Logistiska funktioner

Vi vet att exponentiell tillväxt inte kan fortgå i all evighet. Exponentiella modeller kan visserligen vara användbara på kort sikt, men de blir mindre och mindre giltiga ju längre de pågår. Tänk på berättelsen om riskornen på schackbrädet där antalet korn fördubblas för varje ruta. Med 64 rutor blir det

$2^{64}-1$ eller 18 446 744 073 709 551 615

riskorn på brädet.

Så småningom måste alltså en exponentiell modell börja närma sig ett visst gränsvärde, och då tvingas tillväxten att avta. Därför är det ofta bättre att använda en modell med en övre gräns i stället för en exponentiell tillväxtmodell, även om den exponentiella tillväxtmodellen fortfarande är användbar på kort sikt innan den närmar sig gränsvärdet.

Den *logistiska* tillväxtmodellen är ungefär exponentiell i början, men har en minskad tillväxttakt när man närmar sig modellens övre gräns. Den brukar kallas *bärkraft*. För konstanterna *a*, *c* och *r* representeras den logistiska tillväxten för en population under tiden *x* av modellen

$$y=\frac{c}{1+a\cdot e^{-rx}}$$

där *a*, *c* och *r* är positiva konstanter.

Du kommer att undersöka logistiska funktioner genom att plotta dem och därigenom upptäcka egenskaper hos dessa.

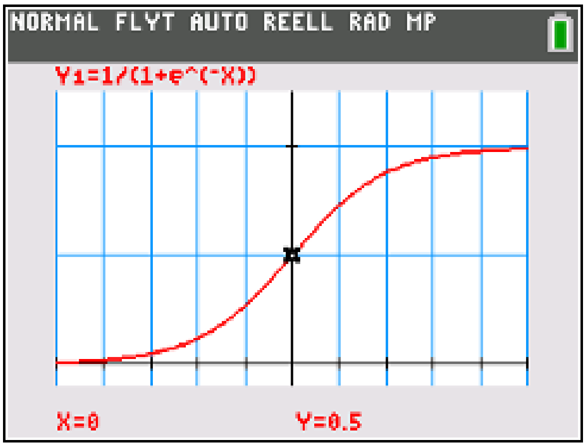
Börja nu med att plotta den enklaste logistiska funktionen, nämligen

$$y=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

Här har alla konstanterna värdet 1.

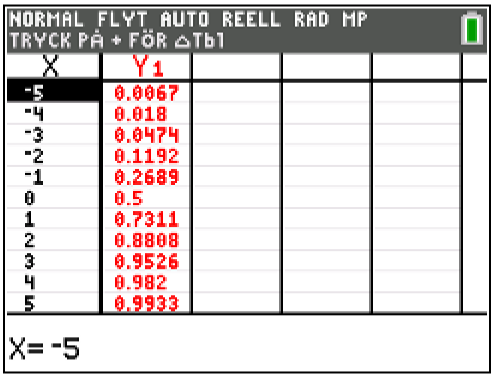
Ställ in ett fönster som har xmin=-5, xmax=5, ymin =- 0,1 och ymax=1,25.

Så här blir då plottningen:



Vi ser att kurvan med den skalning vi har kan liknas vid ett utdraget liggande *S*.

1. Vilka värden har funktionen för stora negativa och positiva värden på x? Du kan använda räknarens tabellfunktion för detta. Nedan visar vi först tabellen för x-värden från -5 till 5 med steget 1.



X	Y1
-5	0.0067
-4	0.018
-3	0.0474
-2	0.1192
-1	0.2689
0	0.5
1	0.7311
2	0.8808
3	0.9526
4	0.982
5	0.9933

X= -5

För att visa funktionsvärden för andra x-värden så trycker du på [2nd] – och fyller i mallen så här

2. Nu kan du skriva in vilka x-värden som helst och få ut y-värdet. Hur skulle du beskriva funktionen som du plottat mer än att den har formen av ett utdraget S?

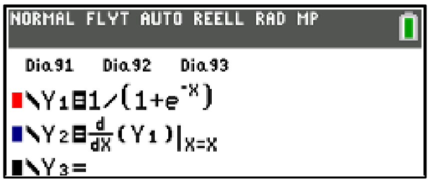
3. Om du trycker på [2nd] [calc] kan du numeriskt beräkna derivatans värde i olika punkter. Vilket värde har derivatan för *x* =0? Vilka värden har derivatan för *x*-värden som är mindre och större än 0?

