Undersöka förändringshastigheter

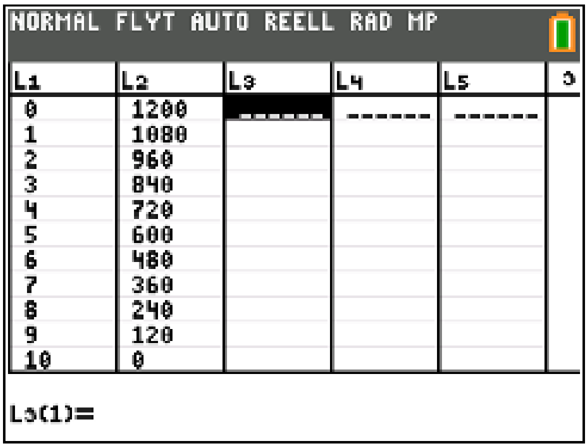
I denna aktivitet ska vi undersöka förändrings-hastigheten i tre olika situationer.

Den första situationen: klass 3S på gymnasiet samlade in 1200 kronor under en promenad på stan. De tänker köpa och ge bort böcker till skolans bibliotek för de yngre barnen

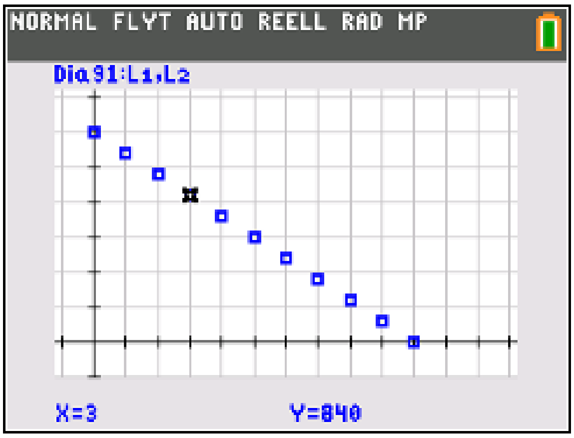
De satte in pengarna i klassens kassaskåp och tar ut en fast summa på 120 kr varje vecka för att köpa böcker. För att hålla reda på pengarna gör Lisa och Max en tabell över hur mycket pengar de har i kassaskåpet i slutet av varje vecka. De har påbörjat sin tabell nedan. Ta en stund på dig för att färdigställa den tabell som Lisa och Max påbörjat.

Vecka nr	Värde	Omskrivning	NY omskrivning
0	1200	1200	1200-120·(0)
1	1080	1200-120	1200-120·(1)
2	960	1200-240	1200-120·(2)
3	840	1200-360	1200-120·(3)
4	720	1200-480	1200-120·(4)
5	600	1200-600	1200-120·(5)
6	480	1200-720	1200-120·(6)
n			**FYLL I HÄR**

Lägg nu in kolumnerna Vecka nr i lista L1 och Värde i lista L2 i statistikeditorn. Du ska använda *en formel* för att skapa värdena i L2 Du har hjälp av kolumnen NY Omskrivning. Det kan se ut så här:



Plotta också ett spridningsdiagram ()



1. Vad kan du säga om förändringshastigheten utifrån diagrammet ovan.
2. Beskriv nu förändringshastigheten i ord utifrån det du vet från exemplet

Den andra situationen: klass 3S på gymnasiet samlade in 1200 kronor under en promenad på stan. De tänker köpa och ge bort böcker till skolans bibliotek för de yngre barnen.

De satte in pengarna i klassens kassaskåp och tar ut 50 kr för den första veckan och *ökar* sedan uttaget med 50 kr varje vecka. För att hålla reda på pengarna gör Lisa och Max en tabell över hur mycket pengar de har i kassaskåpet i slutet av varje vecka.

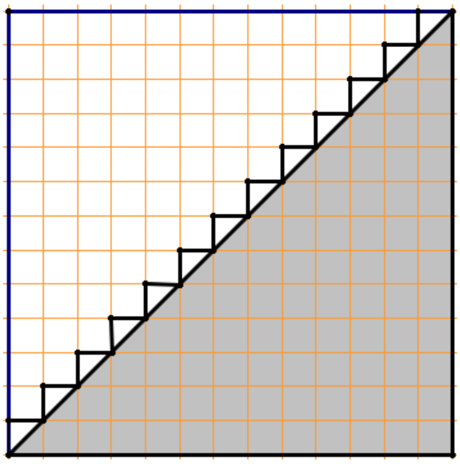
Vecka nr	Värde	Omskriv-ning	NY omskrivning
0	1200	1200	1200-50·(0)
1	1150	1200-50	1200-50·(1)
2	1050	1200-150	1200-50·(1)-50·(2)
3	900	1200-300	1200-50·(1)-50·(2)-50·(3)
4	700	1200-500	1200-50·(1)-50·(2)-50·(3)-50·(4)
5	450	1200-750	1200-50·(1)-50·(2)-50·(3)-50·(4)-50·(5)
6	150	1200-1050	1200-50·(1)-50·(2)-50·(3)-50·(4)-50·(5)-50·(6)
n			**FYLL I HÄR**

Efter *n* veckor så är värdet i kassaskåpet

$1200-50\cdot(1+2+3+\ldots+n)$

Hur ska vi nu summera 1 + 2 + 3 + 4 + .. ?

