

Modellera en avkylningsprocess

En avkylningsprocess hos en vätska är ett klassiskt exempel på en tillämpning på en differentialekvation av första ordningen. Newtons lag säger att avkylningen kan modelleras av ekvationen

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_0)$$

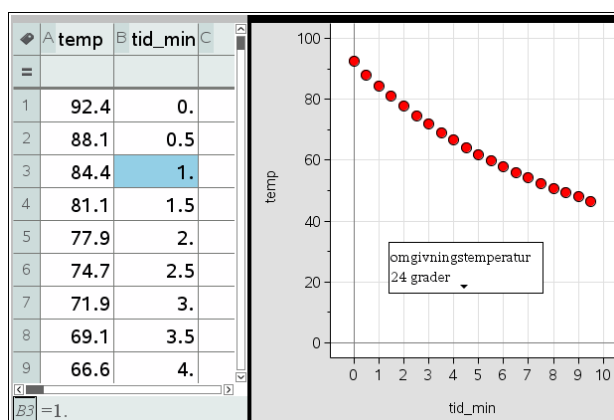
där T är temperaturen hos vätskan, T_0 är temperaturen hos omgivningen, som antas vara konstant, och den är i detta fall 24 °C. k är en parameter vars värde beror på hur snabbt vätskan kallnar.

Lösningen till denna differentialekvation är

$$T(t) = T_0 + C \cdot e^{kt}$$

där C är differensen mellan begynnelsetemperaturen (när $t=0$) och omgivningens temperatur.

I experimentet mättes temperaturen var 30:e sekund under ca 10 minuter. Omgivningens temperatur var som tidigare nämnts 24 grader.



Beräkning av parametrarna C och k i uttrycket

$$T(t) = T_0 + C \cdot e^{kt}$$

kan göras på olika sätt Vi kan börja med att lösa ett ekvationssystem med två obekanta. Vi använder då data vid tiden 0 minuter och 9.5 minuter. Vi kan välja andra mätpunkter om vi vill. Vi får då ungefär samma värden på C och k . Det intressanta här att vi bara behöver två mätpunkter. För ett andragsgrads-uttryck skulle du behöva tre mätpunkter.

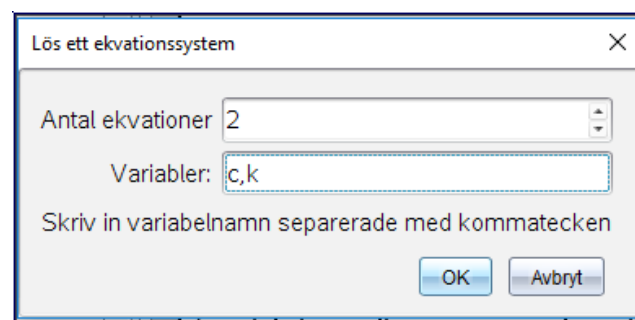
Vi använder här beteckningen tp för temperatur och $tp(0) = 92,4$ och $tp(9.5) = 46,5$. Se tabell nästa spalt.

emp	tid_min	C
17	50.7	8.
18	49.2	8.5
19	47.9	9.
20	46.5	9.5
21		
22		

Först definierar vi ekvationen $tp(t)$ med två okända konstanter. Vi skriver då

$$tp(t) := c \cdot e^{k \cdot t} + 24$$

Vi använder sedan algebraverkytet "Lös ekvations-system.



$tp(t) := c \cdot e^{k \cdot t} + 24$ ▶ Klar

solve $\left\{ \begin{array}{l} tp(0) = 92.4 \\ tp(9.5) = 46.5 \end{array} \right. \cdot \{c, k\}$

▶ $c = 68.4$ and $k = -0.117038$

I grafappen på nästa sida lägger vi nu in data (spridningsdiagram med variablerna tid_min och $temp$ och själva lösningsfunktionen. |

Vi får nu parametrarna beräknade. Vi hade kunnat göra detta på ett annat sätt också. Om $t=0$ så får vi ju:

$$92.4 = 24 + C \cdot e^{k \cdot 0}$$

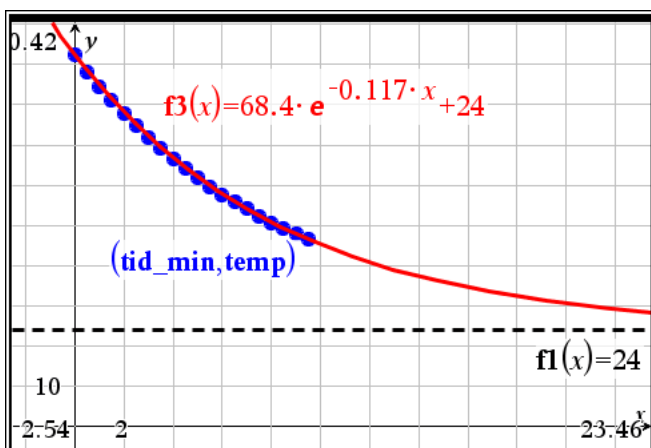
Då $e^{k \cdot 0} = 1$ så får vi ju direkt att $C = 92.4 - 24 = 68.4$. Det stämmer med vad som sagts tidigare om Newtons avkylningslag: " där C är differensen mellan begynnelsetemperaturen (när $t=0$) och omgivningens temperatur."

```

deSolve(y'=k*(y-24),x,y)          y=c2*e^k*x+24
© 24 är omgivningstemperaturen.
deSolve(y'=k*(y-24) and y(0)=92.4,x,y)  y=68.4*(2.71828)^k*x+24.
© y(0)=92.4 är begynnelsevillkoret.
solve(46.5=68.4*e^k*9.5+24,k)      k=-0.117038
© vi sätter in värdet på temperaturen efter 9.5 minuter och löser en ekvation.

```

Vi kan nu plotta datapunkterna från mätningarna och exponentialfunktionen med de beräknade värdena på c och k . Vi ser att modellkurvan följer mätpunkterna nästan perfekt. Kurvan närmar sig asymptotiskt linjen $f_1(x)=24$.



Man kan naturligtvis också hitta en lösningskurva numeriskt med t.ex. Eulers stegmetod. Här har vi lagt in konstanten k som en parameter och använt skjutreglaget för att se hur lösningskurvan förändras när k -värdet ändras.

