T³ VLAANDEREN

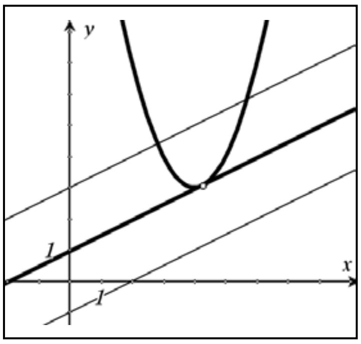
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 27

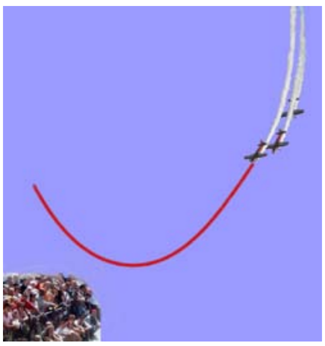
Functies en vergelijkingen van de tweede graad

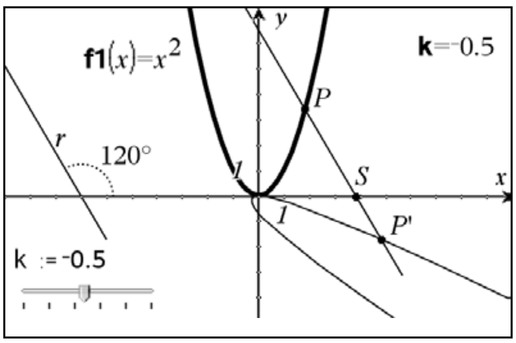
Dynamisch en geschikt voor CAS

Benno Frei
René Hugelshofer
Robert Märki

Vertaling: Guido Herweyers







KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Benno Frei
René Hugelshofer
Robert Märki

Functies en vergelijkingen van de tweede graad

Dynamisch en geschikt voor CAS

Bronvermelding bij de foto's
p 11 Kornhausbrug in Bern (R. Märki)
p 13 Airshow (R. Hugelshofer)
p 15 François Viete (Public Domain)
p 27 Motorbestuurder (Keystone, Tom Lüthi)
p 28 Basketbal (R. Hugelshofer)
p 30 Golfspeler (R. Hugelshofer)
p 54 Pierre Fermat (Public Domain)

Woord vooraf

Dit cahier over „Functies en vergelijkingen van de tweede graad" illustreert een CAS-aanpak van dit onderwerp (CAS=Computer Algebra System). Deze publicatie bevat naast korte theoretische bijdragen een grote keuze van oefeningen met verschillende moeilijkheidsgraad en uit verschillende vakgebieden. De onderwerpen zijn dan ook geschikt voor de verschillende richtingen in het ASO, TSO en KSO. De leerkracht kan hieruit een keuze maken, in overeenstemming met het leerplan en geschikt voor de leerlingen.
Parameters spelen een belangrijke rol in de wiskunde en de fysica. Door parameterwaarden te wijzigen wordt wiskunde dynamisch. Het samenspel tussen de grafische voorstelling met behulp van meetkundige werktuigen enerzijds en de concrete oplossing met CAS anderzijds, werkt motiverend en efficiënt voor het leerproces.
Vergelijkingen en functies van de tweede graad lenen zich vanuit didactisch standpunt uitstekend tot een verantwoord gebruik van CAS in het onderwijs. Hiermee verkrijgt men exacte algebraïsche oplossingen, waardoor parameterinvloeden niet alleen numeriek en grafisch kunnen worden bestudeerd, maar tevens symbolisch. Bij hogere graadsvergelijkingen is dit echter ofwel onmogelijk, ofwel slechts in beperkte mate mogelijk met zeer onoverzichtelijke en ingewikkelde resultaten. Bovendien hebben tweedegraadsfuncties en -vergelijkingen een zeer omvangrijk en gevarieerd toepassingsgebied, de ervaring leert ook dat men de leerlingen hiermee kan boeien en motiveren. De voorgaande bespreking verantwoordt een zeer uitgebreide en grondige behandeling van dit thema.

In hoofdstuk 1 komen vooral transformaties in een coördinaatsysteem aan bod. Meetkundige werktuigen zoals schuifregelaars zorgen voor een snelle grafische voorstelling en dankzij CAS kunnen de berekeningen worden beperkt tot een redelijk aantal.
In hoofdstuk 2 worden vervolgens symmetrie, nulpunten, algemene oplossing van een tweedegraadsvergelijking en bepaling van een parabooltop behandeld, zowel manueel als met het rekentoestel. De werkwijze wordt vervolgens veralgemeend tot de „raaklijnmethode" , waarmee veel raakproblemen elementair (en vaak eenvoudiger dan met afgeleiden) kunnen worden opgelost.
In hoofdstuk 3 worden transformaties uitgebreid voor impliciet gedefinieerde functies. Hier kan de symmetrie in de verschillende transformaties (verschuiving en uitrekking in de richting van beide assen) bijzonder mooi worden getoond.
In hoofdstuk 4 worden optimaliseringsopgaven met nevenvoorwaarden opgelost, met verschillende methoden. Ook voorbeelden die op dit schoolniveau enkel kunnen worden opgelost met grafische methoden komen aan bod, in het bijzonder voor richtingen met weinig lestijden wiskunde per week , waar analyse vaak niet aan bod komt.

Alle opgaven en oplossingen zijn ter beschikking als TI-Nspire™ bestanden. De opgavenbestanden maken het individueel werken met elektronische werkpagina's mogelijk. De oplossingsbestanden tonen hoe de opgaven met inzet van CAS kunnen worden opgelost. Deze bestanden vindt men op de **TI-Materialendatenbank** onder **www.ti-unterrichtsmaterialien.net**

Inhoudsopgave

1 De kwadraatfunctie, parabolen

1.1 De kwadraatfunctie en veelvouden

Definitie:

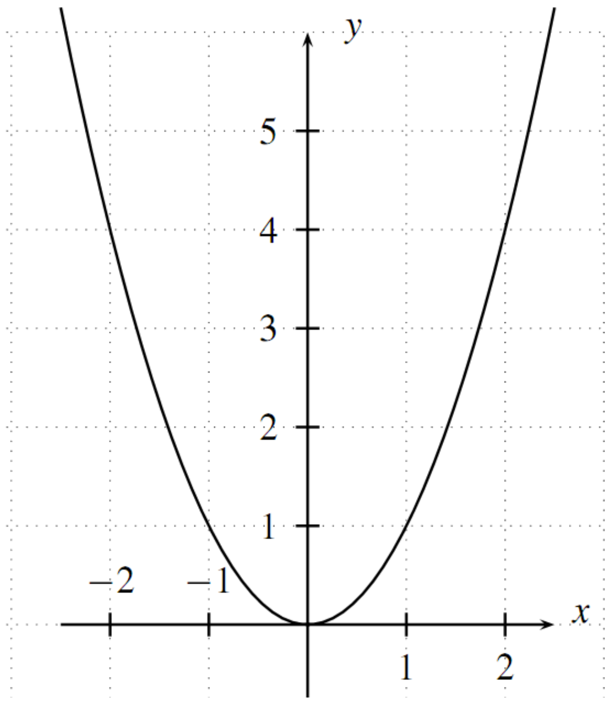
Als met elke waarde uit het domein eenduidig zijn kwadraat $y = x^2$ wordt geassocieerd, dan wordt dit verband kwadraatfunctie genoemd.
Schrijfwijze: $x \mapsto y = x^2$ of $x \mapsto f(x) = x^2$.

Vaak spreekt men enkel kort over de functie $f(x) = x^2$ of de kromme met vergelijking $y = x^2$.

De numerieke en grafische voorstelling van de kwadraatfunctie $x \mapsto y = x^2$ levert:
een tabel van functiewaarden:

x	-2	-1.5	-1	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	1	1.5	2
$y = x^2$	4	2.25	1	0.36	0.16	0.04	0	0.04	0.16	0.36	1	2.25	4

grafisch:



Grafiek van de functie $x \mapsto y = x^2$

De top

De grafiek is symmetrisch t.o.v. de y-as. De *top* van de parabool is het snijpunt van de symmetrieas met de grafiek.
De *standaardparabool* is de grafiek van $x \mapsto y = x^2$, de top is $S(0 \mid 0)$.

Opgave 1.1

Maak een grafiek van de functie $x \mapsto y = x^2$. Liggen de punten $P(3.5 \mid 12.5)$ en $Q(2.5 \mid 6.25)$ op de grafiek? Ga dit na door berekening. Welke waarde heeft t als het punt $R(3.1 \mid t)$ op de grafiek ligt?

Opgave 1.2

a) Teken de grafiek van de functie $x \mapsto y = x^2$ vet (standaardparabool). Teken vervolgens de grafiek van de functies $x \mapsto y = ax^2$ in hetzelfde assenstelsel voor $a = 2; 4; -2; -4$. Vergelijk de grafiek van deze functies met de standaardparabool en noteer je bevindingen.

b) Teken tevens een grafiek van de functies $x \mapsto y = ax^2$ met $a = \frac{1}{4}$ en $a = -\frac{1}{4}$. Beschrijf nu algemeen hoe de factor a de vorm van de parabool beïnvloedt.

c) Met TI-Nspire™: beweeg de cursor over de standaardparabool $y = x^2$ (niet in de buurt van de top). De cursor verandert in een scheve dubbele pijl. Neem de curve vast (linker muisklik) en beweeg de cursor. De curve verandert en gelijktijdig ook de vergelijking van de functie. Op die wijze kan de standaardparabool bijvoorbeeld in de grafiek uit b) worden getransformeerd.

De verworven inzichten vatten we samen (vul in!):

STELLING:

De grafiek van de functie $x \mapsto y = ax^2$ ontstaat uit de grafiek van de functie $x \mapsto y = x^2$ door uitrekking in de ...... -richting met de factor .... Voor $|a| >$ ...... wordt de parabool slanker, voor ...... breder dan de standaardparabool. Voor $a > 0$ is de opening naar ...., voor $a < 0$ naar............ .

1.2 Topvorm van de algemene tweedegraadsfunctie

Opgave 1.3

a) Teken de functie $x \mapsto y = 0.5x^2 + v$ voor $v = 0$ (vet); $2 ; 4 ; -2 ; -4$.
Noteer je bevindingen. Waar ligt de top telkens?

b) Met TI-Nspire™: beweeg de cursor naar de top van de parabool met $v = 0$ (de cursor verandert in een viervoudige pijl evenwijdig met de assen). Verschuif de parabool verticaal en observeer hoe de vergelijking van de functie wijzigt. Hoe verandert de vergelijking als men de parabool horizontaal verschuift? Noteer je bevindingen. Teken opnieuw de parabool met $v = 0$.

c) Maak een functietabel en observeer de verticale afstanden van de verschillende krommen tot de kromme $y = 0.5x^2$ voor verschillende x-waarden. Formuleer het resultaat.

Opgave 1.4

d) Teken $y = 0.5\left(x - u\right)^2$ voor $u = 0$ (vet); 3 ; -3. Hoe ontstaan de parabolen uit de parabool met $u = 0$? Noteer je bevindingen. Waar ligt de top telkens?

e) Teken ook de krommen

$y = 0.5\left(x - 3\right)^2 + 2$

$y = 0.5\left(x - 3\right)^2 - 2$

$y = -0.5\left(x - 3\right)^2 + 2$

$y = -0.5\left(x - 3\right)^2 - 2$

f) Bepaal een algemene regel voor de invloed van de parameters a, u, v op de vorm en ligging van de parabool $y = a\left(x - u\right)^2 + v$.

De verworven inzichten vatten we samen (vul in!):

STELLING:

De grafiek van de functie $x \mapsto y = a\left(x - u\right)^2 + v$ ontstaat uit de grafiek van de functie $x \mapsto y = ax^2$ door verschuiving in de x-richting over ...... en in de y-richting over ...... eenheden. Het is dus een parabool die congruent is met de parabool met vergelijking $y = ax^2$. De top is $S(...... \mid ......)$.

De paraboolvergelijking in de vorm $y = a\left(x - u\right)^2 + v$ heet *topvorm.*

Opgave 1.5

Maak schuifregelaars voor de parameters a, u en v. Wijzig hiermee de kromme met vergelijking $y = a\left(x - u\right)^2 + v$ en illustreer zo de bovenstaande stelling.

Opgave 1.6

Schets de volgende parabolen met de hand (controleer indien nodig met het rekentoestel):

a) $f1\left(x\right) = -\frac{5}{2}x^2$ b) $f2\left(x\right) = \frac{x^2}{2} - 3$

c) $f3\left(x\right) = -\left(x + 3\right)^2$ d) $f4\left(x\right) = \frac{1}{4}\left(x - 1\right)^2$

e) $f5(x) = 2(x+6)^2 - 1$ f) $f6(x) = -(x-5)^2 - 2$

g) $f7(x) = x^2 - 6x + 9$

Opgave 1.7

Groepswerk: elke student tekent 5 parabolen met zijn rekentoestel (rooster weergeven). Verberg de paraboolvergelijkingen en wijs enkel $f1, \ldots, f5$ aan. De partner bepaalt de vergelijkingen van de parabolen zonder de definities van de functies te bekijken.

Opgave 1.8

Bepaal de vergelijking van de corresponderende parabool:

a) Rek de standaardparabool uit in de richting van de y-as met factor 2

Verschuif de standaardparabool

b) 5 eenheden naar boven

c) 4 eenheden naar links

d) Voer de bovenstaande stappen uit in de volgorde

I) a), b), c)

II) c), a), b)

III) c), b), a)

Bepaal de vergelijking van de resulterende parabool.
Controleer met een grafiek.

1.3 Veeltermvorm van de algemene tweedegraadsfunctie

De veeltermvorm van de algemene tweedgraadsfunctie is:

$x \mapsto y = ax^2 + bx + c$

Een tweedegraadsfunctie in de *topvorm*, bijvoorbeeld $x \mapsto y = 3(x+2)^2 + 5$, kan door uitwerken naar de *veeltermvorm* $x \mapsto y = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$ worden herleid.

Om de *algemene tweedegraadsfunctie* in de *veeltermvorm* $x \mapsto y = ax^2 + bx + c$ te onderzoeken, herleidt men deze eerst tot de *topvorm*.

De bepaling van de top komt in hoofdstuk 2 aan bod.

Opgave 1.9

De grafieken van de volgende functies ontstaan uit de parabool $y = x^2$ door verschuiving evenwijdig met de assen. Vul de tabel aan:

Top	Topvorm	Veeltermvorm
$S(2 \mid 3)$		
	$y = (x-3)^2 + 5$	
$S(-1 \mid 5)$		
	$y = (x+0.3)^2$	

Opgave 1.10

De grafieken van de volgende functies ontstaan uit de parabool $y = ax^2$ door verschuiving evenwijdig met de assen. Vul de tabel aan:

a	Top	Topvorm	Veeltermvorm	Functiewaarde
3	$S(2 \mid 3)$			$y(3) =$
	$S(4 \mid -3)$			$y(3) = 2$
-1	$S(2 \mid 1)$			$y(\ \ ) = 0$
		$y = 0.5(x+5)^2 - 2$		$y(3) =$
		$y = a(x+2)^2 - 6$		$y(-1) = -1$

Opgave 1.11

a) Bepaal zo goed als mogelijk een parabool door de punten $A(0 \mid -2), B(4 \mid 7), C(6 \mid 1)$.

Doe dit eerst grafisch (drag and move) en vervolgens algebraïsch (vergelijking van de parabool in de vorm $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$).
Tip: noteer eerst de x- en y-coördinaten van de punten in twee kolommen van een spreadsheet of elk in een lijst, teken de punten als een puntenwolk.

b) Kies de x-coördinaat van punt B variabel: $B(x_B \mid 7)$. Bepaal de vergelijking van de parabool door de 3 punten in functie van x_B. Voor welke waarden van x_B is er geen parabool? Waarom?

c) Wijzig x_B m.b.v. een schuifregelaar en observeer de opening van de parabool. Wat gebeurt er voor bijzondere waarden van x_B?

Opgave 1.12

Groepswerk: werk in groepen van twee en geef om beurt drie punten. De partner moet de parabool door de drie punten vinden.

Opgave 1.13

De grafiek van een tweedegraadsfunctie in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) heeft top $S(-2 \mid -4)$ en gaat door het punt $P(4 \mid 8)$

b) heeft nulpunten $x_1 = -3$ en $x_2 = -6$ en de y-waarde van de top is $y_S = 2$

c) heeft een top op de y-as en gaat door $A(2 \mid 1)$ en $B(-3 \mid -9)$

d) raakt de x-as in $P(2 \mid 0)$ en gaat door $A(5 \mid 2)$

e) heeft een top op de rechte $y = 0.5x + 1$ en gaat door de punten $P(4 \mid 2)$ en $Q(6 \mid -2)$.

Bepaal de functie en, indien nog niet gekend, de top.

Opgave 1.14

a) Kies lukraak 6 punten. Bepaal grafisch een parabool die zo goed als mogelijk door de punten gaat.
Tip: de x- en y-coördinaten van de punten in een tabel (spreadsheet) of elk in een lijst opslaan.

b) Met "kwadratische regressie" kan men de „beste“ parabool „door“ de gegeven punten bepalen. Vergelijk de zo gevonden functie met die van opgave a).

