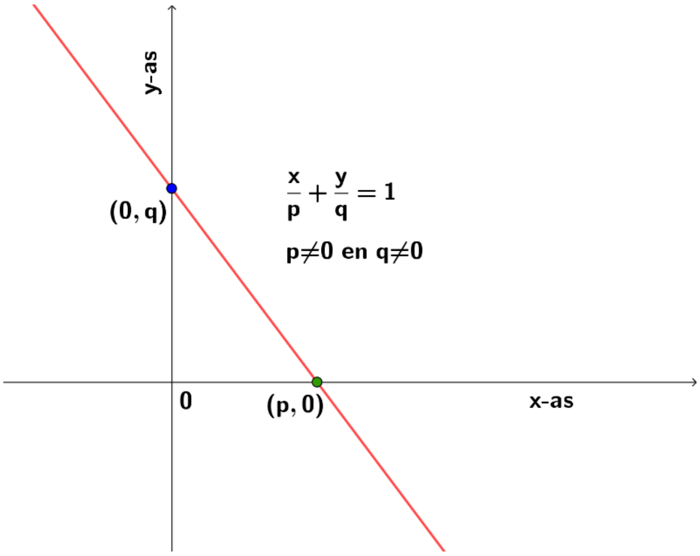
Omzetten $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ naar de vorm $ax+by=c$

Eén van de minder vaak gebruikte formules voor het weergeven van een lijn is de vorm:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=\mathbf{1}$$

Met $p \neq 0$ en $q \neq 0$ en het snijpunt met de $x-as$: $(p,0)$ en het snijpunt met de $y-as$: $(0,q)$.

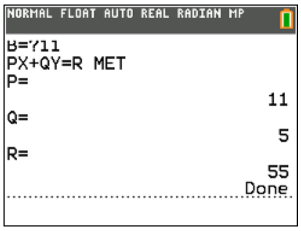


Vaak wordt gevraagd dit om te schrijven naar de vorm: $ax+by=c$.

Op zich niet echt moeilijk als het gehele getallen en herkenbare waarden betreft, maar hoe wordt die omzetting als je met breuken moet werken?

Om dit te illustreren wat voorbeelden:

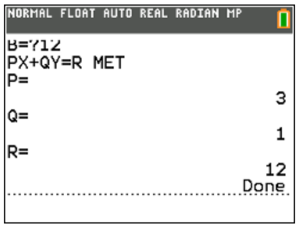
VB1: (eenvoudig)



$\frac{x}{5}+\frac{y}{11}=1$ Vermenigvuldigen met $(5\times 11)=55$ geeft:

$11x+5y=55$.

VB2: (eenvoudig)



$\frac{x}{4}+\frac{y}{12}=1$ Vermenigvuldigen met 12 geeft: $3x+y=12$.

Nu wat uitdagendere voorbeelden met een breuk:

VB3: (uitdagender)

$\frac{x}{\frac{1}{5}}+\frac{y}{\frac{3}{8}}=1$ Vermenigvuldigen met $(5\times 8)=40$ geeft niet echt een mooi resultaat.

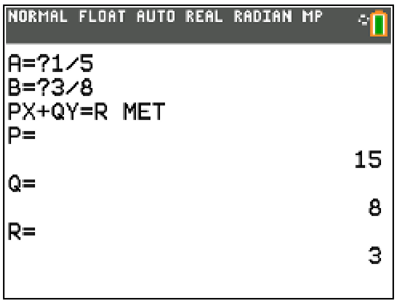
Je krijgt dan: $200x+106\frac{2}{3}Y=40$.