____

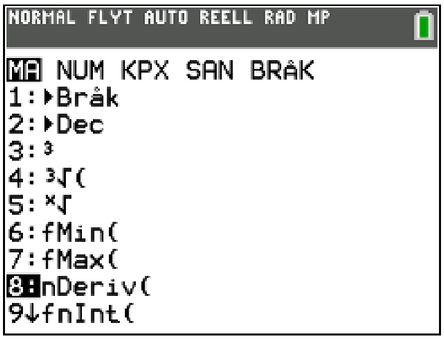
____

Tänk på att du med räknaren även kan plotta hur derivatan som en funktion även om du inte kan göra en algebraisk beräkning. Man får då använda en numerisk derivata.

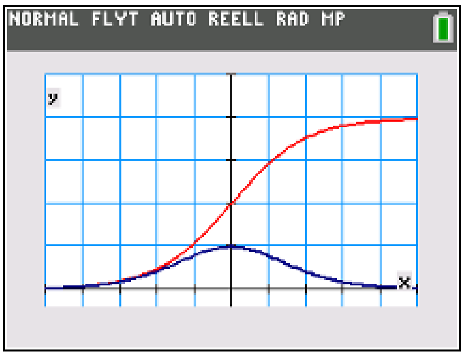
I inmatningsfältet för funktioner ska det se ut så här om vill plotta både funktion och dess derivata.



Du kopierar in mallen för derivator genom att trycka på tangenten [math] och sedan välja MA och till sista alternativ 8: nDeriv.



Plotta nu båda funktionerna. Har du gjort rätt så ser det ut så här:



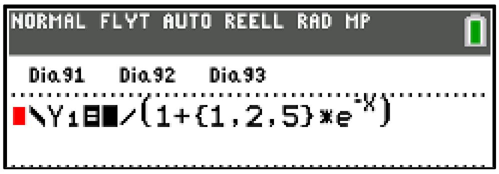
4 Visa att derivatafunktionen kan skrivas som

$$y=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

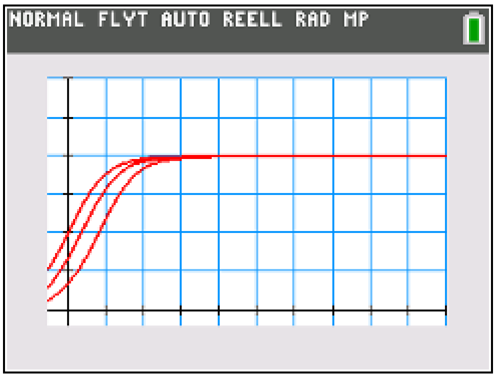
Plotta nu den logistiska funktionen

$$y=\frac{c}{1+a\cdot e^{-rx}}$$

för olika värden på konstanterna ***a***, ***c*** och ***r***. Vi tittar nu bara på positiva x-värden. För konstanten *a* kan vi till exempel låta den anta värdena 1, 2 och 5 och då kan vi skriva in som ett funktionsuttryck så här:



Vi har alltså lagt in en lista, {1,2,5} i stället för ett enstaka tal. Graferna för tre olika värden på ***a*** plottas då så här

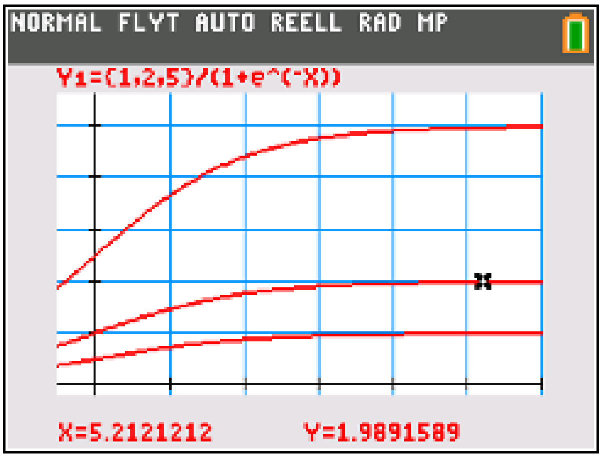


Använd sedan de verktyg som finns på räknaren för att undersöka funktionerna.