Opgave 1.15

CO_2- gehalte en broeikaseffect.
Het broeikaseffect wordt al sedert jaren geobserveerd, de hoofdoorzaak is hierbij de toename van het CO_2- gehalte in de lucht.
De meetwaarden in parts per million (ppm) zijn:

Jaar	1960	1964	1968	1972	1976	1980
CO_2- gehalte in ppm	316	319	322	327	331	337

Wetenschappers voorspellen dat er een klimaatcatastrofe zal zijn als het CO_2- gehalte van 1960 zal verdubbeld zijn.

a) Bereken dit tijdstip met een eerstegraadsmodel (beste rechte door de punten, "lineaire regressie").

b) Welk tijdstip wordt dit met een tweedegraadsmodel ("kwadratische regressie")?

c) Vind een exponentieel model voor de data. Bepaal het tijdstip met dit model ("exponentiële regressie").

d) Vergelijk de modellen met vroegere en latere waarden: bv.
1750: 280 ppm
1990: 352 ppm

Interpreteer de modellen voor extrapolatie naar toekomstige waarden.

1.4 Eenvoudige transformaties bij andere functies

Opgave 1.16

Voer de transformaties van opgave 1.8 uit voor de krommen met vergelijkingen $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ und $y = x^3$.

Opgave 1.17

Analoge transformaties voor andere functies. Teken de krommen ter controle.

a) Teken de functie $x \mapsto y = x^3 - 4x^2 + 5$.

b) Verschuif de kromme 3 eenheden naar boven en geef de vergelijking.

c) Verschuif de kromme 4 eenheden naar rechts en geef de vergelijking.
Tip: bij de parabool moest men x door $x - 4$ vervangen.

d) Rek de kromme in de richting van de y-as uit met factor –2 en geef de vergelijking.

e) Voer alle transformaties achter elkaar uit in de volgorde b), c) d) en geef de vergelijking van de resulterende kromme.

Opgave 1.18

Opmerking: als een willekeurige functie $x \mapsto y = f(x)$ eerst met een factor a in de y-richting wordt uitgerekt, vervolgens u eenheden in de richting van de x-as wordt verschoven en tenslotte v eenheden in de richting van de y-as wordt verschoven, dan wordt de nieuwe vergelijking $y = a \cdot f(x - u) + v$ (met CAS $f1(x) := f(x)$, $f2(x) := a \cdot f1(x - u) + v$).

Wijzig de functie $f(x)$ en observeer de wijziging van $f2(x)$.

Voorbeeld:

$$f1(x) := x^3 - 4x^2 + \sqrt{x}$$

$$f2(x) := -2 \cdot f1(x + 5) - 3$$

Samenvatting van de belangrijkste transformatieregels

Gegeven een functie f door de vergelijking $y = f(x)$. De volgende transformaties zijn belangrijk (de getransformeerde functies worden met $g1, g2, \ldots$ genoteerd):

Transformatie	Nieuwe functievergelijking
1) Uitrekking in de y-richting met factor a Speciaal geval $a = -1$: spiegeling t.o.v. de x-as	$g1(x) = a \cdot f(x)$
2) Verschuiving in de y-richting over v eenheden	$g2(x) = f(x) + v$
3) Verschuiving in de x-richting over u eenheden	$g3(x) = f(x - u)$
4) Spiegeling t.o.v. de y-as	$g4(x) = f(-x)$

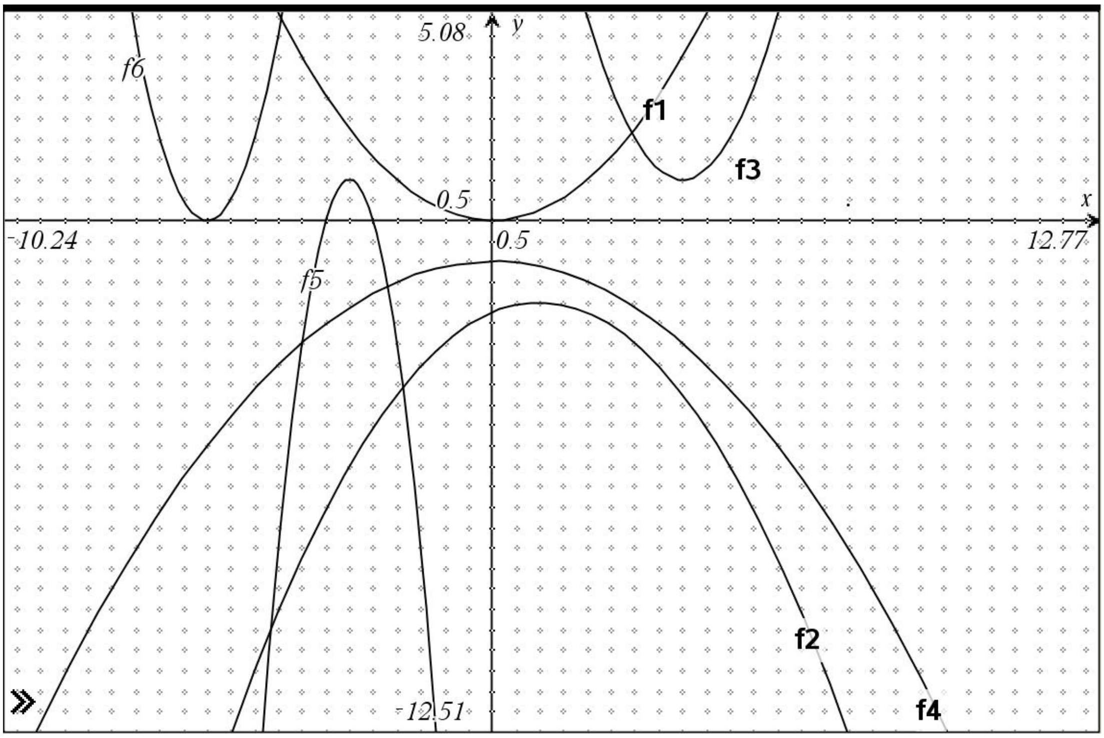
Zie ook paragraaf 3.2

Opgave 1.19

De grafiek van de functie $x \mapsto y = x^3$ wordt in de x-richting verschoven over 2 eenheden , vervolgens in de y-richting over 3 eenheden en tenslotte gespiegeld t.o.v. de x-as. Bepaal de vergelijkingen van de resulterende kromme.

Opgave 1.20

Bepaal de vergelijkingen van de 6 parabolen f1, f2,…,f6.

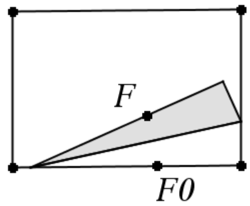


1.5 Brandpunteigenschappen

Parabolen hebben een *brandpunt*. Dit punt speelt een belangrijke rol in veel toepassingen. In de volgende opgaven worden belangrijke eigenschappen van het brandpunt verkend.

Opgave 1.21

Neem een liggend A4-blad en teken een punt *F* enkele cm van de onderste rand, ongeveer halverwege de rechter - en linker rand. Plooi het papier op verschillende wijzen, zodanig dat de onderste rand telkens door het punt *F* gaat. Herhaal dergelijke plooiingen tot er een kromme verschijnt. Construeer de familie van rechten (als spoor van de plooirechten). Gebruik hierbij het spiegelpunt F0 van F t.o.v. de plooirechte als variabel punt.



Opgave 1.22

Gegeven het punt $F(0 \mid 2)$.

a) Bepaal het punt $P(3 \mid y)$, met dezelfde afstand tot de x-as als tot het punt F. Aanwijzing voor de constructie: aangezien het punt P de gekende x-coördinaat 3 heeft, ligt P op een evenwijdige met de y-as door $P_0(3 \mid 0)$. De afstand van P tot de x-as is gelijk aan de afstand van P tot P_0. Bijgevolg zoeken we het punt op de evenwijdige met de y-as door P_0, met dezelfde afstand tot F als tot P_0. Waar liggen nu alle punten met dezelfde afstand tot F als tot P_0?

b) Kies nu een variabel punt P_0 op de x-as en teken de evenwijdige met de y-as door P_0. Construeer vervolgens het punt P op deze evenwijdige, met dezelfde afstand tot F als tot P_0 en bijgevolg ook tot de x-as.

c) Verschuif P_0 op de x-as en bepaal de meetkundige plaats van P.

d) Bepaal de vergelijking van de meetkundige plaats van P door proberen.

e) Vind de vergelijking uitgaande van de meetkundige voorwaarde.

Opmerking:
Het punt F uit de vorige opgave heet *brandpunt*, de x-as is de *richtlijn*.

Stelling
De verzameling van alle punten, gelegen op dezelfde afstand tot een vast punt F en een vaste rechte l, is een parabool. Men noemt F het *brandpunt* en l *de richtlijn*.

Opgave 1.23

Lichtstralen vallen evenwijdig met de y-as in op een paraboolspiegel, waarvan de doorsnede een parabool is met vergelijking $y = a \cdot x^2$ $(a > 0)$. Kies eerst $a = \frac{1}{4}$ en een lichtstraal.

a) Spiegel de lichtstraal t.o.v. de parabool (d.w.z. t.o.v. de normaal in het spiegelpunt R). Bepaal het snijpunt F van de gespiegelde straal met de y-as.

b) Wat gebeurt er met F als de lichtstraal of het punt R beweegt? Gebruik ook de spoorfunctie om enkele lichtstralen gelijktijdig te tonen. Wat gebeurt er met F als a wijzigt (gebruik een schuifregelaar)?

c) Meet de afstand $\left|OF\right|$. Koppel deze waarde aan de variabele f. Vind een verband tussen a en f.

d) Stel f en a voor in een tabel en bevestig hiermee de in c) gevonden veronderstelling. (In TI-Nspire™ kunnen de waarden van f en a, bij wijziging van a door de schuifregelaar, met het bevel „automatische gegevensvastlegging“ worden opgenomen in de tabel.)

e) Spiegel het punt F t.o.v. de oorsprong en noem het punt F'. Teken een rechte l evenwijdig met de x-as en door F'. Teken de loodlijn door R op l, noem het snijpunt L. Toon meetkundig en door berekening aan dat $\left|RF\right| = \left|RL\right|$ (richtlijneigenschap van de parabool).

f) Construeer de parabool uitgaande van een vrij gekozen richtlijn l en brandpunt F.

g) Uitbreiding van de opgave: Kies de y-as als richtlijn l en het punt $F\left(1 \mid 0\right)$ als brandpunt. Onderzoek de verzameling van alle punten R in het x-y-vlak, waarvoor de verhouding k van de afstanden tot het punt F en de rechte l constant ist. De vergelijking waaraan de coördinaten van R voldoen, kan worden opgelost naar y (twee oplossingen), zo kan de kromme worden getekend. Gebruik een schuifregelaar voor k. Beschrijf de krommen naarmate k wijzigt.

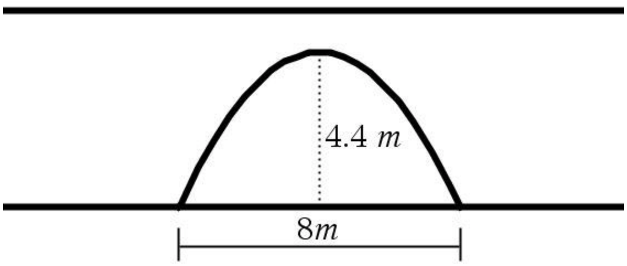
1.6 Gemengde opgaven

Opgave 1.24

In de bovenstaande brug (Kornhausbrug in Bern) liggen de aangeduide verticale verbindingen op een afstand van 10 m tot elkaar, de eerste is ook horizontaal 10 m van het hoogste punt van de brugboog verwijderd. Hoe lang zijn die verbindingen?

Opgave 1.25

Voor de afgebeelde treinbrug met een paraboolvormige brugboog ligt het hoogste punt van de boog 4.4 m boven de straat, de boog is op straathoogte 8 m breed. Een vrachtwagen met een rechthoekige doorsnede is 2.6 m breed en 4 m hoog.



a) Kan de vrachtwagen onder de brug door rijden?
b) Men gaat ervan uit dat een chauffeur niet precies in het midden onder de brug passeert, maar iets links of rechts daarvan afwijkt. Daarom werd de maximale hoogte voor een 2.6 m brede vrachtwagen aangegeven met 3.75 m. Wat is de maximale afwijking bij deze waarde?

Opgave 1.26

Het benzineverbruik van een wagen, gemeten in liter per 100 km, is bij benadering een tweedegraadsfunctie bij snelheden boven 50 km/h. Hierbij werden de volgende hoeveelheden benzine verbruikt voor een afstand van 100 km : bij 60 km/h 4.75 liter, bij 100 km/h 6.6 liter en bij 130 km/h 9.25 liter.

a) Bepaal de functie waarmee men het benzineverbruik in functie van de snelheid kan berekenen.

b) Bij welke snelheid is het verbruik 20% lager dan bij 130 km/h?

c) De tank bevat nog 3 liter, het volgende tankstation ligt op 40 km. Hoe snel mag men hoogstens rijden als men het tankstation nog wenst te bereiken.?

Opgave 1.27

Voor de remafstand y van een wagen geldt bij benadering de vuistformule

$y = 0.3x + 0.01x^2$.

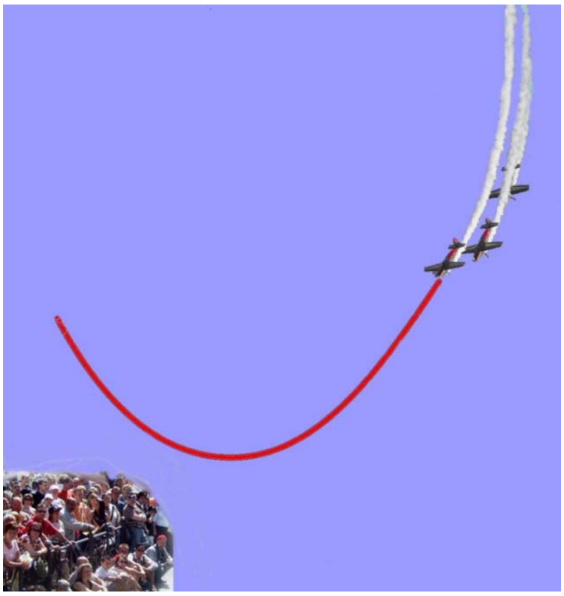
Hierbij is x de snelheid in km/h en y de remafstand in m.

a) Hoeveel neemt de remafstand toe, als de snelheid toeneemt van 30 km/h tot 50 km/h?

b) Een wagen rijdt aan 30 km/h, de bestuurder ziet plots een hindernis en kan de wagen nog juist voor de hindernis tot stilstand brengen. Met welke snelheid zou hij op de hindernis gebotst zijn, indien hij oorspronkelijk 50 km/h had gereden?

Opgave 1.28

Tijdens een airshow start een vliegtuigsquadron op 1000 m hoogte voor de duikvlucht. Op dat ogenblik is het squadron 1500 m van de toeschouwerstribune verwijderd (horizontale afstand). Het squadron mag niet lager vliegen dan 50 m (beschouw het squadron als een punt, bv. het voorste punt van het eerste vliegtuig).



a) Omwille van de veiligheid wordt het laagste punt op 200 m van de tribune vastgelegd. Hoe hoog vliegt het squadron boven de tribune? Bepaal de vergelijking van de vliegcurve.

b) Uit veiligheidsoverwegingen moet de vlieghoogte direct boven de tribune minstens 100 m zijn. Hoe ver van de tribune moet het squadron in dit geval het laagste punt bereiken? Vind de vergelijking(en) van de mogelijke vliegcurve(n).

c) Varieer de afstand van het laagste punt tot de tribune. Bepaal de vlieghoogte boven de tribune als functie van de afstand t van het laagste punt van de vliegcurve tot de tribune. Teken de kromme en beschrijf de betekenis ervan op verschillende plaatsen.

d) Varieer het startpunt $\left(s \mid 1000\right)$. Het laagste punt is weer $\left(200 \mid 50\right)$ en de hoogte boven de tribune is 100 m. Bepaal de vliegparabool.

e) Varieer ook de afstand van het laagste punt $\left(t \mid 50\right)$.

Vind een verband tussen s und t. Teken de krommen m.b.v. een schuifregelaar voor t.

2 Nulpunten, raaklijnen, top

2.1 Symmetrie, nulpunten

Een parabool is symmetrisch t.o.v. de rechte $x = u$ door de top $S = (u \mid v)$.

Als een functie symmetrisch is t.o.v. de y-as, dan geldt voor elke x : $f(x) = f(-x)$.
Zo'n functie wordt ook een *even functie* genoemd.

Opgave 2.1

a) Toon aan dat de parabool $f(x) = a \cdot x^2$, en alle functies van de vorm $f(x) = a \cdot x^n$ met even exponent n, even functies zijn (vandaar de naamgeving even functie). Definieer analoog het begrip oneven functie en vind de corresponderende eigenschap.

b) Formuleer de symmetrie-eigenschap voor een willekeurige functie die symmetrisch is t.o.v. de rechte $x = u$. Bewijs hiermee de symmetrie-eigenschap van de parabool $f(x) = a \cdot (x-u)^2 + v$.

c) Welke van de volgende functies zijn even, oneven, of geen van beide:

I) $f1(x) = \dfrac{1}{x^5}$ II) $f2(x) = 5 \cdot x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2}$

III) $f3(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$ IV) $f4(x) = \dfrac{x^5 - 2 \cdot x^3}{2x - 1}$

De symmetrie-eigenschap van de parabool kan worden gebruikt om de top te bepalen.

Opgave 2.2

a) Rechts staat de tabel van functiewaarden voor de parabolen $f1, f2, f3$ en $f4$. Bepaal de coördinaten van de top van de parabolen met deze tabel.

b) Bepaal de uitrekfactor a voor elke parabool.