Om te kijken of we een betere oplossing kunnen vinden gaan we de vergelijking anders opschrijven:

$\frac{x}{\frac{1}{5}} + \frac{y}{\frac{3}{8}} = 1 \Longrightarrow \frac{5x}{1} + \frac{8y}{3} = 1$

Vermenigvuldigen met 3 geeft als eindresultaat:

$15x + 8y = 3.$



VB4: (uitdagender)

$\frac{x}{0{,}3} + \frac{y}{0{,}35} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{\frac{3}{10}} + \frac{y}{\frac{35}{100}} = 1 \Longrightarrow \frac{10x}{3} + \frac{100y}{35} = 1$

Vermenigvuldigen met $(3 \times 35 = 105)$ geeft:

$350x + 300y = 105.$

Verder vereenvoudigen tot: $70x + 60y = 21.$

Om er voor te zorgen dat je na de omzetting een formule krijgt zonder breuken of decimale getallen moet je in sommige gevallen echt goed kijken wat je moet doen.

Wat bij voorbeeld 3 en 4 is gedaan , het herschrijven van de formule met een tussenstap, is met de TI-84 wat minder eenvoudig uit te voeren.

Het apart nemen van de “noemer” van de twee breuken om zo te komen tot de factor die je nodig hebt voor de vermenigvuldiging is voor een rekenmachine een lastige stap.

De rekenmachine zal immers de “breuk” uitrekenen. $\frac{1}{4}$ wordt $0{,}25$ en

$\frac{1}{0{,}35}$ wordt 2,85742857.. voor de rekenmachine. Je TI-84 gaat met die decimale waarde rekenen, iets wat je in dit specifieke geval liever niet wil.

Om de rekenmachine toch te kunnen sturen om dat te doen wat gewenst is gaan we een algemene aanpak bekijken.

Algemene aanpak:

$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$ met A en B een breuk wordt dat:

$\frac{x}{\frac{d}{e}}+\frac{y}{\frac{g}{h}}=\frac{ex}{d}+\frac{hy}{g}=1$. Neem het product: $A\times B=\left(\frac{d}{e}\times\frac{g}{h}\right)=\frac{dg}{eh}$.

$\frac{dg}{eh}\cdot\left(\frac{ex}{d}+\frac{hy}{g}=1\right)=\frac{gx}{h}+\frac{dy}{e}=\frac{dg}{eh}$. Vermenigvuldig dit allemaal met $e\cdot h$.

$eh\cdot\left(\frac{gx}{h}+\frac{dy}{e}=\frac{dg}{eh}\right)\Longrightarrow eg\cdot x+hd\cdot y=dg$

In de breuk zijn de waarden van d,e,g en h gehele getallen, dus de uiteindelijke uitdrukking die we hebben gekregen zal ook uit gehele getallen bestaan.

In hoofdlijnen zet het programma de volgende stappen:

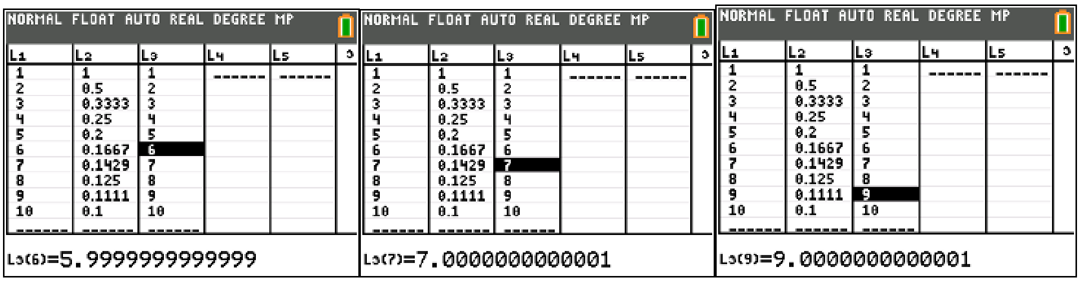
1) Bepaal het product: $A\cdot B=I$.
2) Introduceer een teller V en verhoog die stap voor stap tot de waarde eh.
3) Vermenigvuldig A , B en I met V.
4) Indien nodig deel door de GGD.