Betrakta trappan i figuren nedan. Den är byggd av kvadratiska block med arean 1 och det finns sammanlagt $n \times n = n^2$ block.



Summan av alla block i trappan är halva kvadraten (det grå fältet) plus alla de svarta trappstegen, som är halva kvadrater. De har ju arean 1/2.

Om figuren nu är en $n \times n$ kvadrat så består hela trappan av

$$\frac{n^2}{2} \text{ block (gråa fältet)} + n \cdot \frac{1}{2} \text{ block (trappstegen)}$$

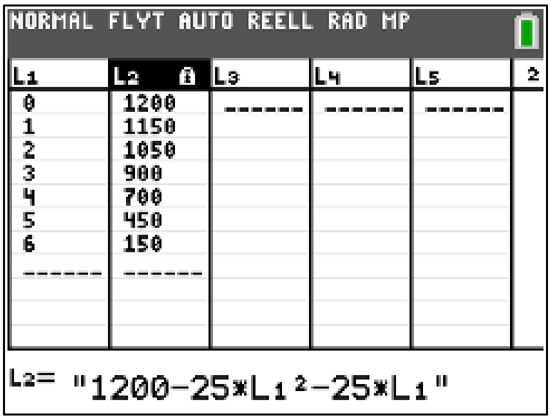
Totala antalet block blir då

$$\frac{n^2}{2} + n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Detta betyder att vi har en färdig formel för värdet i kassaskåpet efter n veckor:

$$1200 - 50 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1200 - 25n^2 - 25n$$

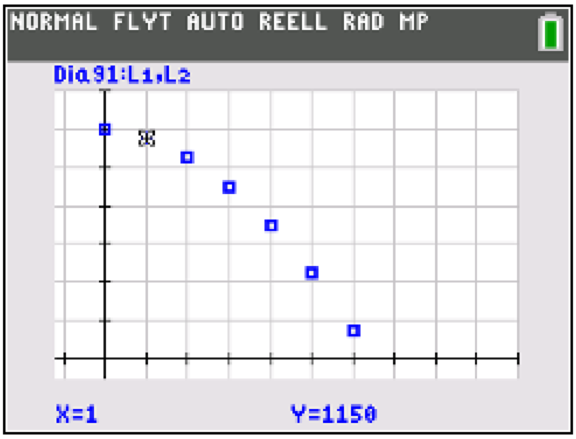
Detta är ju ett uttryck av andra graden. Vi lägger in detta uttryck i statistikeditorn:


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

L1	L2	L3	L4	L5	2
0	1200	------	------	------	
1	1150				
2	1050				
3	900				
4	700				
5	450				
6	150				
------	------				

L2= "1200-25*L1²-25*L1"

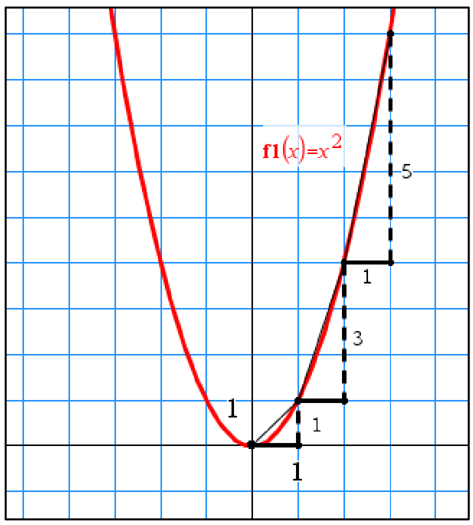
Så här blir plottningen:



Hur är det nu med förändringshastigheten nu? I första fallet var den ju konstant, 120 kr/vecka.

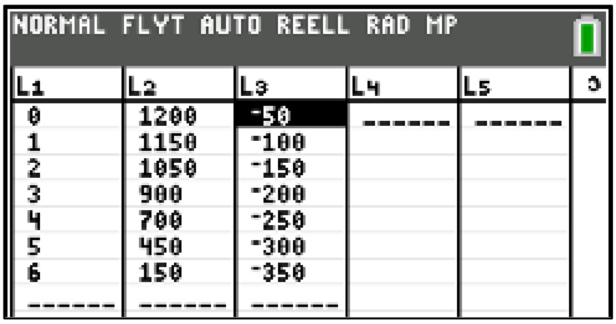
Lutningen på en rät linje är ett mått på förändringshastigheten. När du ritar en rät linje märker du att förändringshastigheten (lutningen) är densamma mellan alla punkter längs linjen. Förändringshastigheten för en rät linje sägs vara *konstant*.