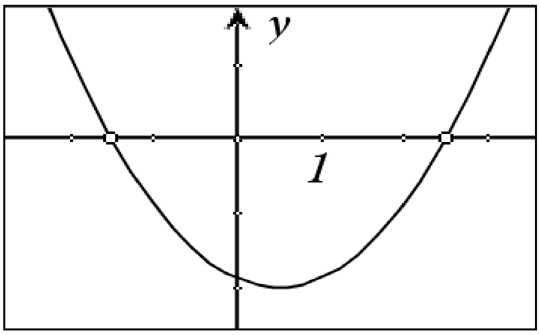
c) Teken de parabolen en de gegeven punten op de parabolen.

d) Bij welke parabolen kan men de top bepalen, uitgaande van de snijpunten met de x-as (eigenschap $f(x) = 0$)? Leg uit waarom dit niet lukt bij de andere parabolen.

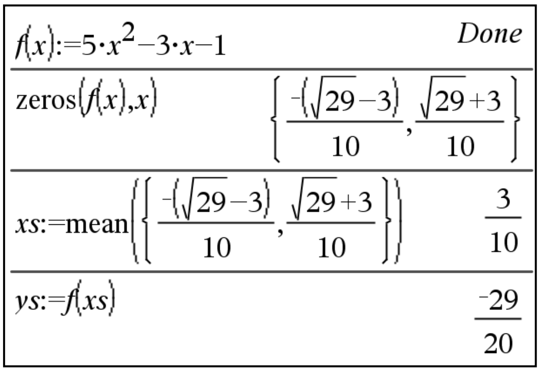
x	f1(x)	f2(x)	f3(x)	f4(x)
-3	6	4.125	3.25	33.125
-2.5	2.5	2.5	1.75	25.125
-2	0	1.125	1.25	18.125
-1.5	-1.5	0	1.75	12.125
-1	-2	-0.875	3.25	7.125
-0.5	-1.5	-1.5	5.75	3.125
0	0	-1.875	9.25	0.125
0.5	2.5	-2	13.75	-1.875
1	6	-1.875	19.25	-2.875
1.5	10.5	-1.5	25.75	-2.875
2	16	-0.875	33.25	-1.875
2.5	22.5	0	41.75	0.125
3	30	1.125	51.25	3.125

Definitie:

x_0 is een nulpunt van f als $f(x_0) = 0$.
Grafisch zijn de nulpunten de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.



CAS gebruikt het bevel *zeros* voor de berekening van de nulpunten van een functie (zie rechts).



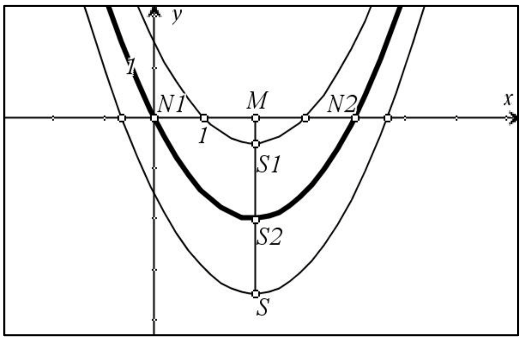
Als een parabool de nulpunten x_1 en x_2 heeft, dan is de x-coördinaat van de top omwille van symmetrie het rekenkundig gemiddelde van de nulpunten:

$x_S = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_S = f(x_S)$.

Het gemiddelde kan worden berekend met *mean*.

Opmerking:

De constante c *heeft geen invloed op de symmetrie van de parabool, daarom is de* x*-coördinaat van de top van* $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ *dezelfde als voor* $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$. *Deze vaststelling vereenvoudigt de manuele berekening van de top.*



De Franse wiskundige François Viete 1540 – 1603 (Latijnse naam Vieta) vond het volgende verband:

Als de tweedegraadsfunctie $f(x) = x^2 + b \cdot x + c$ twee nulpunten x_1 en x_2 heeft, dan geldt $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ (ontbinding in eerstegraadsfactoren) en het volgende verband is geldig:

$c = x_1 \cdot x_2$ en $b = -(x_1 + x_2)$.

François Viete

Opgave 2.3

a) Bewijs de stelling van Vieta.

b) Veralgemeen de stelling voor een veelterm van graad 3 met 3 nulpunten (3 eerstegraadsfactoren).

Opgave 2.4

Bepaal de top van de volgende parabolen, zowel manueel als met het rekentoestel:

a) $f1(x) = x^2 - 4x$ b) $f2(x) = x^2 - 6x + 9$

c) $f3(x) = x^2 + 9x + 20$ d) $f4(x) = x^2 - 29x + 210$

e) $f5(x) = a \cdot x^2 - b \cdot x$ f) $f6(x) = x^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x - 3$

g) $f7(x) = a \cdot x^2 - a^2 \cdot b \cdot x - a \cdot b \cdot x + a^2 \cdot b^2$

Opgave 2.5

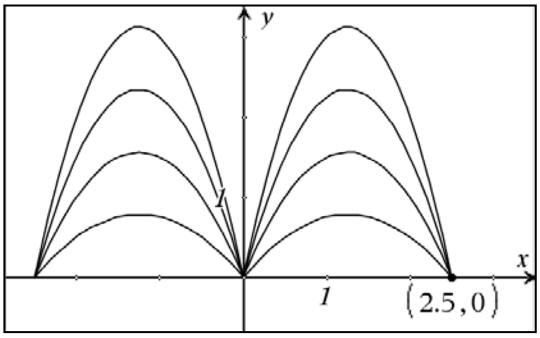
Een steen, die bij $x = 0$ wordt weggeworpen, beschrijft de parabool $f(x) = -0.04x^2 + 2.48x + 1.56$

a) Op welke hoogte wordt de steen weggeworpen?

b) Waar valt de steen op de grond?

c) In welk punt bereikt de steen de maximale hoogte?

Opgave 2.6



Een fontein heeft een cirkelvormig bekken met een diameter van 6 m. De sproeierkop bevindt zich in het midden van het bekken (oorsprong van het assenstelsel). De straalsterkte en de hoek van de parabool-vormige straal kunnen worden geregeld. De straal moet zodanig worden gekozen , dat deze steeds 50 cm van de rand van het bekken op het water valt.

a) Vind een parabool met deze eigenschap (parabool van de doorsnede).

b) Vind alle parabolen met deze eigenschap (parameter $a > 0$). Teken de parabolen m.b.v. een schuifregelaar voor a .

c) Bepaal de hoogte van de parabool in functie van de parameter a .

d) Snij de parabool met een willekeurige rechte door de oorsprong. Wijzig die rechte met een schuifregelaar. Wat verkrijgt men in het grensgeval, als de twee punten samenvallen ? Voor welke x -coördinaat vallen beide punten samen?

e) Bepaal de vergelijking van de raaklijn in de oorsprong en de hoek die de straal maakt met de x-as in functie van a .
Tip: snij de parabool (beschouw a vast) met een willekeurige rechte door de oorsprong. Als de twee snijpunten samenvallen (voor $x = 0$) verkrijgt men de raaklijn aan de parabool in de oorsprong, de helling en bijgevolg ook de hoek α met de x-as waaronder de straal vertrekt.

f) Los a), b) en c) op als de straal 20 cm boven het water vertrekt.

2.2 Algemene oplossing van een vierkantsvergelijking

De nulpunten van de tweedegraadsfunctie $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ zijn de oplossingen van de vierkantsvergelijking $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Voorbeeld

Los de vergelijking $5 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1 = 0$ op met CAS en manueel.
De oplossing met CAS staat rechts.

$$\text{solve}(5\cdot x^2-3\cdot x-1=0,x)$$
$$x=\frac{-(\sqrt{29}-3)}{10} \text{ or } x=\frac{\sqrt{29}+3}{10}$$

Manueel gaat men als volgt te werk:

$5 \cdot x^2 - 3 \cdot x = 1$	constante naar het rechterlid
$x^2 - \frac{3}{5} \cdot x = \frac{1}{5}$	delen door de coëfficiënt van x^2
$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{1}{5} + \frac{9}{100} = \frac{29}{100}$	links het kwadraat vervolledigen, rechts aanpassen
$x - \frac{3}{10} = \pm\sqrt{\frac{29}{100}}$	wortel trekken (2 oplossingen!)
$x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$	twee oplossingen, symmetrisch t.o.v. $x_S = \frac{3}{10}$

Opgave 2.7

Los manueel op en controleer met het rekentoestel:

a) $x^2 - 5x - 84 = 0$ b) $x^2 - 2x - 5 = 0$ c) $x^2 - 14x + 49 = 0$

d) $5x^2 - 11x = 0$ e) $3x^2 - 5x + 11 = 0$ f) $x^2 - a^2x - a \cdot x + a^3 = 0$

Oplossing van de algemene vierkantsvergelijking $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad (a \neq 0)$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$$

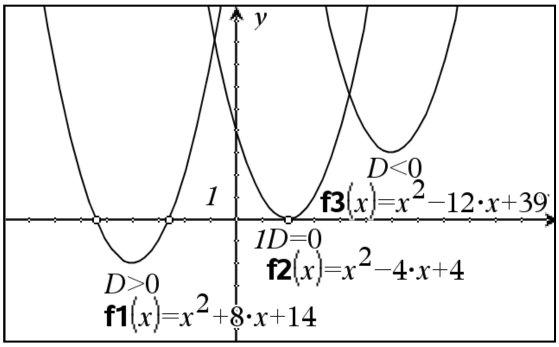
Dit was een formele oplossing van de vergelijking. Er zijn enkel oplossingen als de uitdrukking onder de wortel positief is, d.w.z. als de *discriminant* $D = b^2 - 4a \cdot c \geq 0$ is (Latijn: discriminare = onderscheiden).
Met de discrimant onderscheidt men het aantal oplossingen van een vierkantsvergelijking.

Stelling
Een vierkantsvergelijking
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \ (a \neq 0)$ heeft

I) Twee oplossingen
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$$
als $D = b^2 - 4a \cdot c > 0$

II) Eén oplossing (dubbeloplossing)
$$x = \frac{-b}{2a} \text{ als } D = b^2 - 4a \cdot c = 0$$

III) Geen oplossing als
$D = b^2 - 4a \cdot c < 0$



Opgave 2.8

Los manueel en met de formule op, controleer met de rekenmachine

a) $3x^2 + 8x + 5 = 0$ b) $x^2 - 6x + 4 = 0$ c) $5x^2 + 8x + 5 = 0$

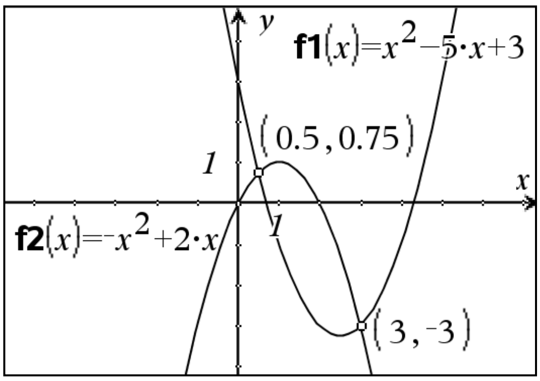
Opgave 2.9

Los op met CAS en ga na, voor welke waarde van de parameter c de vergelijking
I) Eén oplossing (geef de oplossing) II) geen oplossing III) meerdere oplossingen heeft:

a) $x^2 - 4x - c = 0$ b) $x^2 - 4x - c^2 = 0$
c) $x^2 - 4x + c^2 = 0$ d) $x^2 - 4c \cdot x + c^2 = 0$
e) $x^2 - 4c \cdot x + c = 0$ f) $c \cdot x^2 - c \cdot x + c = 0$
g) $c \cdot x^2 - (c + 2) \cdot x - 4 = 0$ h) $x^2 - c^2 \cdot x + c = 0$
i) $x^3 - 5x^2 - c \cdot x + 4x + c = 0$ k) $x^4 - 4x^2 + c = 0$
l) $x^2 - c \cdot x + c^2 = 0$ (onverwacht resultaat)
m) Werk per twee en stel zelf vierkantsvergelijkingen met parameters op, los ze samen op.

De snijpunten van twee grafieken worden onmiddellijk door CAS met *solve* berekend.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y=x^2-5\cdot x+3 \\ y=-x^2+2\cdot x \end{cases}, x, y\right)$$
$$x=\frac{1}{2} \text{ and } y=\frac{3}{4} \text{ or } x=3 \text{ and } y=-3$$



Opgave 2.10

Bepaal de snijpunten van de volgende krommen en maak een grafiek:

a) $y = x^2 + 4x + 10$ en $y = -2x + 1$

b) $y = -2x^2 + 8x + 3$ en $y = 3x - 2$

c) Wijzig in b) de tweede vergelijking in $y = 3x - c$. Voor welke waarde van c heeft het stelsel één, twee of geen oplossing? Wat is de meetkundige betekenis bij één oplossing?

$y = x^2 - 5x + 3$ en $y = -x^2 + 2x + c$ voor $c = -4$.
Voor welke waarde van c is er één, twee of geen snijpunt? Wat is de meetkundige betekenis bij één oplossing?

Opgave 2.11

Een bal wordt weggeworpen en vliegt volgens de curve $h(x) = -0.01x^2 + 0.8x + 2$.

a) Op welke hoogte werd de bal weggeworpen?

b) Bepaal bij een vlak terrein hoe ver en hoe hoog de bal maximaal vliegt.

c) Bereken hoe ver de bal vliegt (gemeten langs het terrein), als het terrein in vliegrichting gelijkmatig 10% stijgt.

Opgave 2.12

Een rechte met vergelijking $y = m \cdot x + q$ snijdt de y-as in het punt $S\left(0 \mid q\right)$ en de standaardparabool $y = x^2$ in de punten $P_1\left(x_1 \mid y_1\right)$ en $P_2\left(x_2 \mid y_2\right)$. Toon aan dat $x_1 \cdot x_2 = -q$.

a) Ga na dat de eigenschap geldt voor de speciale gevallen $y = q$ en $y = m \cdot x$.

b) Ga de eigenschap na voor $y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$ en $y = 4 \cdot x - 3$.

c) Onderzoek het speciale geval $y = 2 \cdot x - 1$.

d) Bewijs de eigenschap algemeen voor $y = m \cdot x + q$.

e) Stel de situatie grafisch voor, m.b.v. schuifregelaars voor m en q.

Opgave 2.13

Een ondernemer vervaardigt twee artikels A en B. Observaties van de afnamehoeveelheden y_A, resp. y_B in functie van de tijd x (in dagen) leverden de functies:

Voor artikel A: $y_A = 2x + 9$

Voor artikel B: $y_B = -x^2 + 8x + 4$

a) Na hoeveel dagen zijn beide afnamehoeveelheden gelijk?

b) Na hoeveel dagen bereikt y_B een maximum?

Opgave 2.14

De aanbodsprijs pA en vraagprijs pN voor een product in functie van de hoeveelheid x per dag worden gegeven door

$\mathrm{pA(x)} = 2\mathrm{x} + 3$

$\mathrm{pN(x)} = -\mathrm{x}^2 - 6\mathrm{x} + 13443$

a) Bepaal het economisch zinvolle domein en bereik van pA en pN.

b) Bepaal de evenwichtsprijs en de evenwichtshoeveelheid (waarbij de aanbodsprijs en vraagprijs gelijk zijn), alsmede de omzet in het evenwichtspunt.

Opgave 2.15

Schrijf een programma dat, bij opgave van $\mathrm{a} \neq 0, \mathrm{b}, \mathrm{c}$, de oplossingen berekent van de vergelijking $\mathrm{a} \cdot \mathrm{x}^2 + \mathrm{b} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{c} = 0$ of de commentaar „geen oplossing“ levert.

2.3 VKV-formule en top

De vervollediging van het kwadraat (zie paragraaf 2.2) levert ook een methode om een tweedegraadsfunctie in veeltermvorm manueel te herleiden tot de topvorm.

Voorbeeld

$\mathrm{f(x)} = 5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 1$

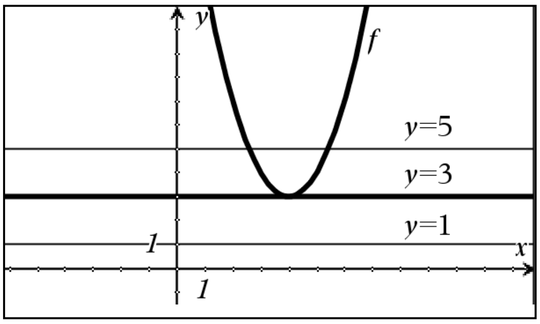
$$\frac{\mathrm{f(x)}}{5} = \mathrm{x}^2 - \frac{3}{5}\mathrm{x} + \frac{1}{5} = \left(\mathrm{x} - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{5} - \frac{9}{100} = \left(\mathrm{x} - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{100}$$

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right) = 5 \cdot \left(\mathrm{x} - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{20}$$

Top: $\mathrm{S}\left(\frac{3}{10} \mid \frac{11}{20}\right)$

Met het rekentoestel kan de top eenvoudiger worden bepaald door de nulpunten te berekenen: het gemiddelde van de nulpunten is de x-coördinaat van de top. Deze methode werkt enkel als de parabool nulpunten heeft. Door echter de constante term te laten vallen in het functievoorschrift, verkrijgt men steeds de x-coördinaat van de top (zie paragraaf 2.1).
In wat volgt zullen we een algemene CAS-geschikte methode ontwikkelen om de top te bepalen, die ook toepasbaar is voor veel andere problemen.

De nulpunten van de parabool zijn ook de snijpunten van de parabool met de rechte $y = 0$. Zo kan men de parabool ook met de rechte $y = 5$ of algemeen $y = v$ snijden, waarbij v zo kan worden gekozen, dat de rechte de parabool raakt. Het raakpunt is de top.