<u>Extra problemen om te overwinnen:</u>

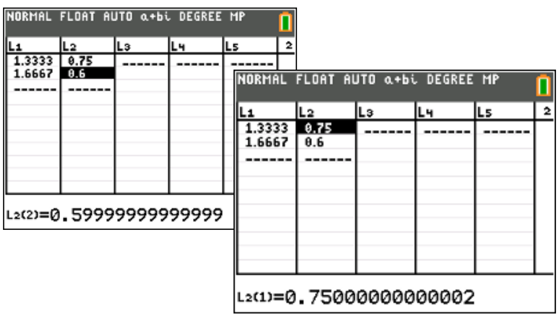
Er is lang aan dit programma gewerkt omdat er steeds onvoorziene complicaties optraden.

Zo liep het programma bij sommige getallen vast. Na lang zoeken bleek de oorzaak van het probleem te schuilen in afrondingsfouten gemaakt door de TI-84. Om dit te illustreren drie screenshots:

Lijst1: getallen 1 t/m 10 ; Lijst 2: $\frac{1}{L_1}$; Lijst 3: $(L_2)^{-1}$



Zo is te zien dat : $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}=5{,}99999999$ in plaats van 6. Dat afrondingsprobleem treedt ook op bij 7 en 9, maar ook bij getallen als $\frac{4}{3}$ en $\frac{5}{3}$. Zie de screenshots: $L_2=\frac{1}{L_1}$



Ook daar heeft de TI84 een ander getal in het geheugen staan dan je in feite verwacht.

Opties als $\mathbf{fPart}((\mathbf{getal})^{-1}) = \mathbf{0}$ of **K=iPart(K)** geven dan niet de uitkomst die je wenst en zorgt ervoor dat het programma in een eindeloze loop komt. Het programma loopt dan door zonder ooit met een oplossing te komen.

In onderstaand programma is dit probleem met gedwongen afronding opgelost.

Programma: XAYBLIJN

Disp "VOOR A≠0 EN B≠0"		
Disp "ZET X/A+Y/B=1 OM NAAR"		
Disp "PX+QY=R"		
Disp "VOER A IN"		
Prompt A		
Disp "VOER B IN"		
Prompt B		
If A=0 or B=0		Delen door 0 mag niet. Foutmelding geven.
Then		
Disp "A OF B NUL MAG NIET"		
Stop		
Else		
A*B→I		Bepaal product A en B.
If A=iPart(A) and B=iPart(B)		Zijn A en B hele getallen? Onderzoek je hier.
Then		
gcd(abs(A),abs(B))→J		Bepaal de GGD van A en B.
A/J→Q		Bepaal de getallen voor de formule.
B/J→P		
I/J→R		
Goto O		
Stop		
Lbl O		
Disp "PX+QY=R MET"		
Disp "P=",P		
Disp "Q=",Q		
Disp "R=",R		
Stop		
Else		
round($\mathbf{A^{-1}}$,5)→K	(1)	Bepaal reciproke waarde van A en B.
round($\mathbf{B^{-1}}$,5)→L		Rond die waarde af op 5 decimalen.
If K=iPart(K) and L=iPart(L)		Kijk of reciproke weer heel getal is: $\left(\frac{1}{e}\right)^{-1} = e$?
Then		Klopt ? Dan gelijk klaar.
K→P		
L→Q		
1→R		
Goto O		
Stop		
Else		

0→V		Zet teller op 0.
ClrHome		Maak scherm leeg.
Output(5,1,"RUNNING")		Plot dit in scherm. Laat zo zien dat programma nog
Lbl M		werkt, ook al duurt dat soms lang.
V+1→V		
Output(7,1,V)		Laat oplopende waarde van eh zien.
round(V*A,5)→O	(2)	Rond de waarden af op 5 decimalen.
round(V*B,5)→P		
round(V*I,5)→Q		
If fPart(O)=0 and fPart(P)=0 and fPart(Q)=0		
Then		Zijn alle waarden geheel geworden dan door naar K.
Goto K		
Else		Nog niet geheel? Dan terug in de loop.
Goto M		
Stop		
Lbl K		
gcd(abs(O),abs(P))→L		Bepaal de GGD van de gevonden oplossingen.
gcd(L,abs(Q))→N		
O/N→D		Deel door GGD.
P/N→E		
Q/N→F		
Disp "PX+QY=R MET"		
Disp "P=",E		
Disp "Q=",D		
Disp "R=",F		
Stop		