Förändringshastigheten för en kvadratisk funktion är dock *inte* konstant (den förblir inte densamma). Det finns inga raka linjesegment på en parabel. Kan vi då tala om "lutning" när vi har att göra med en andragradsfunktion? Svaret är "ja, på sätt och vis", men resultatet blir inte detsamma som det vi har sett med raka linjer. När vi försöker tala om lutningen (eller förändringshastigheten) för en kvadratisk funktion måste vi tala om den *genomsnittliga förändringshastigheten* (lutningen på det segment som förbinder två punkter på kurvan).



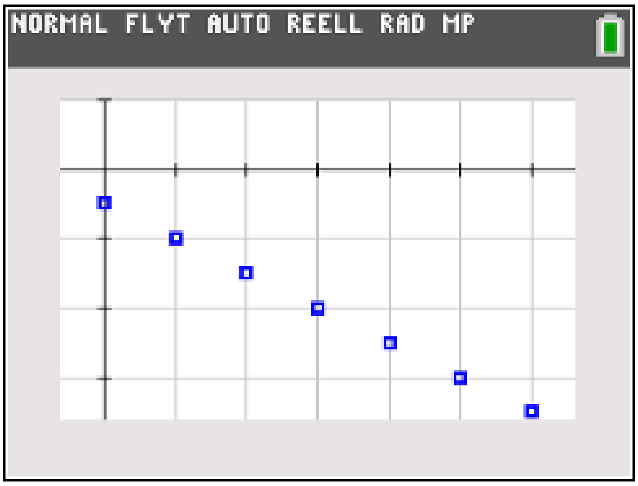
Skillnaden är att denna genomsnittliga förändringshastighet (lutning) *INTE* är konstant. Den kommer att förändras beroende på var de två punkterna på kurvan ligger.

Om vi nu tittar på förändringen mellan värden ser det ut så här:



Vi ser att *värdeminskningen* förändras med 50 kr för varje vecka. Det är alltså en ***linjär*** förändring.

Vi plottar lista L1 mot lista L3.



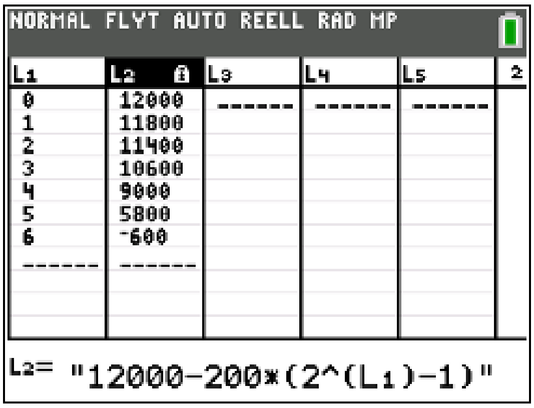
Den tredje situationen: Eleverna på gymnasiet samlade in hela12000 kronor under en promenad på stan. De tänker köpa och ge bort böcker till skolans bibliotek för de yngre barnen.

De satte in pengarna i elevrådets kassaskåp och tar ut 200 kr för den första veckan och fördubblar sedan uttaget varje vecka. För att hålla reda på pengarna gör Lisa och Max en tabell över hur mycket pengar de har i kassaskåpet i slutet av varje vecka.

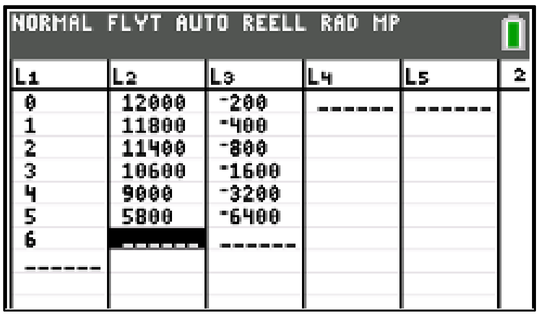
Vecka nr	Värde	omskrivning
0	12000	$12000-200\cdot(2^0-1)$
1	11800	$12000-200\cdot(2^1-1)=$ $12000-200=11800$
2	11400	$12000-200\cdot(2^2-1)=$ $12000-200\cdot 3=11400$
3	10600	$12000-200\cdot(2^3-1)=$ $12000-200\cdot 7=10600$
4	9000	$12000-200\cdot(2^4-1)=$ $12000-200\cdot 15=9000$
5	5800	$12000-200\cdot(2^5-1)=$ $12000-200\cdot 31=5800$
6		
..		
..		
n		$12000-200\cdot(2^n-1)$

Detta är en s.k. geometrisk serie där varje term är dubbelt så stor som den föregående

Nu plottar vi denna funktion utifrån data i statistikeditorn. S e formeln i kolumnhuvudet i lista L2.



Värdet avtar alltså exponetiellt. Hur är det med förändringshastigheten (värdeförändringen per vecka)?



På samma sätt som för andragradsfunktionen: Förändringshastigheten för en exponentiell funktion är *inte* konstant (den förblir inte densamma). Det är faktiskt också en exponentialfunktion