Dit levert een eenvoudige methode om de top van de parabool te bepalen (zie het scherm rechts):

$g1{:=}y=5\cdot x^2-3\cdot x-1$	$y=5\cdot x^2-3\cdot x-1$
$g2{:=}y=v$	$y=v$
solve$(g1$ and $g2,x,y)$	
$x=\dfrac{\sqrt{20\cdot v+29}+3}{10}$ and $y=v$ or $x=\dfrac{-(\sqrt{20\cdot v+29}-3)}{10}$ and $y=v$	
solve$(g1$ and $g2,x,y)\vert v=\dfrac{-29}{20}$	$x=\dfrac{3}{10}$ and $y=\dfrac{-29}{20}$

a) Definieer de vergelijkingen
   $g1 := y = 5x^2 - 3x - 1$
   $g2 := y = v$
b) Bepaal de oplossingen van het stelsel $g1, g2$.
c) Bepaal de parameter v voor de dubbeloplossing.
d) Substitueer de parameterwaarde in de vergelijking. Dit levert de coördinaten van de top.

Opgave 2.16

Bepaal de top manueel (topvorm!) en met CAS:

a) $y = x^2 - 5x$ b) $y = x^2 - 6x + 11$ c) $y = x^2 + 2x - 3$

d) $y = -3x^2 + 12x$ e) $y = -3x^2 - 2x - \dfrac{1}{3}$ f) $x^2 - 2(x + y) = 0$

g) Genereer met $y = \mathrm{Randpoly}(x, 2)$ een lukrake tweedegraadsfunctie en bepaal de top.

Opgave 2.17

Bepaal de maximale en minimale waarde van de functie

a) $f(x) = x^2 - 8x + 17$ voor $x \in D$ b) $f(x) = x^2 - 8x + c$ voor $x \in D$

met als domein I) $D = [2\,;6]$ II) $D = [1\,;3]$

Opgave 2.18

a) Bepaal de top van de parabool $y = 2x^2 + 5x + 3$
b) Vervang 3 door c. Op welke kromme beweegt de top?
c) Zelfde vraag met b i.p.v. 5
d) Zelfde vraag met a i.p.v. 2
e) Teken de topkromme voor b) tot d) en ga na dat de toppen van de familie van parabolen op deze kromme liggen (gebruik een schuifregelaar).

Opgave 2.19

Een valschermspringer wil op een weide landen. Hij bevindt zich op een hoogte van $200\ \mathrm{m}$ en daalt met een snelheid van $5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Op dat ogenblik schieten er kinderen op de weide een projectiel verticaal af (snelheid $\mathrm{v} = 60\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$).

Formule voor de verticale worp: $\mathrm{h(t)} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{t} - \frac{\mathrm{g}}{2}\mathrm{t}^2,\ \mathrm{g} = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

a) Welke maximale hoogte bereikt het projectiel en wanneer landt het terug op de bodem?

b) Kan het projectiel de valschermspringer treffen?

c) Vanaf welke snelheid van het projectiel wordt de valschermspringer getroffen?

Opgave 2.20

Mike Powel heeft op het WK in Tokio met zijn sprong van 8.95 m het legendarische wereldrecord 8.90 m van Bob Beamon na 23 jaar gebroken. De zwaartepuntscurve van het lichaam wordt goed beschreven door $\mathrm{y} = -0.056 \cdot \mathrm{x}^2 + 0.38 \cdot \mathrm{x} + 1.13$ (de balk bevindt zich bij $\mathrm{x} = 0$).

a) Waar ligt het hoogste punt van de kromme?

b) Wanneer was het zwaartepunt terug op dezelfde hoogte als bij het afspringen?

c) Waar zou het zwaartepunt de bodem bereiken? (Vergelijk ook met de gesprongen afstand).

d) Hoe ver zou een verspringer springen, die 30 cm groter (kleiner) is en daardoor een zwaartepunt heeft dat 15 cm hoger (lager) is, als de sprongeigenschappen overigens identiek zijn (beschouw het bodemtrefpunt van het zwaartepunt)?

e) Bepaal voor jouw hoog- of versprong je persooonlijke parabool m.b.v. enkele meetpunten van de kromme. Analyseer hoe de sprong kan worden verbeterd, in vergelijking met de sprong van Powel.

Opgave 2.21

Een Baseballspeler slaagt een bal weg op een hoogte van 1 m. Hij wil de bal boven de 4 m hoge omheining van het speelveld slaan, gelegen op 110 m van de afslag (paraboolvormige baan, er wordt geen rekening gehouden met de luchtweerstand).

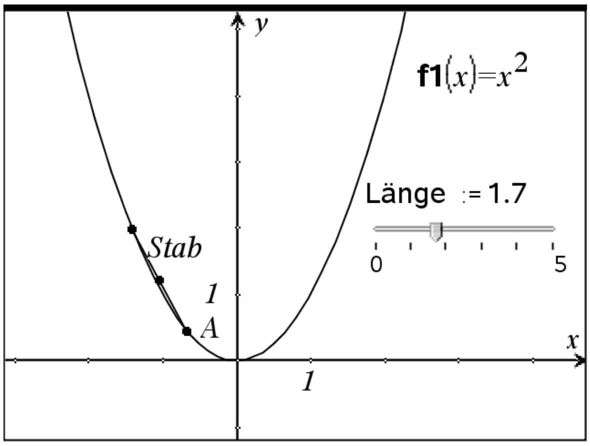
a) De bal bereikt een maximale hoogte van 30 m op 62 m van de afslag. Zal zijn plan lukken?

b) Het hoogste punt wordt horizontaal verschoven (max. hoogte blijft 30m). Over welk bereik mag het hoogste punt bewegen, opdat de bal boven de omheining zou vliegen?

c) Het hoogste punt wordt zo gekozen dat de bovenkant van de omheining juist wordt getroffen. Bepaal de kromme waarop het hoogste punt beweegt. Maak een grafiek van de functie en onderzoek welke punten van de kromme aan de voorwaarden voldoen.

Opgave 2.22, een CAS-Project

Gegeven een kom in de vorm van een omwentelingsparaboloïde, de schaal ontstaat door de parabool met vergelijking $y = x^2$ te roteren rond de y-as. In deze kom legt men een homogene staaf met lengte l.
In welke posities bevindt de staaf zich in een stabiel evenwicht?
Tip: het volstaat om de doorsnede te beschouwen die de y-as bevat.



Een stabiel evenwicht wordt bereikt als het zwaartepunt, d.i. het middelpunt van de staaf, zo laag mogelijk ligt. Onderzoek de ligging van het middelpunt van de staaf, door de positie van de staaf te veranderen.

a) Neem de staaf in het startpunt A en beweeg hem langs de schaal. Observeer de kromme waarop het middelpunt M beweegt.
Tip: teken het spoor van het punt M. Bepaal de positie van de staaf waarbij de ligging van het middelpunt zo laag mogelijk is.

b) Wijzig de lengte van de staaf m.b.v. een schuifregelaar. Noteer je bevindingen. Bij welke staaflengte ligt de laagste positie van M op de y-as?

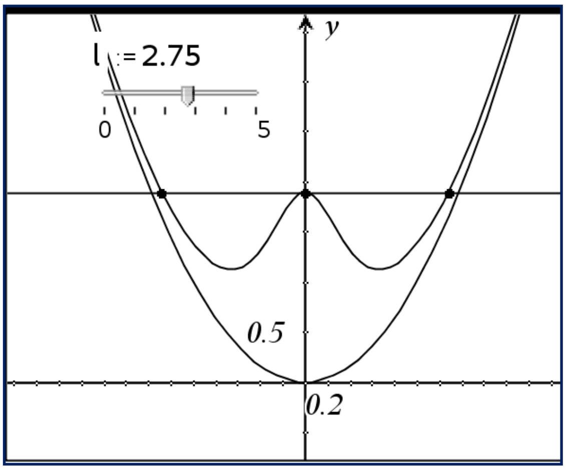
c) Nu wensen we de kromme waarop het punt M beweegt te berekenen. Eerst kiezen we de staaflengte $l = 2$.
Werkwijze:

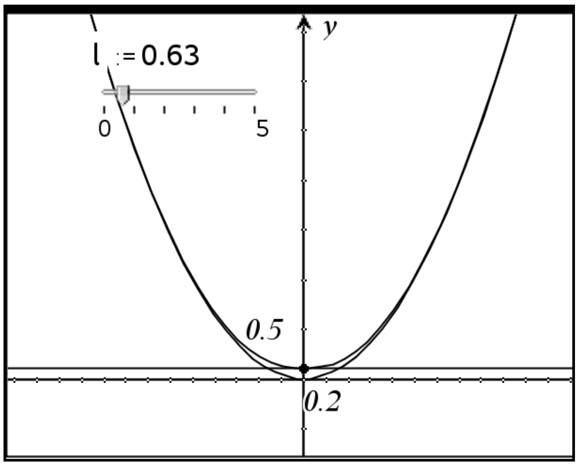
- Snij de parabool met een willekeurige rechte met vergelijking $y = mx + b$ en bepaal de coördinaten van de snijpunten, deze bevatten de parameters m en b.
- Stel de afstand tussen de twee snijpunten gelijk aan 2 (staaflengte) en los de vergelijking op naar b.
- Substitueer de gevonden uitdrukking voor b in de vergelijking van de rechte, deze bevat dan enkel nog de parameter m en beschrijft zo alle rechten die uit de parabool een koorde met lengte $l = 2$ snijden.
- Bepaal de x-coördinaat van het middelpunt in functie van m en substitueer deze in de vergelijking van de rechte. Zo verkrijgt men ook de y-coördinaat van het middelpunt in functie van m, en dus de coördinaten van het middelpunt in functie van m, d.w.z. voor elke waarde van m is er juist één punt (de zogenaamde parametervoorstelling).

- Los de vergelijking van de x-coördinaat van het middelpunt op naar m en substitueer het resultaat in de vergelijking voor de y-coördinaat, dit levert de vergelijking van de gezochte kromme in de vorm $y = y(x)$. Maak een grafiek!
- Snij de verkregen kromme met de horizontale rechte $y = c$. Bepaal de snijpunten algebraïsch. Uit de oplossingen kan men nagaan voor welke waarde van c de kromme een minimale y-waarde heeft (twee dubbeloplossingen).

d) Wijzig nu de staaflengte, d.w.z. vervang het getal 2 in de voorgaande oplossing door het getal l (staaflengte). Dit levert de middelpuntskromme in functie van de staaflengte.

e) Voor welke staaflengte ligt de laagste positie van het middelpunt op de y-as?
Tip: snij de kromme met een horizontale rechte, die door het snijpunt van de kromme met de y-as loopt. Wijzig vervolgens de staaflengte. Men kan algebraïsch exact nagaan wanneer de drie snijpunten samenvallen.





f) Uitbreiding van de opgave: vanaf een bepaalde staaflengte kan men de staaf niet meer continu langs de schaal bewegen; er zijn plaatsen waarbij een kleine verandering van de ligging van het punt A een plotse wijziging van de positie van de staaf veroorzaakt. Onderzoek deze situatie meetkundig. Vanaf welke staaflengte treedt dit op? Waar ligt dan het punt A? Hoe kan je dit verklaren? Opmerking: voor een exacte oplossing is analyse nodig.

Opgave 2.23

Een fabrikant verkoopt stereokoptelefoons voor 20 € en heeft 1000 exemplaren per week verkocht voor deze prijs. Hij schat dat hij bij elke prijsverlaging van 1 € telkens 100 exemplaren meer kan verkopen. Voor welke prijs kan hij zo een maximale opbrengst verwezenlijken?

Opgave 2.24

Voor een lifestyle-product van korte duur verloopt de afzet volgens een tweedegraadsfunctie $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, in functie van de dag x na het invoeren op de markt. De volgende afzet werd vastgesteld:
Dag 1: 500 exemplaren dag 5: 1500 exemplaren dag 10: 2500exemplaren

a) Bepaal de afzetfunctie.

b) Wanneer bereikt de afzet een maximum? Wat is deze maximale waarde?

c) Wanneer is de markt verzadigd (afzet 0)?

Opgave 2.25

Het aantal verkochte artikels hangt af van de prijs van het artikel. De volgende tabel geeft voor een bepaald artikel het aantal verkochte exemplaren per maand voor verschillende prijzen:

Prijs	10	20	25	30	50
aantal	710	670	650	630	550

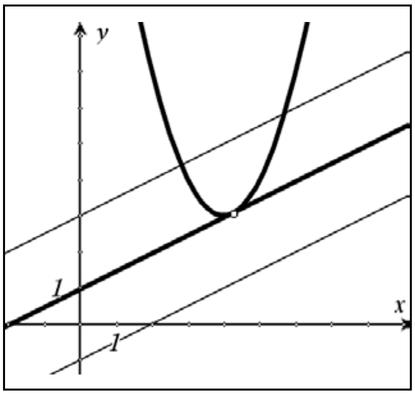
a) Beschrijf het verband met het aantal verkochte exemplaren als functie van de prijs en omgekeerd de prijs als functie van het aantal verkochte exemplaren.

b) Beschrijf de omzet door een functie. Voor welke prijs wordt de omzet maximaal?

c) De productiekost per exemplaar is € 4.50. De vaste kost is € 8000, onafhankelijk van het geproduceerde aantal. Bereken de maximale winst.

2.4 Raakproblemen

De CAS-geschikte methode ter bepaling van de top is de horizontale raaklijn vinden. Analoog kan men ook de raaklijn berekenen aan een parabool die evenwijdig is met een willekeurige rechte (tevens van toepassing voor andere raakproblemen). De raaklijn is de rechte die maar één snijpunt heeft met de parabool, dus de dubbeloplossing in de tweedegraadsvergelijking (zie volgende opgave).



Opgave 2.26

Gegeven: $y = x^2 - 3x + 3$ en de familie van rechten $y = x + c$.

a) Teken de parabool en de rechten voor enkele waarden van c. Hoeveel snijpunten zijn er mogelijk met de parabool?

b) Verschuif de rechte $y = x$ (vastnemen ter hoogte van het snijpunt met de y-as) en observeer het aantal oplossingen in functie van de y-assnede c. Verschuif de rechte ook m.b.v. een schuifregelaar voor c .

c) Bepaal de parameterwaarde c voor de rechte $y = x + c$ die de parabool raakt d.i. de raaklijn). Teken de raaklijn.

Opgave 2.27

a) Teken de parabool $y = x^2 - 6x + 11$ en de rechte $y = a \cdot x - 1$ voor $a = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

b) Draai de rechte $y = x - 1$ rond de y-assnede (de rechte vastnemen bij een punt verschillend van dit snijpunt) en observeer het aantal oplossingen in functie van de helling a. Wijzig a ook m.b.v. een schuifregelaar.

c) Bereken de parameter a waarvoor de rechte $y = a \cdot x - 1$ een raaklijn is. Bepaal ook het raakpunt.

d) Introduceer een nieuwe parameter b in de vergelijking van de rechte: $y = a \cdot x + b$. Bepaal een voorwaarde voor a en b opdat de rechte de parabool raakt. Vervang b met deze voorwaarde door a in de vergelijking van de rechte. Verschuif de rechte m.b.v. een schuifregelaar voor a. Interpreteer het resultaat.

Opgave 2.28

Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y = 2x^2 - 5x - 11$

a) door de oorsprong van het assenstelsel.

b) door $\left(0 \mid -15\right)$.

c) voor welke punten op de y-as zijn er raaklijnen mogelijk?

d) bepaal de raaklijnen in de nulpunten.

Opgave 2.29

a) Bepaal de raaklijn in het punt $T\left(2 \mid ?\right)$ van de parabool $y = x^2$.

b) Bepaal de raaklijn in het punt $T\left(k \mid ?\right)$ van de parabool $y = x^2$.

c) Bepaal de raaklijn in het punt $T\left(2 \mid ?\right)$ van de kromme $y = \dfrac{1}{x}$.

d) Bepaal de raaklijn in het punt $T\left(k \mid ?\right)$ van de kromme $y = \dfrac{1}{x}$.

Opgave 2.30

a) Bepaal de snijpunten van de parabolen $y_1(x) = 4 - x^2$ en $y_2(x) = (x-1)^2$.

b) Veralgemeen de tweede functie tot $y_3(x) = (x-a)^2$. Voor welke parameter a raken de krommen y_1 en y_3 elkaar?

c) Veralgemeen bovendien de eerste kromme tot $y_4(x) = b - x^2$. Wat is de voorwaarde voor a en b, opdat de beide parabolen y_3 en y_4 elkaar raken? Vervang b in y_4 m.b.v. deze voorwaarde door a. Verschuif beide parabolen m.b.v. een schuifregelaar voor a. Vaststelling?

d) Op welke kromme bewegen zich de mogelijke raakpunten van de parabolen in c)?

Opgave 2.31

Gegeven: $y_1(x) = 4 - x^2$ en $y_2(x) = \left|x - 3\right| - 2$

a) Bepaal de snijpunten van beide krommen grafisch en algebraïsch.

b) Veralgemeen de eerste kromme tot $y_3(x) = a - x^2$. Snij de krommen y_2 en y_3 en interpreteer het resultaat.

Opgave 2.32

a) Een motorrijder rijdt van links naar rechts en schuift uit in een paraboolvormige haarspeldbocht met vergelijking $y = \frac{1}{5}x^2 + 50$.
Wat is het kritieke punt voor een val, als er in $(5 \mid 0)$ een paal staat? Teken eerst de situatie en bereken vervolgens het kritieke punt.

b) De curve wordt genomen met 180 km/h. Het zandperk remt de chauffeur af met 18 km/h per 10 m. Om zich niet zwaar te kwetsen moet hij met minder dan 30 km/h op de beklede paal botsen. Moet men de veiligheid verbeteren?

c) De paal wordt (op de x-as) verplaatst. In welk bereik mag de paal worden geplaatst, zodat de motorrijders zich niet kunnen kwetsen?