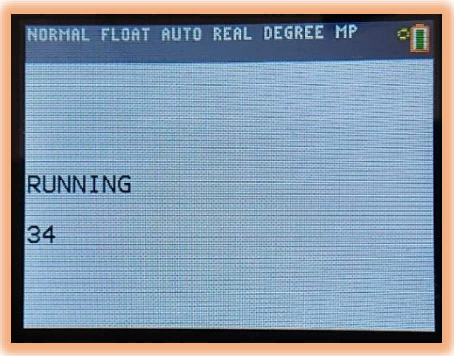
Opmerkingen:

(1+2) Om tegen te gaan dat je een eindeloze lus inschiet, afronden op 5 decimalen.

Volgorde:
Het programma kijkt eerst of A en B al geheel zijn van zichzelf. Ja? Dan O,P,Q bepalen.

Vervolgens kijkt het programma of $A = \frac{1}{e}$ en $B = \frac{1}{h}$. Ja?, dan met reciproke O,P,Q bepalen.

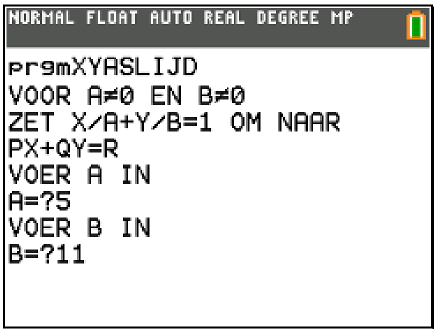
Zijn **twee bovenstaande niet** aan de orde dan start de lange procedure en komt in beeld:

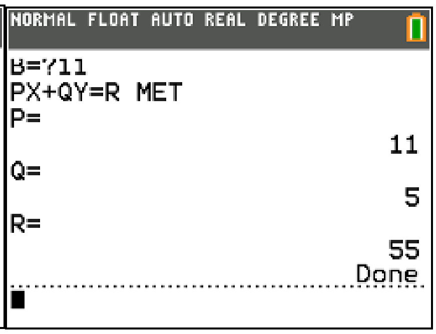


Dit beeld is met opzet ingevoerd omdat in speciale gevallen het 20 of meer seconden duurt voor er een definitief antwoord naar voren komt.
De TI-84 laat je nu zien dat er nog wordt gewerkt en geeft de waarde van $V = eh$ weer. In dit geval stond die al op 34 en liep snel verder op.
Is V aan zijn eindwaarde, dan krijg je de oplossingen O,P,Q te zien.

VB1:

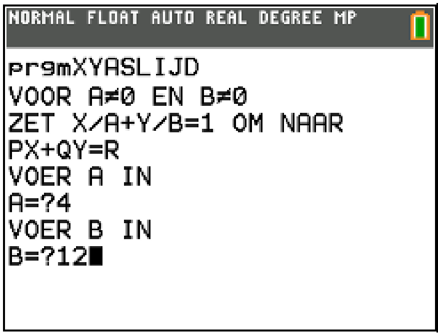
A=5 en B=11

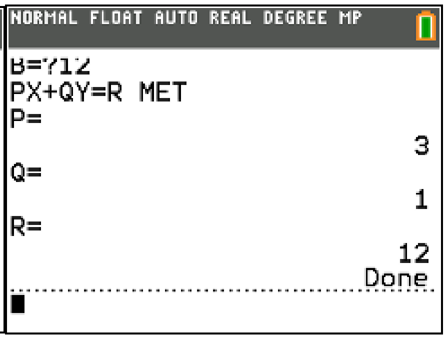




VB2:

