***?
Vi får en vridning 90 grader år vänster.


Talet $1+i$ har absolutbeloppet $|1+i| ▸ \sqrt{2}$

och argumentet $\text{angle}(1+i) ▸ \frac{\pi}{4}$.

Mad händer om vi multiplicerar talet med i som har abslolutbeloppet $|i| ▸ 1$ och argumentet $\text{angle}(i) ▸ \frac{\pi}{2}$?

Vi uför muliplikationen $i\cdot(1+i) ▸ -1+i$

Absolutbeloppet: $|-1+i| ▸ \sqrt{2}$

Argumentet: $\text{angle}(-1+i) ▸ \frac{3\cdot\pi}{4}$

Absolutbeloppet är detsamma men argumentet (vinkeln) ökar med $\frac{\pi}{2}$ till $\frac{3\cdot\pi}{4}$

Vi skriver om i polär form:

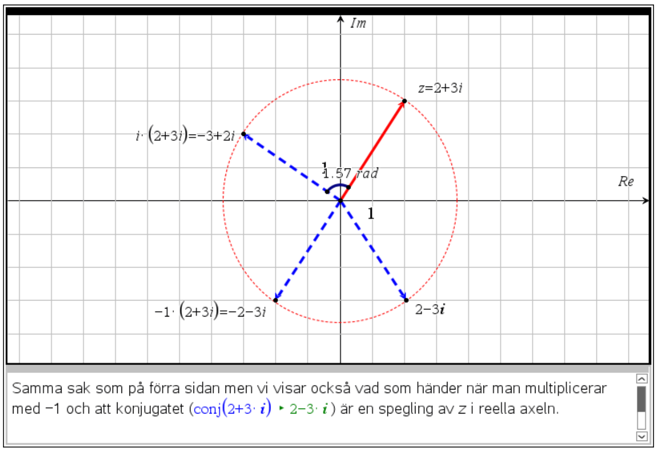
$\sqrt{2}\cdot 1\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right) ▸ -1+i$

Vad händer om man istället dividerar med i? Undersök detta på samma sätt som vid multiplikation?

Om vi dividerar (1+***i***) med ***i***, vad händer då? Be eleverna undersöka.

Sid 7:

här ser vi också vad som händer när man multiplicerar med -1 och när man tar konjugatet.



Samma sak som på förra sidan men vi visar också vad som händer när man multiplicerar med −1 och att konjugatet $(\text{conj}(2+3\cdot i) ▸ 2-3\cdot i)$ är en spegling av z i reella axeln.

Sid 8-9:

Här härleder vi de Moivres formel med hjälp av formlerna för dubbla vinkeln.

Potenser av komplexa tal –de Moivres formel

Låt oss säga att vi har ett komplext tal $z=r\cdot(\cos(\alpha)+i\cdot\sin(a))$. Vad händer om vi kvadrerar?

$(r\cdot(\cos(\alpha)+i\cdot\sin(a)))^2 \blacktriangleright ((\cos(\alpha))^2-(\sin(a))^2)\cdot r^2+2\cdot\sin(a)\cdot\cos(\alpha)\cdot r^2\cdot i$

Här känner man igen uttrycken för ***dubbla*** vinkeln:

$\cos(2\cdot\alpha)=(\cos(\alpha))^2-(\sin(\alpha))^2$ och $\sin(2\alpha)=2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$.

Här använder vi nu TI−Nspires instruktion *tCollect* för att skriva om uttrycket:

$\text{tCollect}(r^2\cdot((\cos(\alpha))^2-(\sin(\alpha))^2+(2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\cdot i))) \blacktriangleright \cos(2\cdot\alpha)\cdot r^2+\sin(2\cdot\alpha)\cdot r^2\cdot i$

Vi kan skriva om detta som $r^2\cdot(\cos(2\cdot\alpha)+i\cdot\sin(2\cdot\alpha))$

Vi prövar nu med z^3:

$\text{tCollect}(r^2\cdot(\cos(2\cdot\alpha)+i\cdot\sin(2\cdot\alpha))\cdot r\cdot(\cos(\alpha)+i\cdot\sin(\alpha))) \blacktriangleright \cos(3\cdot\alpha)\cdot r^3+\sin(3\cdot\alpha)\cdot r^3\cdot i$

Vi skriver om och får: $r^3\cdot(\cos(3\alpha)+i\cdot\sin(3\alpha))$

Detta leder till de Moivres formel mycket användbara formel:

$z^n=r^n\cdot(\cos(n\cdot\alpha)+i\cdot\sin(n\cdot\alpha))$

Så här blir det för några potenser av z där

$$z=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Till höger visar vi de komplexa talen

z, z^2, z^3, z^4 *och* z^5

där $z=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Konvertering av *z* till rektangulära koordinater:

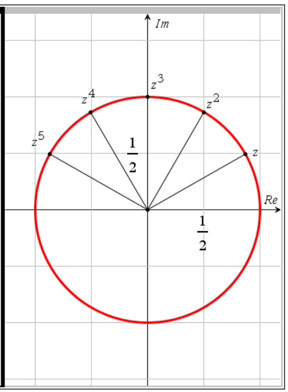
$z=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \blacktriangleright \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i$

$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right| \blacktriangleright 1$ $\text{angle}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right) \blacktriangleright \frac{\pi}{6}$

Vi beräknar z^4: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)^4 \blacktriangleright \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$

Vinkeln för z^4: $\text{angle}\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right) \blacktriangleright \frac{2\cdot\pi}{3}$

Stämmer om man tittar på figuren.