Opgave 2.33

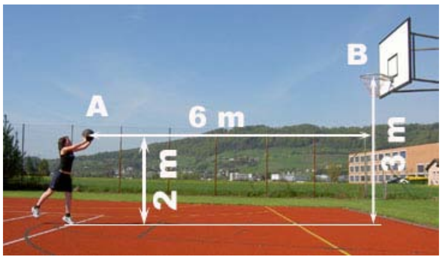
Een gevechtsvliegtuig benadert zijn doel Z in $(0 \mid 0)$ via een parabolische baan. Het straalvliegtuig bevindt zich in $(-300 \mid 800)$ en mag niet lager vliegen dan $200\ \mathrm{m}$. Het vliegtuig bereikt dit punt bij $x = 200$.

a) In welk punt moet het projectiel worden afgevuurd, om het doel te treffen (rechtlijnige projectielbaan veronderstellen). Los de opgave grafisch en algebraïsch op.

b) Het straalvliegtuig van opgave a) wil het schot op $250\ \mathrm{m}$ hoogte afvuren. Startpunt en minimale vlieghoogte zoals in a). Bepaal de vliegparabool en het lanceerpunt.

Opgave 2.34

Een basketbalspeelster werpt een bal weg vanuit punt A op $2\ \mathrm{m}$ hoogte van de bodem. De bal (beschouw zijn middelpunt) bereikt het midden van korf B, die $6\ \mathrm{m}$ verwijderd is en zich bevindt op $3\ \mathrm{m}$ hoogte.



a) Kies een geschikt assenstelsel en geef de vergelijking van een mogelijke parabool, die door A en B gaat (worp voor een score). Teken deze parabool met de punten A en B. Bepaal de coördinaten van de top van deze parabool.

b) Bepaal een willekeurige rechte g door het punt A (gebruik de helling a als parameter). Snij g met de parabool uit opgave a). Experimenteer met verschillende parameterwaarden voor a. In welk geval (beschouw de x-coördinaten van de snijpunten) wordt de koorde (twee snijpunten) een raaklijn (één snijpunt)? Bereken ook de helling van de raaklijn in het afwerppunt en daaruit de helling van de afworp .

c) Bepaal alle mogelijke parabolen van A naar B, d.w.z. de banen van mogelijke treffers. Schrijf daartoe de parabool in topvorm $f(x) = a \cdot (x - u)^2 + v$. Gebruik de gegeven randvoorwaarden en druk $f(x)$ uit m.b.v. één parameter (kies de x-coördinaat u van de top als parameter). Teken de familie van krommen m.b.v. een schuifregelaar voor u. Beschrijf wat je ziet.

d) Op welke kromme liggen de mogelijke toppen? Teken de toppenkrome en controleer met de familie van krommen uit opgave c).

Opgave 2.35

Gegeven de kromme $y = (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 6)$.

a) Bepaal de nulpunten van de kromme.

b) Snij de kromme met de rechte $y = x + 2$ (gaat door het nulpunt $x = -2$).

c) Beschouw een willekeurige rechte door het nulpunt $x = -2$. Teken enkele van deze rechten en ga na hoeveel snijpunten er mogelijk zijn.

d) Bepaal die rechte die raakt aan de kromme en ga na dat de x-coördinaat van het raakpunt het gemiddelde is van de andere nulpunten.

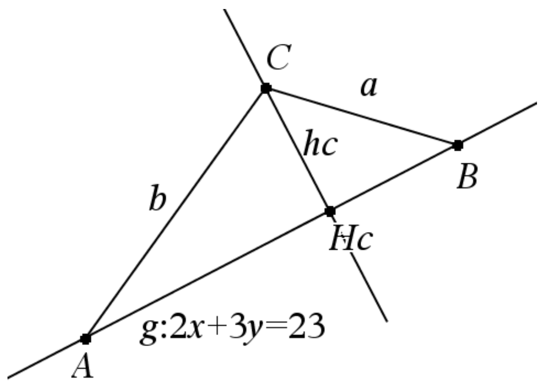
e) Geldt deze eigenschap algemeen voor een derdegraadskromme van de vorm $y = k \cdot (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c)$ met gegeven nulpunten a, b, c?

Opgave 2.36

Gegeven: de rechte $g : 2x + 3y = 23$ en een punt $C\left(2 \mid 6\right)$.

a) Bepaal een driehoek ABC met A en B op g en met zijden $a = 5$ en $b = 7$.

b) Bepaal de hoogte h_c en het voetpunt H_c van de hoogtelijn.



Opgave 2.37

Gegeven: $A(0 \mid 0), B(9 \mid 12)$ van een driehoek ABC en het middelpunt van de ingeschreven cirkel $I(2 \mid 11)$.

a) Bepaal de straal van de ingeschreven cirkel en het raakpunt met de zijde $\overline{AB}$.

b) Bepaal de raakpunten van de ingeschreven cirkel met beide andere zijden.

c) Bepaal het hoekpunt C van de driehoek.

Opgave 2.38

Een rechte met vergelijking $y = m \cdot x + q$ snijdt de y-as in het $S(0 \mid q)$ en de standaardparabool $y = x^2$ in de punten $P_1(x_1 \mid y_1)$ en $P_2(x_2 \mid y_2)$.

Toon aan dat $x_1 \cdot x_2 = -q$.

a) Toon de eigenschap aan voor de speciale gevallen $y = q$ en $y = m \cdot x$ (zonder rekenmachine).

b) Toon de eigenschap aan voor $y = \frac{1}{2}x + 3$ en $y = 4x - 3$.

c) Beschouw ook het speciale geval $y = 2x - 1$.

d) Bewijs de eigenschap algemeen voor de rechte $y = m \cdot x + q$.

e) Illustreer de situatie grafisch, m.b.v. schuifregelaars voor m en q.

f) De eigenschap heeft een gelijkenis met de stelling van Vieta. Vind het verband. Formuleer ook de tweede eigenschap $x_1 + x_2 = ?$

Loodrechte en schuine worp

Loodrechte worp: hoogte $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

Schuine worp: $x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$; $y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

Opgave 2.39

Een steen wordt op de rand van een 30 m hoge rots loodrecht naar omhoog geworpen met een snelheid van 14 m/s.

a) Bepaal de hoogte $h(t)$ in functie van de tijd t.

b) Wanneer bereikt de steen zijn maximale hoogte?

c) Wanneer bereikt de steen de bodem onder de rots?

Opgave 2.40

Een bal wordt horizontaal uit het venster van een flatgebouw geworpen met een snelheid van 60 km/h. Na 3.5 s valt hij op de bodem.

a) Hoe hoog boven de bodem werd de bal weggeworpen en hoe ver van het gebouw valt de bal op de bodem?

b) Zelde vraag, als men de bal na 3.5 s hoort vallen op de bodem en dit

I) beneden II) boven in het gebouw.

Opgave 2.41

Op een effen terrein slaagt een golfspeler de bal onder een hoek α met de horizontale weg, de bal vliegt 140 m ver (luchtweerstand verwaarlozen).

a) Hoe groot is de snelheid van de bal $|\vec{v}| = v$ bij $\alpha = 30^0$.

b) Teken de kromme van de golfbal voor verschillende lanceerhoeken, waarbij de startsnelheid v steeds dezelfde is als in a).

c) Teken de afstand x in functie van de lanceerhoek en vind de optimale lanceerhoek.

d) Hoeveel verder geraakt de bal bij de slag van a) als het terrein daalt met 15^0 (gemeten op het terrein)?

e) Toon aan dat de optimale lanceerhoek bij opgave d) (dalend terrein) gelijk is aan $(90^0 + 15^0) / 2$.

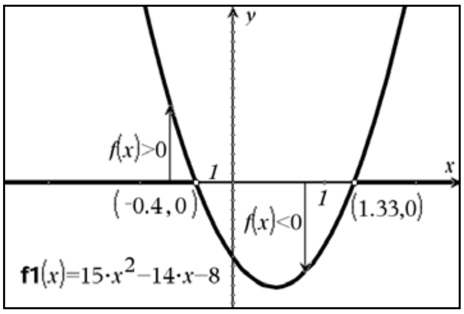
2.5 Ongelijkheden, stelsels van ongelijkheden

Ongelijkheden van de tweede graad a.x² +b.x+c ≥0 (analoog voor ≤ , <, >) hebben in het algemeen oneindig veel oplossingen, die kunnen worden beschreven met intervallen. De intervalgrenzen bepalen we m.b.v. de grensvergelijking $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Interpreteer het linkerlid van de ongelijkheid als functievoorschrift $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Het bereik op de x-as waarvoor de grafiek boven de x-as gelegen is, voldoet aan de ongelijkheid.

Voorbeeld

$15x^2 - 14x - 8 \geq 0$. Dergelijke ongelijkheden kunnen worden opgelost met CAS (zie scherm). Hoe komt men echter zelf aan de oplossing? De grensvergelijking $15x^2 - 14x - 8 = 0$ heeft de oplossingen $x = -\dfrac{5}{2}$ en $x = \dfrac{4}{3}$. Als men het linkerlid interpreteert als functie $f(x) = 15x^2 - 14x - 8$, dan wordt de vraag: voor welke x-waarde is de functiewaarde $f(x) \geq 0$? Aangezien $a = 15$ is het een dalparabool, de oplossingenverzameling van de ongelijkheid is dus $L = \left]-\infty\,; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{3}\,; \infty\right[$.

$\text{solve}(15 \cdot x^2 - 14 \cdot x - 8 \geq 0, x)$	$x \leq \frac{-2}{5}$ or $x \geq \frac{4}{3}$
$\text{solve}(15 \cdot x^2 - 14 \cdot x - 8 = 0, x)$	$x = \frac{-2}{5}$ or $x = \frac{4}{3}$



Opgave 2.42

Los volgende ongelijkheden op en toon de oplossingenverzameling door de parabool te tekenen (linkerlid van de ongelijkheid):

a) $x^2 + 2x - 15 < 0$ b) $-x^2 + 2x + 3 < 0$ c) $x^2 - 3x + 9 \leq 0$

d) $x^2 - x + 1 > 0$ e) $x^2 \leq 2x - 1$ f) $5x^2 - 8x - 9 \geq 0$

g) $x \cdot (x^2 - 4) > 0$ h) $x^2 - a \cdot x - 5x + 5a \leq 0$

Opgave 2.43

Arceer de oplossingenverzameling van de volgende ongelijkheden of stelsels van ongelijkheden in een assenstelsel:

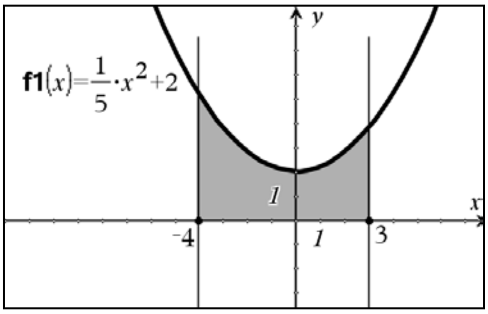
a) $y \leq x^2 - 4x + 3$ b) $y \geq x^2 - 6x + 9$ c) $y \geq \left|x^2 + 2x - 15\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y \leq 12 \\ y \leq -x^2 + 5 \end{array}\right|$ e) $\left|\begin{array}{l} y \leq -2(x-2)^2 + 2 \\ y \geq (x-1)^2 - 1 \end{array}\right|$ f) $\left|\begin{array}{l} y \leq \dfrac{1}{|x|} \\ y \leq 4 - x^2 \end{array}\right|$ g) $\left|\begin{array}{l} x - y \geq 3 \\ 2x + y + 1 \geq 0 \\ y \leq x^2 - 2x + 2 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{array}\right|$

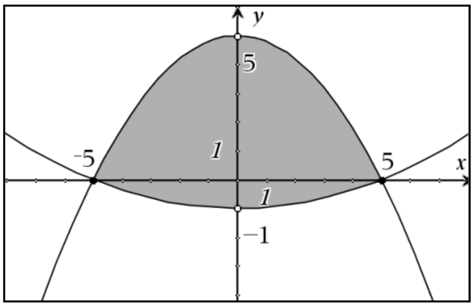
Opgave 2.44

Beschrijf het gearceerde deel met ongelijkheden. De grenskrommen zijn parabolen of rechten (tip: het domein indien nodig beperken):

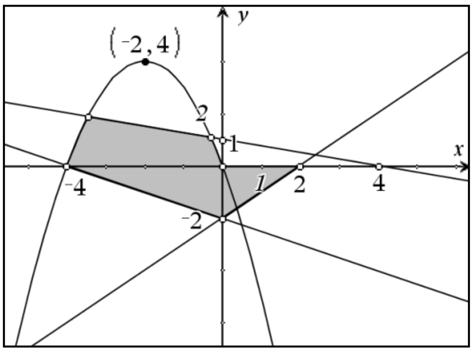
a)



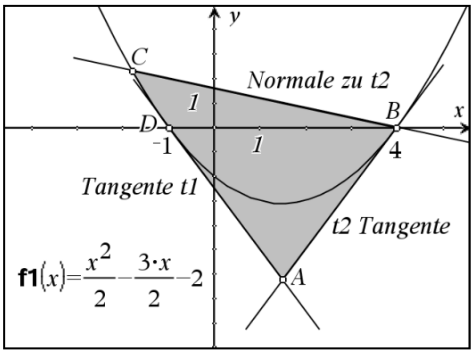
b)



c)



d)



Opgave 2.45

Een firma maakt speelgoed, dat essentieel uit een spiraalveer met veerconstante k en een slingerende massa m bestaat. Voor de slingerfrequentie f van het speelgoed geldt het verband (bij keuze van de juiste schaal)

$$k = m \cdot f^2$$

De productievoorwaarden van het speelgoed bepalen dat de veerconstante gelegen is tussen 0.7 en 2 en de massa tussen

a) $\frac{1}{3}$ en 1

b) $\frac{1}{2}$ en 1

De productiekosten z kunnen worden berekend met:

$$z = 1000 + 3k - 4f$$

Welke veerconstante, frequentie en massa leveren het optimale speelgoed met de laagste productiekosten (grafische en algebraïsche oplossing)?
Tip: schets de productievoorwaarden in een f-k-assenstelsel (f-as horizontaal).

3 Transformaties bij impliciete functies

3.1 Transformatievergelijkingen

De transformaties van hoofdstuk 1 worden hier nauwkeurig opgebouwd en uitgebreid voor impliciete functies.
Een vergelijking in twee variabelen x en y beschrijft een kromme in het x - y -vlak.

Voorbeelden:

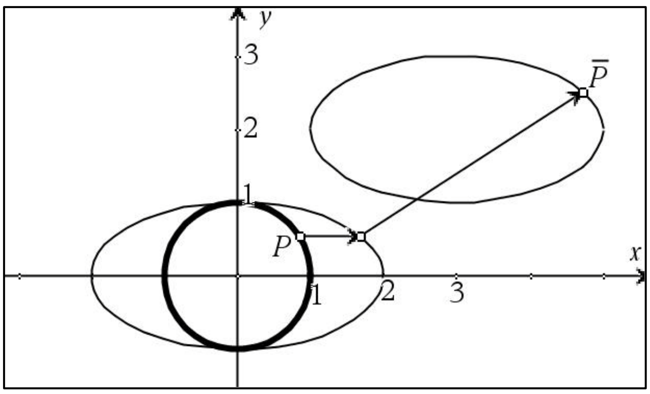
$y - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x^2 - 1$ parabool

$xy - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ hyperbool

$x^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2$ cirkel met straal 2 en middelpunt $(0 \mid 0)$

Als de vergelijking in de eerste vorm van de voorbeelden staat (*impliciete vorm*), dan noteert men algemeen $g(x, y) = 0$, d.w.z. dat een uitdrukking in de twee variabelen x en y gelijk wordt gesteld aan nul.
Als men de vergelijking $g(x, y) = 0$ oplost naar y, dan verkrijgt men een functievergelijking van de vorm $y = f(x)$ (*expliciete vorm*), de kromme kan dan worden getekend als grafiek van de functie.
Een kromme gedefinieerd door een vergelijking $g(x, y) = 0$ kan nu worden verschoven, uitgerekt of geroteerd. Wat is dan de vergelijking van de getransformeerde kromme?

Voorbeeld: de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 1 = 0$ wordt eerst in de x -richting met factor 2 uitgerekt en vervolgens over de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschoven.



Met elk punt $P(x \mid y)$ van de oorspronkelijke curve correspondeert nu eenduidig een punt $\overline{P}(\overline{x} \mid \overline{y})$ van de getransformeerde curve.

De vergelijkingen waarmee men $\overline{x}$ en $\overline{y}$ uit x en y berekent, worden *transformatievergelijkingen* genoemd. Klaarblijkelijk geldt in het voorbeeld:

$$\overline{x} = 2x + 3$$
$$\overline{y} = y + 2$$

Door oplossen naar x en y verkrijgt men de *transformatievergelijkingen* in de vorm:

$$x = \frac{\overline{x} - 3}{2}$$
$$y = \overline{y} - 2$$

Een *gelijkheidsteken* is steeds ook een *substitutieteken* (vervangingsteken) resp. een toestemming om te substitueren , d.w.z. dat wat links van het gelijkheidsteken staat kan worden vervangen door wat er rechts van staat.