Undersök

- skärning med *y*-axeln, dvs värdet för x=0.
- Gränsvärdet för stora värden på x
- I vilken punkt funktionerna lutar mest, dvs har sin största tillväxthastighet.

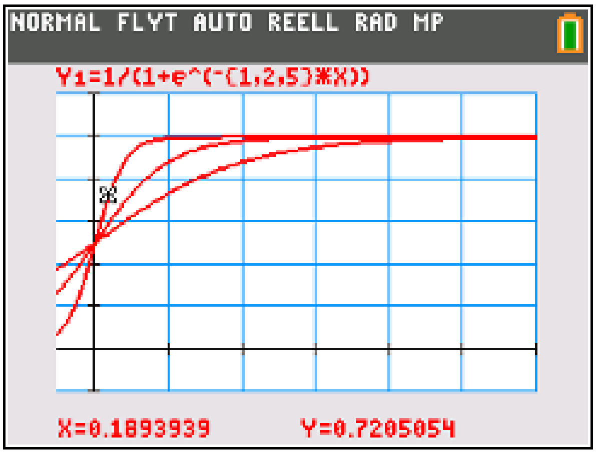
Nu varierar vi konstanten *c*. Vi låter den ha värdena 1, 2 och 5.



Vad kan du utläsa från de tre graferna?

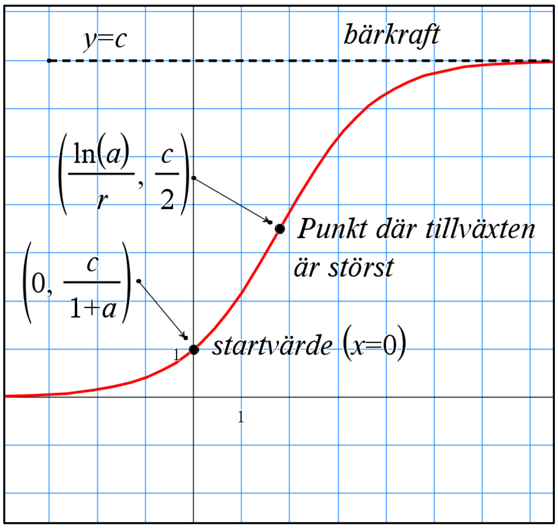
Slutligen så varierar vi nu konstanten ***r***. Vi skriver alltså här i editorn för funktioner:

Här är graferna för tre olika värden på konstanten ***r***.



Pröva gärna med andra värden på konstanterna. Använd [trace] för att spåra i kurvorna och bland analysverktygen finns också en funktion för att beräkna derivatan numeriskt i olika punkter. Tryck då på [2nd] [calc] och välj alternativ 6: dy/dx.

Här är nu en sammanfattning om tre viktiga punkter på en logistisk funktion och hur värdena hänger ihop med konstanterna ***a***, ***c*** och ***r***.



Vi ser att den punkt där derivatan ärt störst (kallas inflexionspunkt) har ett värde som är halva bärkraften (*c*/2). Du kan också pröva att räkna ut *x*-koordinaten för den punkten som ln(*a*)/*r*. Den funktion vi har ovan är

$$y=\frac{7}{1+6e^{-x}}$$

Vi övergår nu till några enkla tillämpningar på logistiska funktioner.

Exempel – Influensaepidemi

En influensaepidemi sprider sig snabbt i en population. Den hastighet med vilken den sprider sig beror på två faktorer:

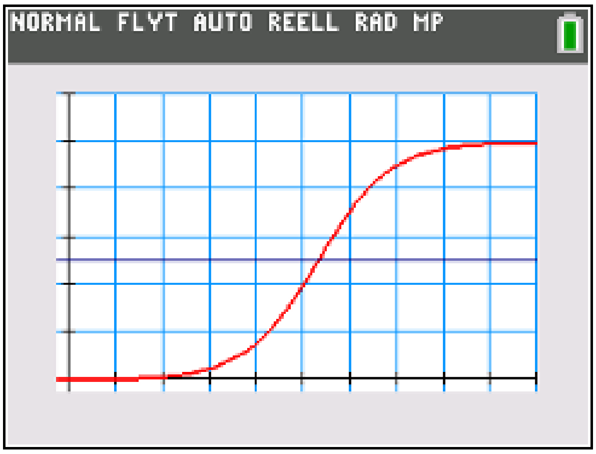
- Ju fler personer som har influensan, desto snabbare sprids den
- och ju fler *icke*-smittade personer det finns, desto snabbare sprids den också.

