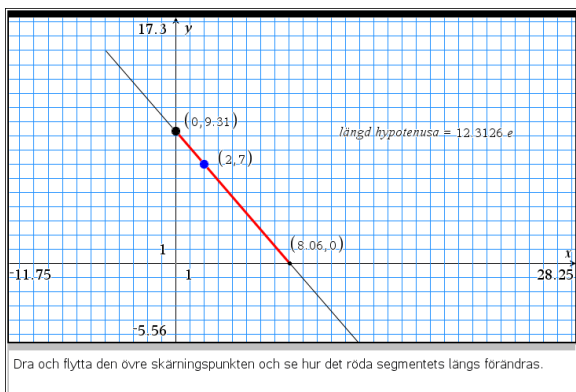


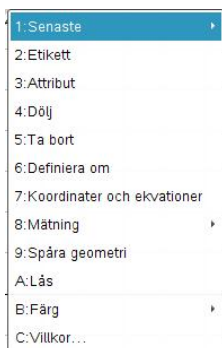
Kortaste linjen genom en punkt

En rätvinklig triangel i första kvadranten har koordinat-axlarna som kateter. Punkten $(2, 7)$ ligger på hypotenusan hos triangeln. Bestäm längden hos hypotenusan när den har sitt minsta värde.

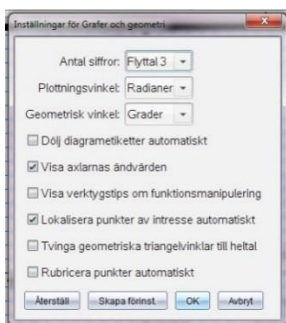
Övningen passar för kurs 4



Sid 2: Man börjar med att i applikationen grafer ställa in ett bra koordinatsystem. Med geometriverktyg sätter man sedan ut en punkt i $(2, 7)$. Om du högerklickar på punkten kommer sammanhangsmenyn upp och du ska *läsa* punkten. Klicka alltså på Läs. Med *Attribut* kan du ställa in färg och storlek på punkten. Du kan också ställa in visning av koordinater för punkten.



Under Inställningar i verktygsmenyn kan du t.ex. ställa av punkter i geometriska konstruktioner så att de inte rubriceras med bokstäver A, B, osv. Kan vara bra ibland men här behövs det ju inte.



Efter punktritningen drar vi sedan med geometriverktyg en linje genom punkten $(2, 7)$. Börja linjdragningen vid y -axeln och fram till punkten $(2, 7)$. Dra sedan ut linjen så att den skär x -axeln. Placera sedan en punkt vid skärningen med x -axeln.

Sedan ritar vi ett *linjesegment* (en linje med två definierade ändpunkter) från skärningarna med axlarna. Med geometriverktyget Mätning mäter vi sedan detta segments längd.

Nu kan du dra i den övre skärningspunkten och se hur segmentets längd ändras. Försök att få linjen så kort som möjligt.

Sid 3: Här börjar vi nu en mer analytisk behandling av situationen. Likformiga trianglar gör att vi kan teckna två uttryck för linjens lutning och sedan ställa upp en ekvation. Vi löser ut y .

Vi vet också att vi kan teckna ett uttryck för linjens längd med Pythagoras sats. Nu kan vi sedan definiera en funktion $f(x)$, som är ett uttryck med variabeln x , för kvadraten på längden.

Vi förenklar med verktyget gemensam nämnare

$$\text{comDenom} \left(y = \frac{14}{x-2} + 7 \right) \cdot y = \frac{7 \cdot x}{x-2}$$

Om längden av hypotenusan är c gäller sambandet $= c^2 = x^2 + y^2$

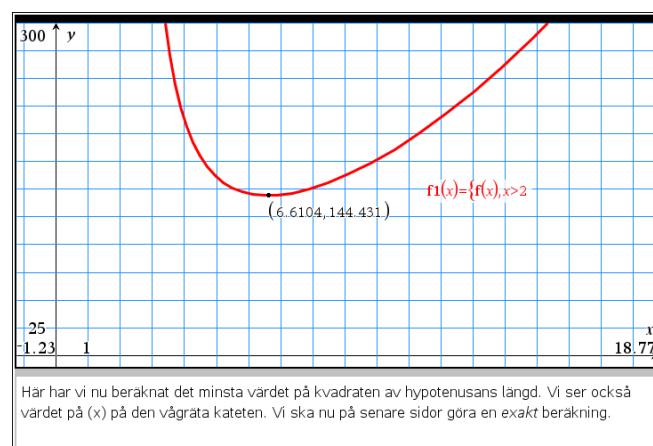
Nu vet vi också att sambandet mellan y och x är $y = \frac{7x}{x-2}$

Det betyder att att vi kan definiera en funktion $f(x)$ för kvadraten på längden av hypotenusan (med definitionsområde $x > 2$):

$$\text{Define } f(x) = x^2 + \left(\frac{7 \cdot x}{x-2} \right)^2$$

På nästa sida ritar vi denna funktion.