Als men nu in de vergelijking van de kromme x vervangt door $\frac{\overline{x} - 3}{2}$ en y door $\overline{y} - 2$, dan levert dit de vergelijking van de getransformeerde kromme:

$$\left(\frac{\overline{x} - 3}{2}\right)^2 + \left(\overline{y} - 2\right)^2 = 1$$

De dwarsstreepjes kunnen tenslotte worden weggelaten, aangezien ze enkel werden ingevoerd om een onderscheid te maken tussen de oorspronkelijke en getransformeerde coördinaten.
De vergelijking van de getransformeerde kromme wordt dan:

$$\left(\frac{x - 3}{2}\right)^2 + \left(y - 2\right)^2 = 1$$

Als deze werkwijze wordt toegepast voor de elementaire transformaties, dan kunnen hieruit transformatieregels of „transformatierecepten“ worden afgeleid.

Transformatie	Transformatie-vergelijkingen	Omgevormde vergelijkingen	Regel (recept)
Verschuiving in x-richting over u	$\overline{x} = x + u$ $\overline{y} = y$	$x = \overline{x} - u$ $y = \overline{y}$	vervang x door $x - u$
Verschuiving in y-richting over v	$\overline{x} = x$ $\overline{y} = y + v$	$x = \overline{x}$ $y = \overline{y} - v$	vervang y door $y - v$
Uitrekking in x-richting met factor k	$\overline{x} = k \cdot x$ $\overline{y} = y$	$x = \frac{\overline{x}}{k}$ $y = \overline{y}$	vervang x door $\frac{x}{k}$
Uitrekking in y-richting met factor a	$\overline{x} = x$ $\overline{y} = a \cdot y$	$x = \overline{x}$ $y = \frac{\overline{y}}{a}$	vervang y door $\frac{y}{a}$

Deze transformaties kunnen ook na elkaar worden uitgevoerd, hierbij speelt de volgorde echter meestal een rol.

3.2 Opgaven over translaties en uitrekkingen

Translaties

Voorbeeld

De cirkel met straal 1 (eenheidscirkel) $x^2 + y^2 = 1$ wordt verschoven over de vector

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

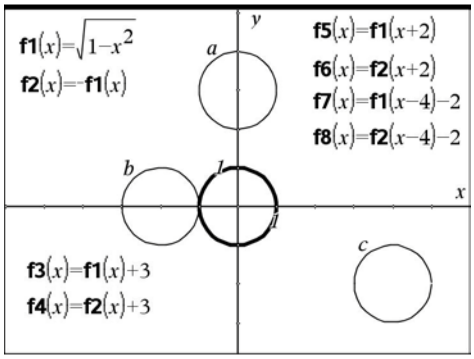
De vergelijkingen van de verschoven cirkels zijn:

a) $x^2 + (y-3)^2 = 1$

b) $(x+2)^2 + y^2 = 1$

c) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 1$

De verschoven cirkels worden rechts voorgesteld. Als er geen bevel bestaat voor het tekenen van impliciete functies en als de uitgangsvergelijking zoals hier kan worden opgelost naar y, dan wordt de startcirkel getekend via twee functies voor de halve cirkels. Voor de verschoven functies gebruikt men de twee startfuncties en de translatieregels.



De bovenstaande startcirkel $x^2 + y^2 = 1$ kan met CAS ook met $\text{zeros}\left(x^2 + y^2 - 1, y\right)$ worden getekend (lijst van de beide halve cirkels).

Opgave 3.1

Een rechte met helling 3 gaat door het punt $P\left(4 \mid -2\right)$. Bepaal de vergelijking van de rechte (transformatie van de rechte $y = x$).

Opgave 3.2

Teken de krommen

a) $x + |y| = 1$ (startkromme) b) $\left(x+2\right) + |y-3| = 1$ c) $|y+2| = 5 - x$

Opgave 3.3

Teken de krommen

a) $|x| + |y| = 1$ (startkromme) b) $|x-3| + |y| = 1$

c) $|x+3| + |y-2| = 1$ d) $|x+3| + |y-2| = 4$

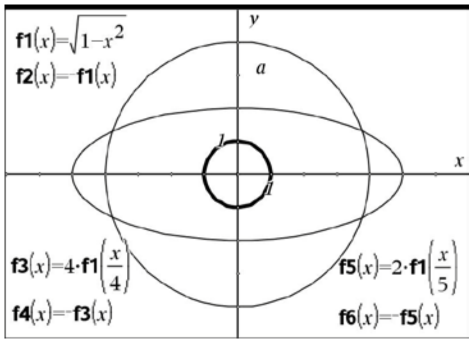
e) De startkromme uit a) wordt verschoven in de x-richting, tot ze door het punt $\left(3 \mid 0.5\right)$ gaat. Bepaal de vergelijking van de beeldkromme.

Opgave 3.4

De kromme $y^3 + 3 \cdot x^2 - \sqrt{x-5} = 0$ wordt verschoven over de vector $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bepaal de vergelijking van de verschoven kromme.

Uitrekking in de richting van de x - as en y-as.



Voorbeeld

De eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$ wordt in de x-as uitgerekt over een factor a en in de richting van de y-as over een factor b.

a) $a = 4,\ b = 4$ b) $a = 5,\ b = 2$

In het eerste geval verkrijgt men een cirkel met straal 4 , vergelijking $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ of $x^2 + y^2 = 16$.

Het tweede geval levert een ellips met halve assen 5 en 2, vergelijking $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$.

Opgave 3.5

De startkromme $|x| + |y| = 1$ wordt

a) in de x-, resp. y-richting over 3, resp. 5 uitgerekt

b) bijkomend bij a) in de x-richting over 2 verschoven

c) bijkomend bij a) in de x-richting over –2 en in de y-richting over –4 verschoven

d) in de x- en y-richting met dezelfde factor c uitgerekt tot ze door het punt $(6 \mid 2)$ gaat.

Bepaal de vergelijking en schets de getransformeerde kromme.

e) Schets de kromme $|2x - 8| + \left|\frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right| = 3$

Opgave 3.6

De kromme $y^2 - 2y + 2x^2 - 3 = 0$ wordt achtereenvolgens

a) in de x-richting met een factor 2 uitgerekt

b) in de y-richting over 3 verschoven

c) in de y-richting met een factor 5 uitgerekt

d) in de x-richting over –1 verschoven

Bepaal de vergelijking van de getransformeerde kromme.

Opgave 3.7

Bepaal de transformatievergelijkingen voor een homothetie.

Opgave 3.8

a) Verklaar: als men de standaardparabool met vergelijking $y = x^2$ in de y -richting uitrekt met factor 2, dan verkrijgt men de parabool $y = 2x^2$.

b) De parabool met vergelijking $y = 2x^2$ kan men ook verkrijgen door de standaardparabool uit te rekken in de x -richting, over welke factor?

c) De parabool met vergelijking $y = 2x^2$ kan men ook nog verkrijgen door een homothetie van de standaardparabool met de oorsprong als centrum. Bepaal de gelijkvormigheidsfactor van deze homothetie.

d) Veralgemening. Toon aan dat alle parabolen gelijkvormig zijn. Bepaal de gelijkvormigheidsfactor van de homothetie waarbij de standaardparabool getransformeerd wordt in de parabool met vergelijking $y = a \cdot x^2$.

Opgave 3.9

Gegeven de ellips met middelpunt $\left(0 \mid 0\right)$ en halve assen 5 en 3 op de coördinaatassen.

a) Bepaal de snijpunten van de ellips met de rechte $y = 2x + 1$.

b) Voor welke waarde van c is $y = 2x + c$ een raaklijn aan de ellips?

c) Voor welke waarde van c raakt $y = c \cdot x + 1$ aan de ellips?

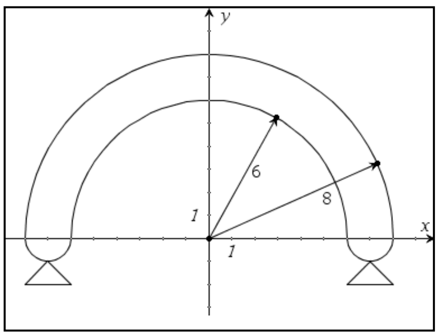
d) Bepaal een ellips met assenverhouding 3:1 die raakt aan de rechte $y = 2x + 1$.

e) Voor welke waarde van c snijdt de rechte $y = c \cdot x + 1$ een koorde met lengte 8 af uit de gegeven ellips?

Men kan ook vergelijkingen met wortelfuncties, hyperboolfuncties en goniometrische functies transformeren, als deze reeds gekend zijn.

Opgave 3.10

Dit is een worstopgave!



a) Teken de nevenstaande worst m.b.v. halve cirkels en lijnstukken (rechten met een beperkt domein).

b) Vaak is de worst platter. Rek de worst uit in de y -richting met een factor 0.5 en, opdat het volume zou gelijk blijven, in x -richting over 30% meer. Waarom stemt de vorm van de worst niet tot voldoening? Verbeter de worst.

Opgave 3.11

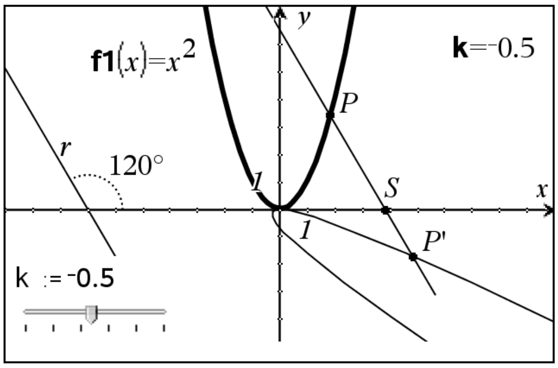
a) Een kogel met straal 2 valt langs de y-as op een paraboolvormige vaas met doorsnede $y = x^2$.
Waar treft de kogel de vaas (middelpunt en raakpunten)?
Beschouw de doorsnede (cirkel met middelpunt $M\left(0 \mid v\right)$ en straal 2).
Bepaal de raakpunten en het middelpunt van de cirkel met bovenstaande parabool eerst grafisch (schuifregelaar vooor v) en vervolgens algebraïsch.

b) De cirkel met straal 2 rolt langs de parabool $y = x^2$ naar beneden. Bepaal grafisch de kromme die wordt beschreven door het middelpunt.

c) De cirkel met straal 2 glijdt langs de buitenkant van de parabool naar boven (bv. een bolvormige ballon). Bepaal grafisch de kromme die wordt beschreven door het middelpunt.

Opgave 3.12

Gegeven: de parabool $p : y = x^2$, een rechte r en factor k (ongeveer zoals in de figuur). Bij een affiniteit met de x-as als affiniteitsas, r als affiniteitsrichting en uitrekfactor k wordt een punt P t.o.v. de x-as zodanig gespiegeld, dat voor het beeldpunt P' geldt:
$\overrightarrow{SP'} = k \cdot \overrightarrow{SP}$



a) Construeer het beeldpunt P' van een willekeurig punt $P \in p$ en de beeldkromme van de parabool p.

b) Wijzig de uitrekfactor k m.b.v. een schuifregelaar.

c) Wijzig de parabool in een andere functie.

d) Bepaal de transformatievergelijkingen voor het bovenstaande scherm (een hoek van 120° met de x-as, uitrekfactor –0.5), geef ook de vergelijking van de beeldkromme van p.

e) Bepaal de transformatievergelijkingen voor een willekeurige richting r en een willekeurige uitrekfactor k, geef ook de vergelijking van de beeldkromme van p.

f) Een cirkel werd getransformeerd via een affiniteit t.o.v. een willekeurige as, met een veranderlijke affiniteitsrichting en uitrekfactor. Construeer het beeld.

4 Extreme waarden, optimaliseringsopgaven

Optimaliseringsproblemen hebben van oudsher ook in de wiskunde een belangrijke rol gespeeld en vandaag is dat nog zo. Een van de oudste is het probleem van Dido, een Fenicische prinses, die volgens de Griekse mythologie de stad Carthago in Noord-Afrika heeft gesticht. Toen Dido rond 900 voor Christus naar Tunis kwam, kreeg ze van de koning zoveel land „als ze met een ossenvel kon omspannen“. Dido deed haar uiterste best met deze overeenkomst. Ze sneed het ossenvel in zeer dunne strepen en verbond ze tot een lange band. Als men dit probleem in het binnenland en niet aan de kust stelt, dan wordt dit wiskundig: in het vlak moet een gesloten kromme met gegeven lengte L een gebied met een zo groot mogelijke oppervlakte A (de zogenoemde doelfunctie) omsluiten.
Een dergelijke maximumopgave (ook variatieprobleem genoemd), waarbij een grootheid vast blijft, noemden de Grieken een isoperimetrisch probleem en ze kenden ook de gemakkelijk te raden oplossing: de cirkel.

Bij het oplossen van opgaven met CAS is het niet alleen de bedoeling de computer louter als een reken- of tekenmiddel te gebruiken. De inzet van CAS heeft als allereerste doel, het aan wiskunde doen te ondersteunen. Het gebruik van CAS maakt het mogelijk om een vermoeden te onderzoeken, probleemstellingen experimenteel te analyseren en snel over te schakelen tussen de verschillende voorstellingsvormen (algebraïsch, grafisch, numeriek).

4.1 Tweedegraadsdoelfuncties

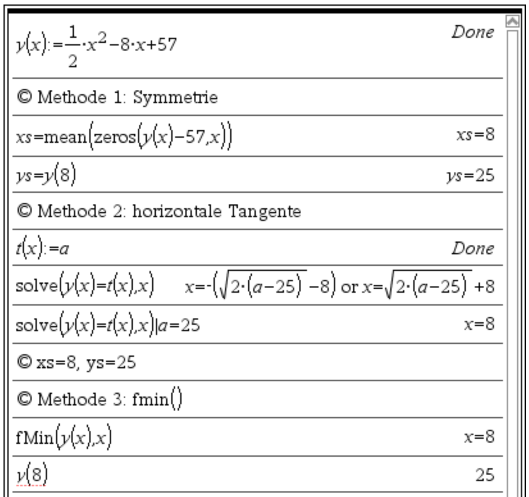
Bij een doelfunctie is het „doel“, de grootste of kleinste (extreme) functiewaarde te vinden. Een tweedegraadsfunctie is een parabool, waarvan de top steeds het gezochte extreme punt is. Een naar boven geopende parabool heeft een minimum, een naar beneden geopende parabool een maximum.

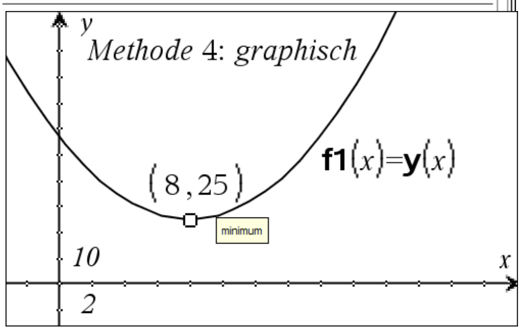
Voorbeeld: $y = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 57$

Bepaling van de top met CAS (4 methoden):
1. symmetrie (gemiddelde der nulpunten)
2. horizontale raaklijn
3. functies: fMax() resp. fMin()
4. grafisch

Manuele bepaling van de top met vervolle-diging van het kwadraat:

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}\cdot\left[x^2 - 16x + 114\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left[\left(x-8\right)^2 - 64 + 114\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left(x-8\right)^2 + 25 \quad \rightarrow \quad S\left(8 \mid 25\right) \end{aligned}$$





Opgave 4.1

Toon aan dat de volgende uitspraken gelden voor de term $T(x) = -x^2 + 6x + 40$:

1) Er bestaat een waarde x_M, zodat de waarde van de term T maximaal wordt: $T(x_M) = T_{\text{Maximum}}$.
2) Er bestaan juist twee getallen x_1 en x_2, waarvoor de term nul wordt $T(x_1) = 0$ en $T(x_2) = 0$ (nulpunten van de term).

a) Analyseer: is er een verband tussen x_M, x_1 en x_2?
Bereken x_M uit x_1 en x_2 voor de bovenstaande term.

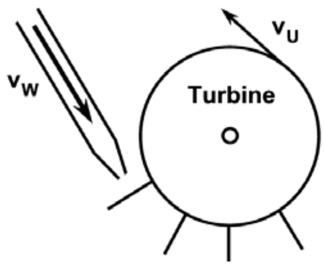
b) Hoe kan men x_M berekenen, als er geen nulpunten x_1 en x_2 zijn?
Bereken x_M voor de term $T(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8x - 34$.

Opmerking:

Veel van de volgende opgaven kunnen door bepaling van de grensgevallen (nulpunten van de doelfunctie) worden opgelost. Daardoor kunnen de extreme waarden worden berekend als gemiddelde van de nulpunten (enkel geldig bij tweedegraadsdoelfuncties!). Hierbij dient men echter eerst na te gaan dat de doelfunctie wel degelijk een tweedegraadsfunctie is.

Voorbeeld 1: maximaal rendement van een turbine

In een turbine van een waterkrachtcentrale stroomt het water met een snelheid $v_W = 200\ \text{ms}^{-1}$ uit de pijp op de turbineschoepen. Het rendement van een turbine wordt gedefinieerd door:



$$W = \frac{\text{energie door het water overgedragen op de turbine}}{\text{totale energie van het water}}$$

In het turbinebedrijf wordt de omtreksnelheid v_U van de schoepen constant gehouden. W kan als volgt worden geschreven als tweedegraadsfunctie van v_U :

$W(v_u) = -\frac{4}{v_W^2} \cdot v_u^2 + \frac{4}{v_W} \cdot v_u$. Voor welke omtreksnelheid v_U heeft de turbine een maximaal rendement? Oplossing door bepaling van de grensgevallen:

$v_U = 0$ en $v_U = v_W \quad \rightarrow v_U = \frac{0+v_W}{2} = \frac{v_W}{2}$

Als de turbine stilstaat ($v_U = 0$), dan wordt er geen energie overgedragen (W = 0). Als de turbineschoepen even snel bewegen als het water ($v_U = v_W$), dan kan er geen energie worden overgedragen. Hiermee hebben we de nulpunten van W en aangezien W een tweedegraadsfunctie is kunnen we het maximale rendement berekenen.