Dessa två faktorer gör den *logistiska* modellen lämplig för att studera spridningen av smittsamma sjukdomar. Det är också uppenbart att det finns ett största värde för antalet smittade personer. Det är hela populationen.

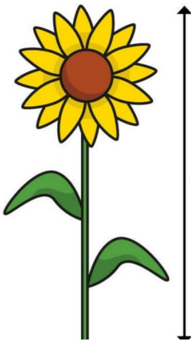
Till exempel finns det vid tiden *t* = 0 en person i ett samhälle med 1 000 personer som har influensa. I det samhället kan alltså högst 1 000 personer ha influensa. Forskningen säger att för denna specifika influensa så är den logistiska tillväxtkonstanten ***r*** = 0,65. Uppskatta antalet personer i detta samhälle som kommer att ha haft denna influensa efter tio dagar respektive 20 dagar

Förutsäg också hur många personer i detta samhälle som kommer att ha haft denna influensa efter en längre tidsperiod.

Så här den nu den logistiska kurvan ut. Vi har dessutom lagt in ekvationen för en vågrät linje. Beräkna skärningspunkten och tala om vad man då har räknat ut.



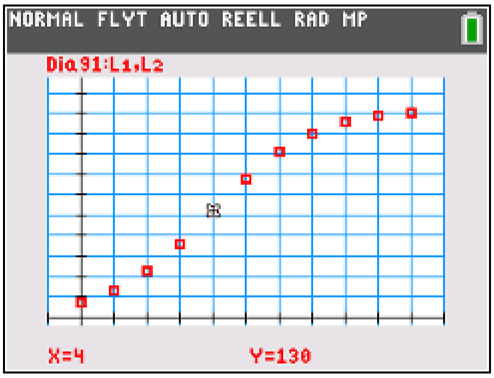
Exempel -Hur växer en solros?



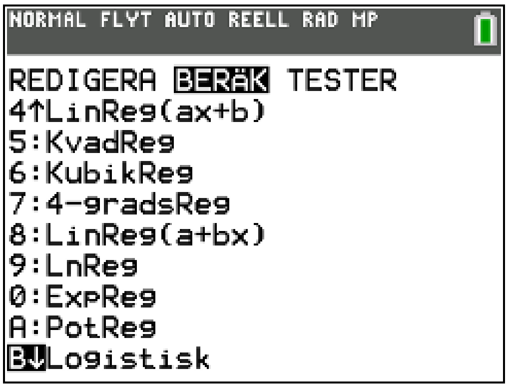
Tabellen nedan visar höjden på en solros när den växer under 10 veckor. Tiden har mätts i veckor och höjden är i cm.

Tid (veckor)	Höjd (cm)
0	18
1	33
2	56
3	90
4	130
5	170
6	203
7	225
8	239
9	247
10	251

Mata nu in data i statistikeditorn och plotta nu först ett spridningsdiagram. Det bör bli ungefär så här om du ställer in ett bra fönster.



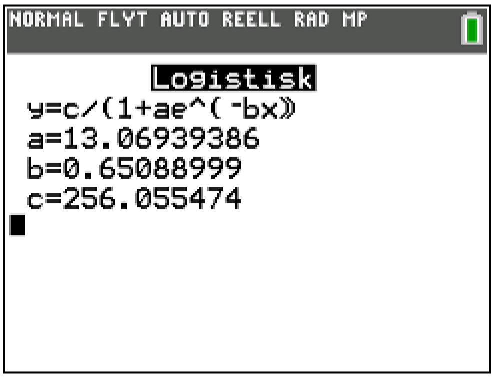
Använd nu räknarens inbyggda funktioner fört att göra en logistisk regressionsanalys. Tryck på tangenten stat, välj sedan BERÄK och sedan **Logistisk** i listan. Se figur nedan.



Sedan kan nästa fönster se ut så här, beroende på i vilka listor du har lagt dina data. Vi vill att den framräknade logistiska uttrycket ska hamna på plats **Y1** i funktionseditorn. Man kopierar in y1 genom att trycka på tangenten vars, väljer Y-VAR och sedan Y1 i listan.

Markera **Beräkna** och tryck på enter.

Så här blir resultatet:



Plotta nu den logistiska funktionen genom att trycka på graph. Hur pass bra stämmer den logistiska regressionsmodellen med data?