Be eleverna att beräkna z^{10} där z =1-*i* genom att använda de Moivres formel.

(Svar $32\cdot(\cos(-\pi/2)+i\cdot\sin(-\pi/2))$ eller -32*i.*)

Problem 3

Sid 1-2

Här använder vi de Moivres formel för att lösa en ekvation med en potens av *z*. Vi kontrollerar med den exakta lösningen med instruktionen *csolve*.

Lös ekvationen $z^3=27i$. Svara på formen $a+b\cdot i$.

Vi skriver om z på polär form:

$z=r\cdot(\cos(v)+i\cdot\sin(v))$ som ger

$z^3=r^3\cdot(\cos(3v)+i\cdot\sin(3v))$ enligt de Moivres fomel

z^3 är också lika med

$27\cdot i=27\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \blacktriangleright \text{true}$

Om vi trycker på enter får vi svaret "true" som betyder att likheten stämmer!

Detta betyder att:

$r^3=27$ som ger $r=3$ och att

$3v=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi$ som ger $v=\frac{\pi}{6}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$

n=0 ger

$z1=3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \blacktriangleright z1=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\cdot i$

n=1 ger

$z2=3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\cdot\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\cdot\pi}{3}\right)\right)$

$\blacktriangleright z2=\frac{-3\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\cdot i$

n=2 ger

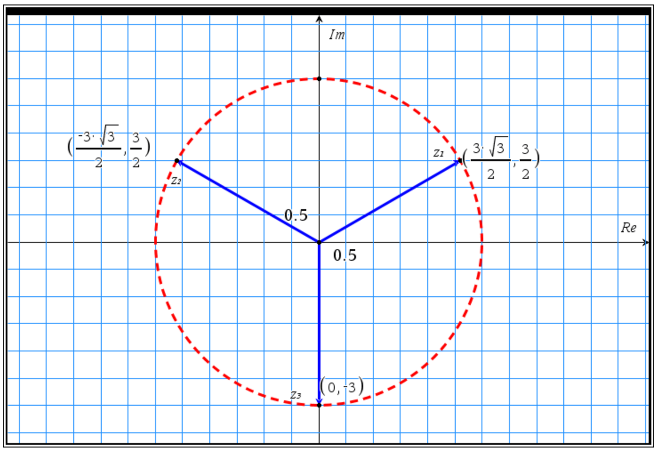
$z3=3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\cdot\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\cdot\pi}{3}\right)\right) \blacktriangleright z3=-3\cdot i$

Direkt beräkning med instruktionen *csolve*:

$\text{cSolve}(z^3=27\cdot i,z)$

$\blacktriangleright z=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\cdot i$ or $z=\frac{-3\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\cdot i$ or $z=-3\cdot i$

Vi ser att det stämmer! Se nästa sida där vi visar den geometriska lösningen.



Geometrisk lösning med vektorer

Sid 3-4:

En smart lösning av problemet är att rita ”kurvor” i parameterform med s.k. diskret visning. Parametern t motsvarar här n i lösningen på sid 2.

Fördjupning:

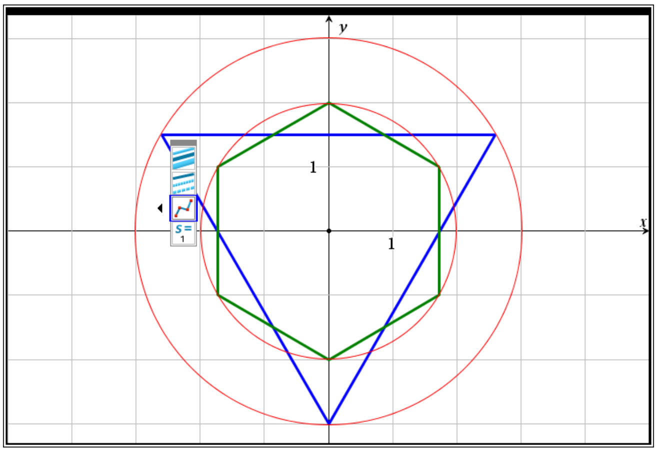
Nu visar vi en listig grej man kan göra för att visa lösningarna till ekvationen på förra sidan. Man använder sig då av ekvationer i parameterform och skriver sina parameterekvationer så här.

$$\begin{cases} x1(t)=27^{\frac{1}{3}}\cdot\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\cdot t}{3}\right) \\ y1(t)=27^{\frac{1}{3}}\cdot\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\cdot t}{3}\right) \\ 0\le t\le 3 \quad tstep=1 \end{cases}$$

Vi ser lösningarna i hörnen på triangeln.

Vi har i samma graffönster också ritat lösningarna till ekvationen $z^6=64$. Lösningarna är hörnen i den regelbundna sexhörningen.

Under attribut har vi här ställt in diskret punkt-förbunden visning. Ställs in under attribut om man ”pekar” på ”grafen”. Lösningarna är hörnen i den liksidiga triangeln. Här finns också lösningarna till $z^6=64$.



Övrigt:

på
http://www.thinkib.net/mathhlsl/page/16876/algebra-functions-equations
finns ett annat dokument (på engelska) du kan ladda ner. Handlar om en del av de saker vi tagit upp här. Det finns en kort video som beskriver vad man kan göra.