$w(vu):=\frac{-4}{vw^2}\cdot vu^2+\frac{4}{vw}\cdot vu$	*Done*
fMax$(w(vu),vu)$	$vu=\frac{vw}{2}$
zeros$(w(vu),vu)$	$\{vw,0\}$
mean$(\{vw,0\})$	$\frac{vw}{2}$

Oplossingsschema voor optimaliseringsopgaven met nevenvoorwaarden

Bij opgaven over extreme waarden is er steeds een doelfunctie waarvan de waarde moet worden gemaximaliseerd/geminimaliseerd, en vaak één (of meerdere) nevenvoorwaarden die de keuze van variabelen in de doelfunctie beperkt. Hier volgt een strategie om dergelijke optimaliseringsopgaven met nevenvoorwaarden op te lossen :

1) Stel de situatie van de opgave – indien mogelijk – voor in een schets.
2) Noteer wat gegeven en gevraagd is. Geef een geschikte naam aan de uitgangsgrootheden en de onbekenden.
3) Bepaal de doelfunctie en formuleer ze als een wiskundige functie, afhankelijk van de de uitgangsgrootheden en de onbekenden.
4) Identificeer de nevenvoorwaarden. De keuze van de te bepalen grootheden moet door de opgave op één of andere manier worden beperkt. Formuleer de nevenvoorwaarden als vergelijkingen.
5) Als we de doelfunctie hebben geformuleerd, die uit twee (of meerdere) van elkaar onafhankelijke variabelen bestaat en de nevenvoorwaarden, die de van elkaar onafhankelijke variabelen met elkaar in verband brengen, dan kunnen we de afhankelijkheid van de doelfunctie reduceren tot één variabele.
6) Druk alle variabelen uit in één vast gekozen variabele, m.b.v. de nevenvoorwaarden.
7) Substitueer de nevenvoorwaarden zodanig in de doelfunctie, dat er voor de te optimaliseren waarde een equivalente doelfunctie ontstaat die slechts afhankelijk is van één variabele.
8) Bepaal het maximum of minimum van de doelfunctie. Hou hierbij rekening met de beperking van het domein in de opgave (bv. een negatieve lengte is zinloos) en de randpunten van het domein. Er zijn situaties mogelijk, waarbij er weliswaar een lokale extreme waarde wordt bereikt in het inwendige van het domein, maar waarbij de doelfunctie een globale extreme waarde bereikt op de rand van het domein.

Internetpagina:
http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/koelnproj5/
Opgesteld in het kader van modelvorming SelMa 1999-2003. Deze pagina bevat een inleiding over het bepalen van extreme waarden en veel optimaliseringsopgaven. De oplossingen kunnen begeleid en stap per stap volgens het oplossingsschema worden doorgenomen.

Opgave 4.2

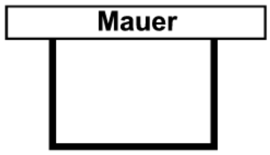
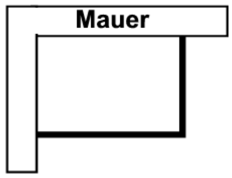
a) Voor welk getallenkoppel (x, y), dat voldoet aan de voorwaarde $2x + 3y = 5$, is het product $P = x \cdot y$ maximaal?

b) Voor welk getallenkoppel (x, y), dat voldoet aan de voorwaarde $x - y = 4$, is de som der kwadraten $S = x^2 + y^2$ minimaal?

Voorbeeld 2: maximale rechthoekoppervlakte bij gegeven omtrek

Een variatie op het oude optimaliseringsprobleem van de Fenicische prinses Dido.

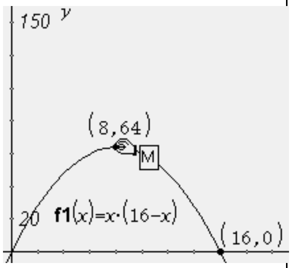
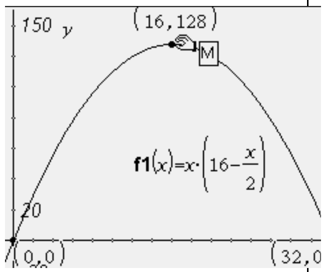
Groepswerk: een rechthoekig gebied van een weide moet worden voorzien van een 32 m lange omheining. Bestaat er een maximale oppervlakte die we kunnen omheinen? Hoe groot is die oppervlakte? Bespreek de oplossingsstappen voor de varianten A en B (geen muur of één muur) en los dan variant C op (twee muren). Ga de verbanden na in het probleem!

Optimalisering: maximale oppervlakte met een begrensde omheining U = 32m.	**Variante A** 	**Variante B** 	**Variante C** 

1. Merk op dat er door elke keuze van de lengte L ook een bepaalde breedte en daarmee ook bepaalde oppervlakte voor de rechthoek worden vastgelegd.
2. Welke „dwaze“ weideoppervlakken - vormen ontstaan er als grensgevallen?
3. Van welk type zou de oppervlaktefunctie kunnen zijn?
4. Ligt de maximale oppervlakte in het midden van de grenstoestanden?
5. Bepaal formules voor de doelgrootheid (weideoppervlakte A) en de nevenvoorwaarden. Doelfunctie: het verband lengte $\mapsto$ weideoppervlakte.
6. Bepaal het maximum algebraïsch.

Lösungen für Variante A und B

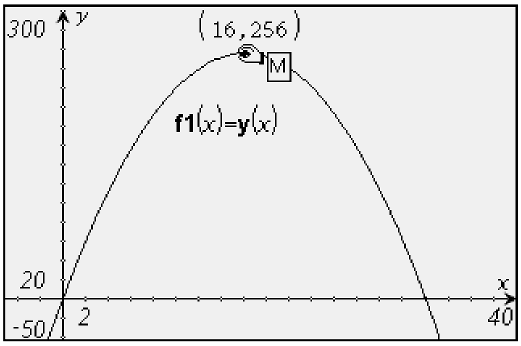
Stappen	Variant A	Variant B	Variant C
Doelfunctie	$A(L,B) = L \cdot B$	$A(L,B) = L \cdot B$	
Nevenvoorwaarde	$U = 32 = 2L + 2B$	$U = 32 = L + 2B$	
Onbekende	lengte $L: x$	lengte $L: x$	
Tweede onbekende in x uitdrukken	$32 = 2x + 2B$ $B = 16 - x$	$32 = x + 2B$ $B = 16 - \frac{x}{2}$	
Doelfunctie in x uitdrukken (weideoppervlakte)	$y = x \cdot (16 - x)$ tweedegraadsfunctie	$y = x \cdot \left(16 - \frac{x}{2}\right)$ tweedegraadsfunctie	
Nulpunten grensgevallen (A = 0)	$x_1 = 0,\ x_2 = 16$	$x_1 = 0,\ x_2 = 32$	
Symmetrie x_{max} levert de maximale oppervlakte	$x_{max} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 8$ $L = 8\ ;\quad B = 8$	$x_{max} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 16$ $L = 16\ ;\quad B = 8$	
Maximale oppervlakte	vierkant A = 64	rechthoek A = 128	

tweedegraadsfunctie, naar beneden geopende parabool, top grafisch	$y = -x^2 + 16x$ 	$y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 16x$ 	

Oplossing van variant C met het rekentoestel:

© Zielfunktion y= l*b, Unbekannte x=l Nebenbedingung nach b auflösen	
solve$(x+b=32,b)$	$b=32-x$
$y(x):=x\cdot(32-x)$	*Done*
© Methode1: Maximum mit Symmetrie	
mean(zeros$(y(x),x)$)	16
max_fläche$=y(16)$	*max_fläche*$=256$
© Methode2: horizontale Tangente	
solve$(y(x)=a,x)$	$x=-(\sqrt{256-a}-16)$ or $x=\sqrt{256-a}+16$
solve$(y(x)=a,x)\|a=256$	$x=16$
© Methode3: Maximum mit fmax()	
fMax$(y(x),x)$	$x=16$

Grafische oplossing



Variant A levert een vierkant als optimale figuur, op voorwaarde dat het weideoppervlak een rechthoek moet zijn. Zonder deze voorwaarde zou een cirkel de optimale figuur zijn. Stel dat de omtrek van de figuur $U = 4\,\mathrm{m}$ is, dan heeft het vierkant als oppervlakte $A = 1\,\mathrm{m}^2$.

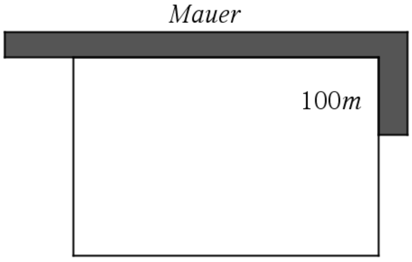
Een cirkel met $U = 4\,\mathrm{m}$ heeft straal $r = 0.6366\,\mathrm{m}$ en oppervlakte $A = 1.2732\,\mathrm{m}^2$.

Vergelijk dit met andere figuren, bv. een regelmatige n-hoek $(n = 6, 8, 10, \ldots)$.

Berken de oppervlakte van enkele n-hoeken die een omtrek $U = 4\,\mathrm{m}$ hebben, vergelijk met de oppervlakte van een cirkel.

Opgave 4.3

De oppervlakte van een rechthoekig perceel moet volgens de nevenstaande schets maximaal worden. Bereken de oppervlakte onder de volgende voorwaarde: de omheining van de rechthoek (zonder de twee muren) meet 700 meter, de kleine muur 100 meter.



Voorbeeld 3: maximale rechthoekige marmerplaat uit een driehoekige plaat

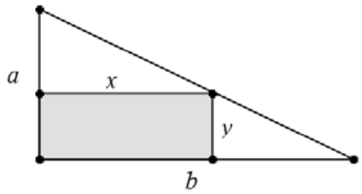
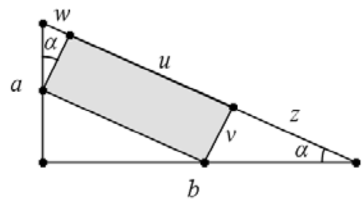
Uit een driehoekvormige plaat (een overschot) moet men een rechthoekvormige plaat zagen. Gegeven zijn de lengten a en b van de rechthoekszijden.

a) Hoe moet we de lengte en breedte kiezen, om de rechthoekige plaat met de grootste oppervlakte te verkrijgen?

b) Hoe groot is de maximale oppervlakte?

c) Vergelijk de twee mogelijkheden. Welke levert de grootste oppervlakte?

d) Getallenvoorbeeld: $\mathrm{a} = 50\ \mathrm{cm}$, $\mathrm{b} = 70\ \mathrm{cm}$.

Variant 1	Variant 2
	
Oplossing door bepaling van de grensgevallen:	
$\mathrm{x} = 0$ en $\mathrm{x} = \mathrm{b}$ Lengte x voor de maximale oppervlakte: $\mathrm{x}_{\max} = \frac{0+\mathrm{b}}{2} = \frac{\mathrm{b}}{2}$	$\mathrm{u} = 0$ en $\mathrm{u} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$ Lengte u voor de maximale oppervlakte: $\mathrm{u}_{\max} = \frac{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}{2}$

Variant 1:

© Zielfunktion A(x,y)=x*y

© Nebenbedingung: Ecke des Rechtecks auf der Hypotenuse (Ansatz für Hypotenuse)

$y(x):=m\cdot x+q$ — Done

$\text{solve}\left(\begin{cases} y(0)=a \\ y(b)=0 \end{cases}, m,q\right)$ — $m=\frac{-a}{b}$ and $q=a$

$y(x)|m=\frac{-a}{b}$ and $q=a$ — $a-\frac{a\cdot x}{b}$

© Zielfunktion Rechtecksfläche f(x)

$f(x):=x\cdot\left(a-\frac{a\cdot x}{b}\right)$ — Done

© Methode 1: Symmetrie

$\text{mean}(\text{zeros}(f(x),x))$ — $\frac{b}{2}$

© Methode 3: fmax()

$\text{fMax}(f(x),x)$ — $x=\frac{b}{2}$

© maximale Rechtecksfläche

$f\left(\frac{b}{2}\right)$ — $\frac{a\cdot b}{4}$

© Zahlenbeispiel

$x=\frac{b}{2}|b=70$ — $x=35$

$\frac{a\cdot b}{4}|a=50$ and $b=70$ — 875

Variant 2:

© Zielfunktion A(u,v)=u*v

© Nebenbedingung: Länge des Rechtecks auf der Hypotenuse (Trigonometrie oder Ähnlichkeit) c=z+u+w; $\tan(\alpha)=\frac{a}{b}=\frac{v}{z}=\frac{w}{v}$

$\text{solve}\left(\sqrt{a^2+b^2}=\frac{b}{a}\cdot v+u+\frac{a}{b}\cdot v, v\right)$ — $v=\frac{-a\cdot b\cdot\left(u-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{a^2+b^2}$

© Zielfunktion Rechtecksfläche f(u)

$f(u):=u\cdot\frac{-a\cdot b\cdot\left(u-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{a^2+b^2}$ — Done

© Methode 1: Symmetrie

$\text{mean}(\text{zeros}(f(u),u))$ — $\sqrt{a^2+b^2}$

© Methode 3: fmax()

$\text{fMax}(f(u),u)$ — $u=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

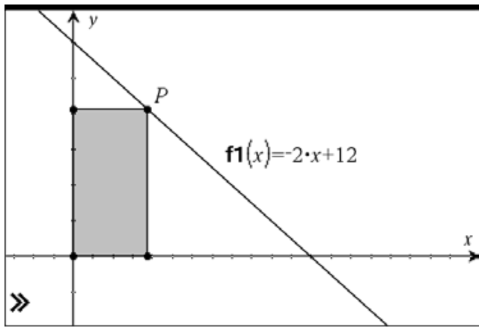
© maximale Rechtecksfläche

$f\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)$ — $\frac{a\cdot b}{4}$

© Gleiches Resultat wie Variante 1

Opgave 4.4

Gegeven de rechte g: $y = -2x + 12$.



a) We beschouwen rechthoeken, die elk een zijde op de x-as en op de y-as hebben en een hoekpunt (punt P) op de rechte. Bepaal de positie van het punt P zodanig, dat de rechthoekoppervlakte maximaal wordt.

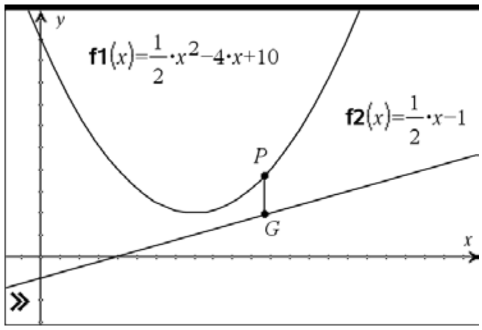
b) Voor welke positie van P wordt de oppervlakte van de rechthoek 16?

Opgave 4.5

Gegeven de rechte g: $y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$

en de parabool p: $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 4x + 10$.

Een evenwijdige met de y-as snijdt de parabool p in P en de rechte g in G.



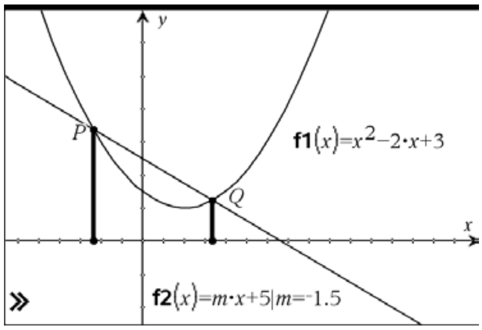
a) Bereken de lengte van het lijnstuk $|PG|$ in functie van de x-coördinaten van P en G.

b) Voor welke x wordt het lijnstuk zo kort mogelijk?

c) Voor welke x heeft het lijnstuk $|PG|$ lengte 4?

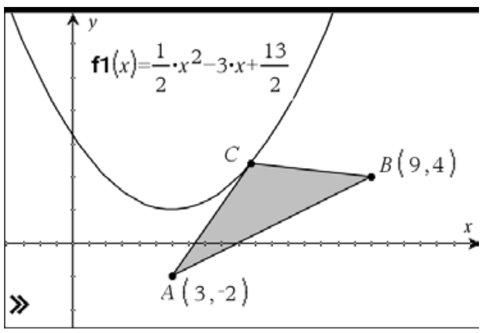
Opgave 4.6

De parabool $y = x^2 - 2x + 3$ wordt door de rechte $y = m \cdot x + 5$ gesneden in de punten P en Q. Bepaal de helling m van de rechte zodanig dat de som van de afstanden van de beide snijpunten tot de x-as zo klein mogelijk is.



Opgave 4.7

Gegeven de beide punten $A(3 \mid -2)$, $B(9 \mid 4)$ en de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 3x + \frac{13}{2}$.