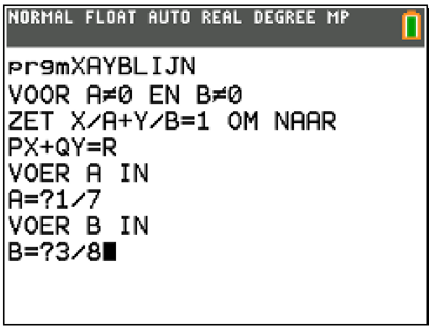
A=4 en B=12

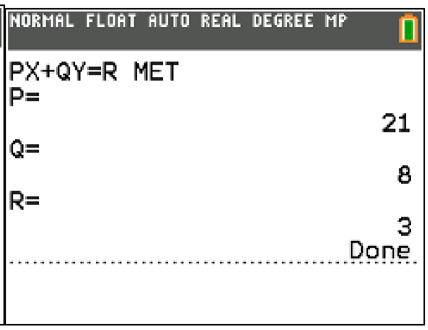




VB3:

A= $\frac{1}{7}$ en B= $\frac{3}{8}$

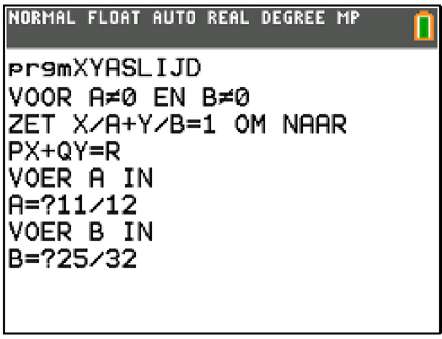


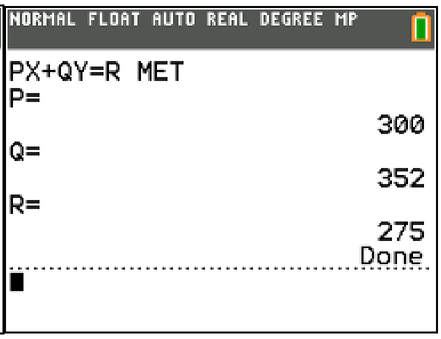


(Door de gedwongen afronding lukt dit. Zonder afronding zou er nooit een antwoord komen.)

VB4:

A=$\frac{11}{12}$ en B=$\frac{25}{32}$





VB 5:

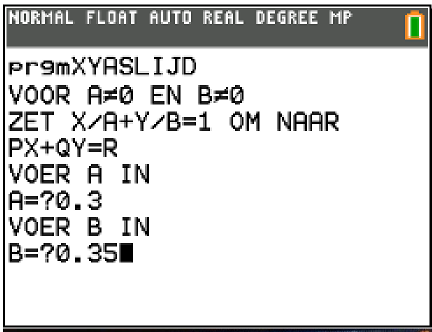
A=0,3 en B=0,35

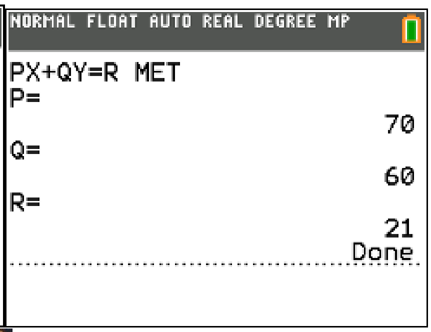
$\frac{x}{0,3}+\frac{y}{0,35}=1$; $A\times B=\frac{3}{10}\times\frac{35}{100}=\frac{105}{1000}=\frac{21}{200}$; Dus V zal oplopen tot 200.