Sid 4: Vi ritar funktionen och beräknar med analysverktygen en grafisk/numerisk lösning av denna funktions minvärde.



Sid 5: Här beräknar vi i denna funktions minvärde algebraiskt och med programmets CAS-funktioner. Observera att man med CAS-verktygen kan få uttryck som

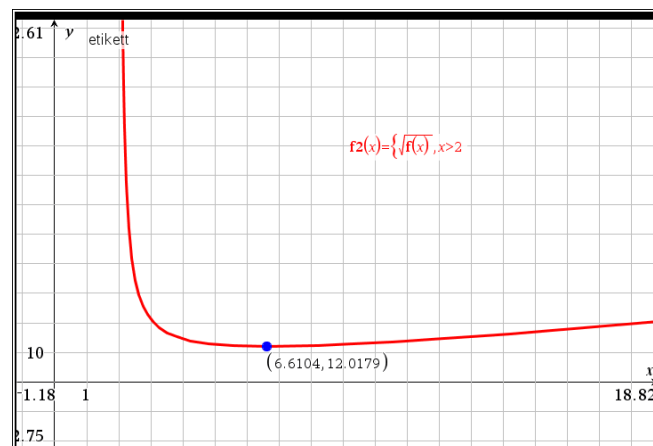
$$7^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \text{ som också kan skrivas } \sqrt[3]{98}.$$

Det exakta värdet är alltså

$$\sqrt{\frac{(\sqrt[3]{98} + 2)^3}{2}}$$

På sista raden har vi beräknat ett närmevärde på linjens längd. När man utvärdera ett numeriskt uttryck får man ett approximativt värde om man trycker ned Ctrl och enter samtidigt.

Sid 7: Här har vi ritat denna funktion. Vi ser att vi får närmevärdet 12,0179.



<p>Derivering av $x^2 + \frac{7 \cdot x}{x-2} = x^2 + \frac{49x^2}{(x-2)^2}$</p> <p>enligt kvotregeln:</p> $2x + \frac{98x \cdot (x-2)^2 - 49x^2 \cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4}$ $= 2x + \frac{98x(x-2) - 98x^2}{(x-2)^3} = 2x - \frac{196x}{(x-2)^3}$ <p>Direkt derivering med CAS-verktygen:</p> $\frac{d}{dx}(f(x)) \cdot 2 \cdot x - \frac{196 \cdot x}{(x-2)^3}$ <p>Att söka nollställen till uttrycket ovan är inte särskilt krångligt. Vi får:</p> $2x = \frac{196x}{(x-2)^3} \Rightarrow (x-2)^3 = 98 \Rightarrow x-2 = \sqrt[3]{98} \Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{98}$	<p>CAS-verktyget ger:</p> $\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0, x\right) \rightarrow x=0 \text{ or } x=7^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2$ <p>Förklaring:</p> $7^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{7^{\frac{1}{3}}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{1}{(7 \cdot 2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{14}} = \frac{1}{\sqrt[3]{98}} = \sqrt[3]{\frac{1}{98}}$ <p>Beräkning av hypotenusans längd i kvadrat:</p> $f\left(2 + \sqrt[3]{98}\right) = \frac{\left(7^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2\right)^3}{2} = \frac{(\sqrt[3]{98} + 2)^3}{2}$ <p>dar $f(x) = x^2 + \frac{7 \cdot x}{x-2}$</p> <p>Hypotenusans längd = $\sqrt{f\left(2 + \sqrt[3]{98}\right)} = 12.0179443401$</p>
--	---

Sid 6: Tricket tidigare var att titta på kvadraten av längden hos hypotenusan. Vi visar här att TI-Nspires CAS-verktyg klarar av att beräkna längden exakt utifrån ett krångligt rotuttryck.

Varför gör vi beräkningen på kvadraten av hypotenusan? Vi provar att ta derivatan av kvadratroten på tidigare uttryck för f(x):

$$\sqrt{x^2 + \frac{49 \cdot x^2}{(x-2)^2}} \Big|_{x>2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{x^2-4} \cdot x+53}{x-2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x \cdot \sqrt{x^2-4} \cdot x+53}{x-2} \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-4} \cdot x+53} - 2 \cdot \frac{\sqrt{x^2-4} \cdot x+53}{(x-2)^2}$$

Vi får ett ganska krångligt uttryck för derivatan. *Tricket* var alltså tidigare att istället titta på uttrycket för hypotenusans längd i kvadrat.

Programmet CAS-verktyg klarar dock av detta direkt:

$$\text{solve}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4} \cdot x+53} - \frac{2 \cdot \sqrt{x^2-4} \cdot x+53}{(x-2)^2} = 0, x\right) \rightarrow x = 7^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2$$