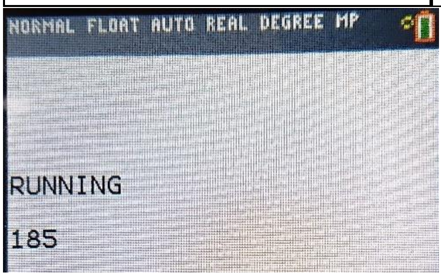
$\frac{21}{200}\left(\frac{x}{0,3}+\frac{y}{0,35}=1\right)$ geeft: $0,35x+0,3y=\frac{21}{200}$

$200\left(0,35x+0,3y=\frac{21}{200}\right)$ geeft: $70x+60y=21$

Nu via de TI-84:



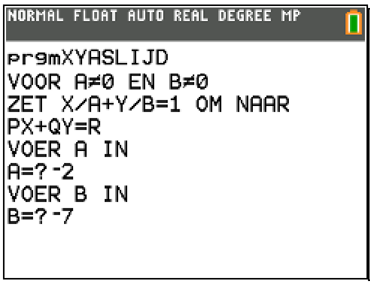


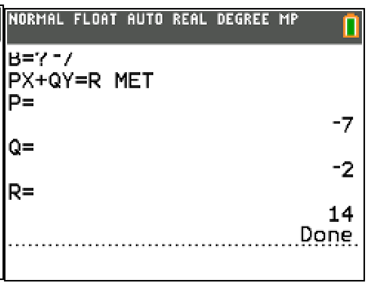


Screenshot vlak voor einde programma. Bij $V=200$ komt resultaat in beeld.

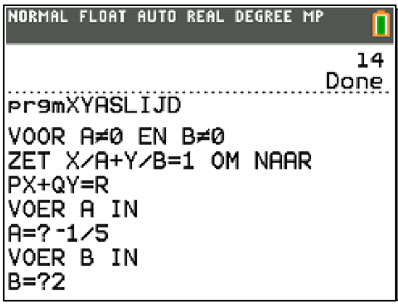
Nog wat voorbeelden met negatieve getallen.

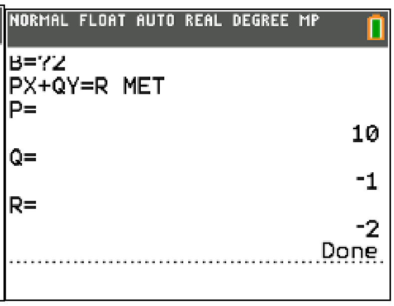
$$A = -2 \; en \; B = -7$$



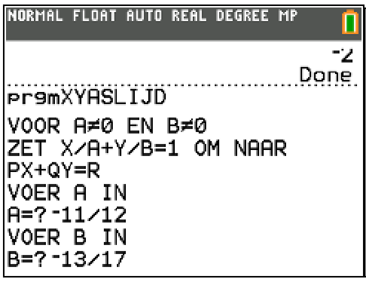


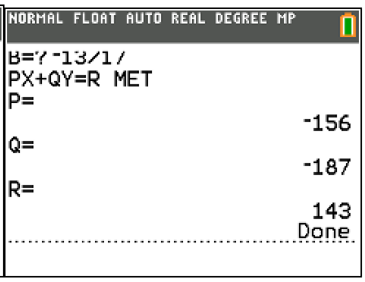
$$A = -\frac{1}{5} en \; B = 2$$



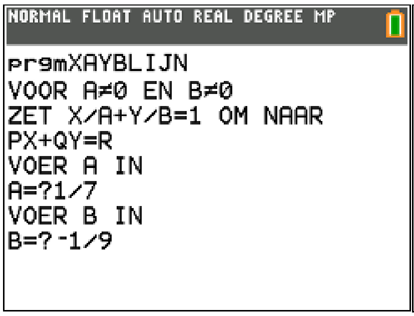


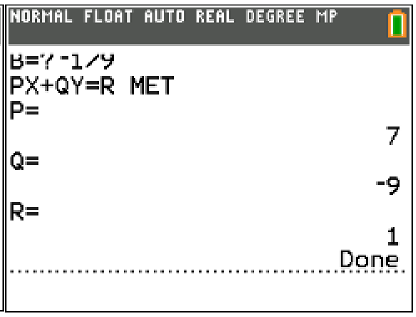
$$A = -\frac{11}{12} en \; B = -\frac{13}{17}$$





$$A = \frac{1}{7} en \; B = -\frac{1}{9}$$





(Door de gedwongen afronding lukt dit. Zonder afronding zou er nooit een antwoord komen.)