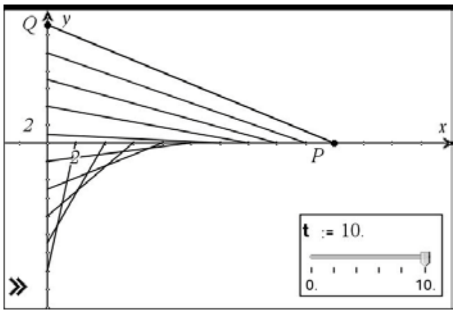


a) Bepaal het punt C zo dat de oppervlakte van de driehoek minimaal wordt.

b) Bepaal het punt C zo dat de oppervlakte van de driehoek 30 wordt.

Opgave 4.8

Het punt P beweegt een snelheid $v_P = 2\,\mathrm{ms}^{-1}$ op de x-as , punt Q met $v_Q = 3\,\mathrm{ms}^{-1}$ op de y-as. Op het tijdstip $t = 0$ bevindt P zich bij $x = 0$ en Q bij $y = -17$.
Op welk tijdstip is de afstand $|PQ|$ minimaal?



Opgave 4.9

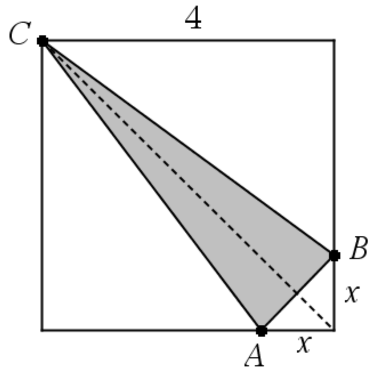
De gelijkbenige driehoek ABC ligt in een vierkant met zijde $s = 4\,\mathrm{cm}$.

a) Voor welke waarde van x is de oppervlakte van de driehoek maximaal?

b) Hoe groot is die maximale oppervlakte?

c) Voor welke x wordt de oppervlakte $A = 6\ \mathrm{cm}^2$?

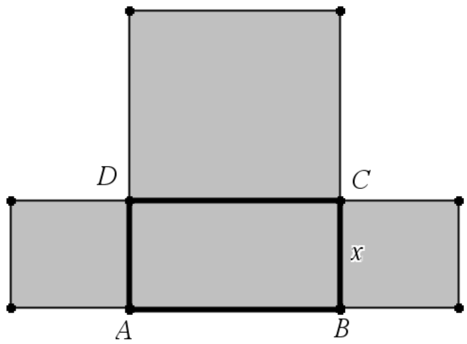
d) Welke oppervlakten A zijn mogelijk?



Opgave 4.10

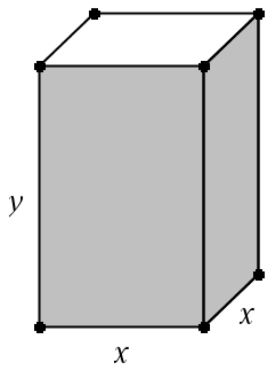
Een rechthoek ABCD heeft als omtrek $24\,\mathrm{m}$.

Langs de zijden $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ en $\overline{DA}$ worden vierkanten geconstrueerd naar buiten.
Hoe lang moet $x = |BC|$ zijn, opdat de oppervlakte van de globale figuur (rechthoek en vierkanten) minimaal zou zijn?



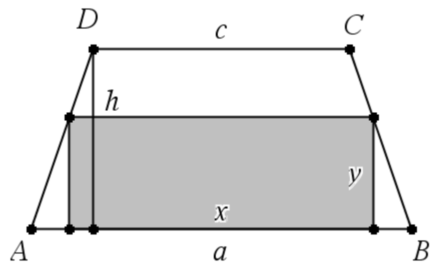
Opgave 4.11

Uit een $L = 48\,\mathrm{cm}$ lange draad moet men de zijden van een balk met een vierkant als grondvlak bepalen. Hierbij moet de manteloppervlakte, d.i. de som van de vier zijdelingse oppervlakten, maximaal worden. Hoe groot moet men de zijde x van het grondvlak kiezen?



Opgave 4.12

In het gelijkbenige trapezium $\left|AD\right| = \left|BC\right|$ met afmetingen $a = 10\,\text{cm}$, $h = 3\,\text{cm}$ en $c = 4\,\text{cm}$ moet men de oppervlakte van de grootste ingeschreven rechthoek bepalen, zodat een zijde gelegen is op de basis a van het trapezium.

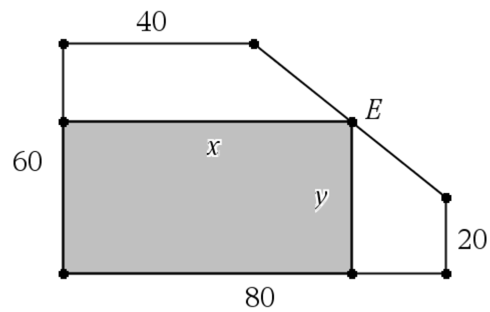


a) Bepaal de afmetingen en de oppervlakte van de rechthoek met de grootste oppervlakte door na te denken .

b) Bepaal de doelfunctie $A(x)$ (x = lengte van de rechthoek).

Opgave 4.13

Uit de afgebeelde plaat (afmetingen in cm) moet een rechthoek worden uitgesneden zoals aangeduid (hoekpunt E rechts boven op de schuine zijde).



a) Stel een functie f: $x \mapsto y$ op, die de lengte x afbeeldt op de hoogte y van de rechthoek.

b) Bepaal hiermee de functie $g : x \mapsto A$, die de lengte x afbeeldt op de oppervlakte A van de rechthoek.

c) Voor welke lengte x is de oppervlakte maximaal?

d) Geef het geschikte domein van de oppervlaktefunctie g in deze context en teken de functie met dit domein.

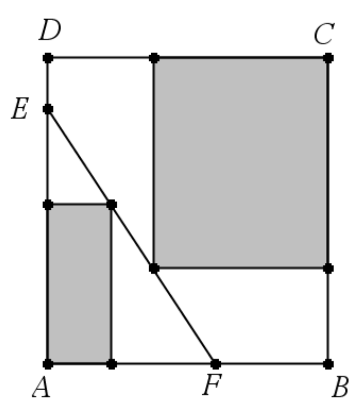
e) Vervang de zijde 40 door 55 en los de opgaven a)-d) op.

Opgave 4.14

Van een dure marmerplaat is tijdens de bewerking een stuk afgebroken . De breuklijn EF is rechtlijnig. Om de schade te beperken, snijden we uit de beide breukdelen (zie schets) een rechthoekige plaat, zodat de som van de oppervlakten zo groot mogelijk is.

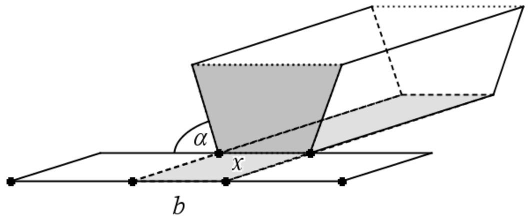
$\left|BC\right| = 160\text{ cm}$; $\left|DC\right| = 100\text{ cm}$
$\left|AE\right| = 120\text{ cm}$; $\left|AF\right| = 60\text{ cm}$

Hoeveel afval is er minstens?



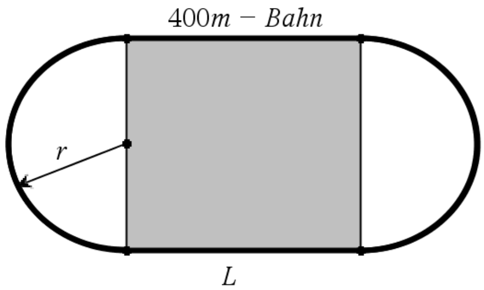
Opgave 4.15

Uit een plaat met breedte b moet een goot met trapeziumvormige doorsnede worden geplooid. De zijdelingse wanden worden over een hoek α met de horizontale naar boven geplooid.
Hoe breed moet de onderzijde x van de goot zijn, zodat de doorsnede maximaal wordt?
Getallenvoorbeeld: $b = 60\text{cm}$, $\alpha = 60^0$



Opgave 4.16

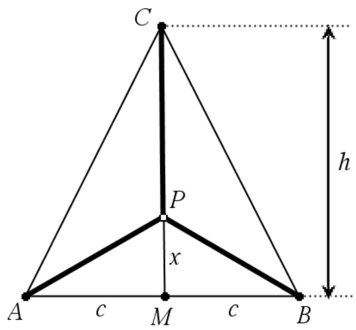
Een 400 m – piste moet zodanig worden aangelegd , dat ze een rechthoek met twee halve cirkels begrenst, waarbij de halve cirkels aansluiten aan de rechthoekszijden (zie figuur).
Hoe groot moet de cirkelstraal r zijn, en hoe lang een recht stuk L tussen de krommen, als de rechthoek een maximale oppervlakte moet hebben? Hoe groot is de maximale oppervlakte van de rechthoek?



Variant: hoe groot moet de cirkelstraal r zijn, en hoe lang een recht stuk L tussen de krommen, als de volledige figuur een maximale oppervlakte moet hebben?
Hoe groot is de maximale oppervlakte?

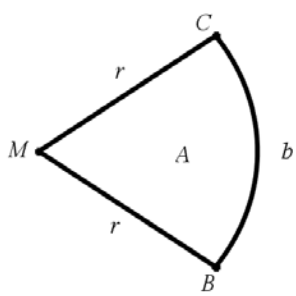
Opgave 4.17

De driehoek ABC is gelijkbenig.
De basis is $2c$ en de hoogte h .
P is een beweeglijk punt op h . Op welke hoogte x boven M moet P liggen, opdat
$\left|PA\right|^2 + \left|PB\right|^2 + \left|PC\right|^2$ minimaal zou zijn?
Welk bijzonder punt van de driehoek verkrijgt men?

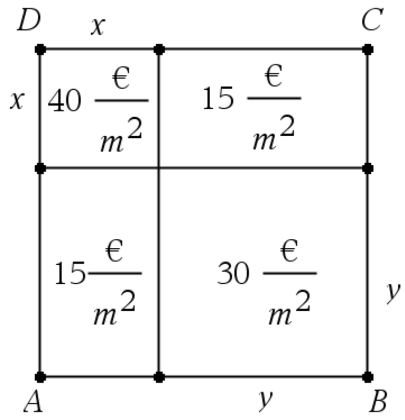


Opgave 4.18

Van alle cirkelsectoren met omtrek U wordt de sector met maximale oppervlakte A gezocht. Hoe groot is deze oppervlakte?



Opgave 4.19



Een vierkantig wandtapijt ABCD heeft zijdenlengte 1 m en is vervaardigd uit drie materialen.
Het materiaal voor het vierkant met zijde x kost 40 € per m² en dat voor het vierkant met zijde y kost 30 € per m². De twee andere rechthoeken bestaan uit materiaal dat 15 € per m² kost.

a) Bepaal de kosten $K(x)$ voor het wandtapijt in functie van de zijde x.

b) Hoe groot zijn de kosten voor $x = 0.5\,\mathrm{m}$?

c) Hoe groot is x, als het tapijt 30 € kost?

d) Bestaat er een tapijt, dat 20 € kost? Bestaat er een tapijt, dat 45 € kost?

e) Bepaal x zodanig dat de kosten minimaal worden.

Economische functies: kostenfunctie, omzetfunctie, winstfunctie

Een firma maakt een product. Om x eenheden van het product te produceren, ontstaan er kosten van $K(x)$ geldeenheden. De totale inkomsten door de verkoop van x eenheden van het product noemt men de omzet $U(x)$ en het verschil $G(x) = U(x) - K(x)$ is de winst. Als er x_0 eenheden van een product worden vervaardigd, dan kan men de kosten per stuk of eenheid berekenen: $SK(x_0) = \dfrac{K(x_0)}{x_0}$.

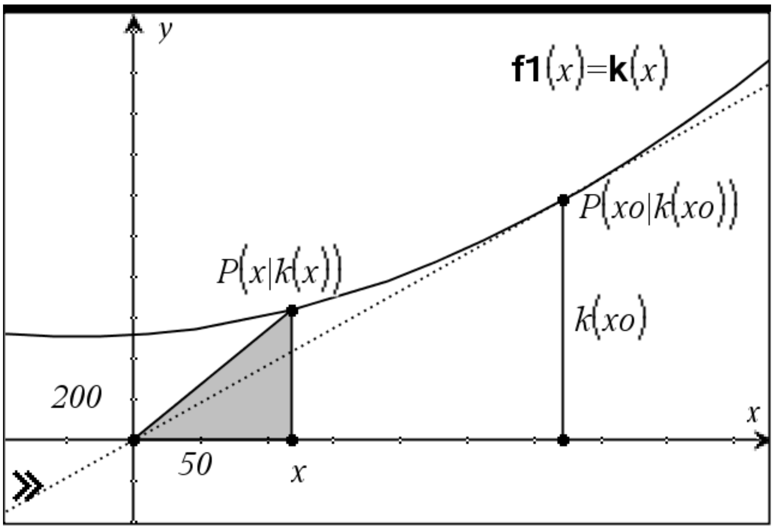
Opgave 4.20

De totale kostenfunctie om een product te maken wordt gegeven door:
$K(x) = 512 + 0.44x + 0.005x^2$. Eén exemplaar wordt verkocht voor 4 geldeenheden, de omzetfunctie is dus $U(x) = 4x$.

a) Bepaal de winstzone, d.w.z. alle x waarvoor geldt dat $G(x) > 0$.

b) Hoeveel eenheden moeten er worden geproduceerd, opdat de winst maximaal zou zijn? Hoe groot is de winst dan?

c) Merk op : de eenheidskosten $SK(x)$ voor een bepaalde geproduceerde hoeveelheid x is de helling van de rechte door de oorsprong en door het bijbehorende punt $P(x \mid K(x))$, dat op de grafiek van $K(x)$ ligt. De vraag naar de minimale eenheidskost is dus de vraag naar die rechte door de oorsprong, die raakt aan de kostenfunctie $K(x)$.

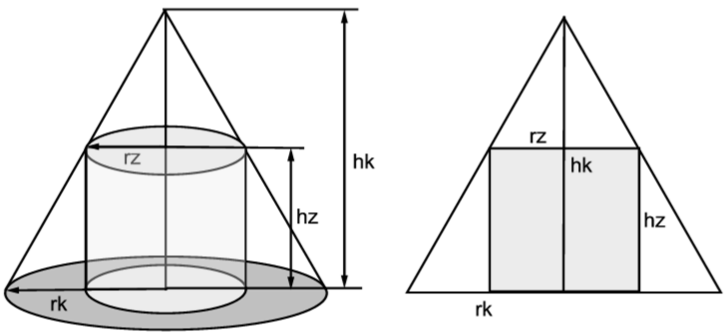


d) Voor welke productiehoeveelheid x_0 wordt de eenheidskost minimaal?

e) Ga het resultaat na. Teken $SK(x) = \frac{K(x)}{x}$ met de rekenmachine en bepaal het minimum grafisch.

Voorbeeld 4: cilinder in kegel, maximale cilinderoppervlakte

In een kegel met straal rk van het grondvlak en hoogte hk wordt een cilinder beschreven met cilinderstraal rz en hooghte hz.



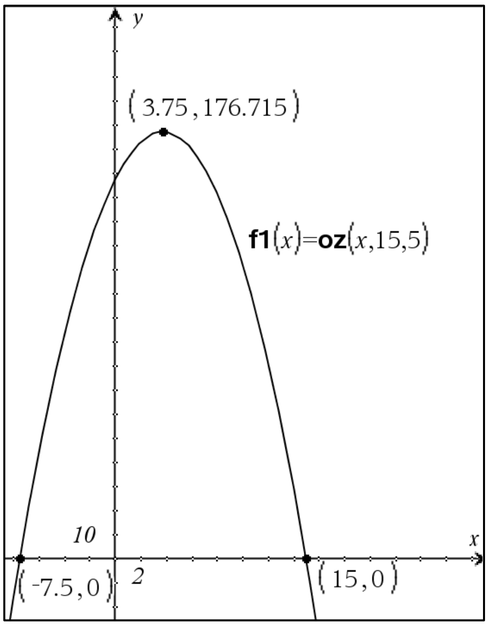
a) Kies $hk = 15$ en $rk = 5$.
Bepaal de cilinder waarvoor de totale cilinderoppervlakte maximaal is .

b) Kies $rk = 5$ en analyseer de functie voor de cilinderoppervlakte.
Onderzoek de drie volgende gevallen:
1. $hk > rk$, 2. $hk = rk$, 3. $hk < rk$
In welk geval heeft de cilinderoppervlakte geen maximum?
Gebruik ook een schuifregelaar voor c met $hk = c \cdot rk$.

© Zielfunktion Zylinderoberfläche(hz,rz)	
$o(hz,rz):=2\cdot\pi\cdot rz^2+2\cdot\pi\cdot rz\cdot hz$	*Done*
© Nebenbedingung: Strahlensatz	
$\text{solve}\left(\frac{hk}{rk}=\frac{hk-hz}{rz},rz\right)$	$rz=\frac{(hk-hz)\cdot rk}{hk}$
© Zielfunktion Oberfläche(hz,hk,rk)	
$oz(hz,hk,rk):=o(hz,rz)\vert rz=\frac{(hk-hz)\cdot rk}{hk}$	*Done*
$oz(hz,15,5)$	$-1.3963\cdot(hz-15.)\cdot(hz+7.5)$
© Zylinderhöhe hz für maximale Oberfläche	
© Methode 1: Symmetrie	
$\text{mean}(\text{zeros}(oz(hz,15,5),hz))$	3.75
© Methode 3: fmax()	
$\text{fMax}(oz(hz,15,5),hz)$	$hz=3.75$
© maximale Zylinderoberfläche	
$oz(hz,15,5)\vert hz=3.75$	176.71

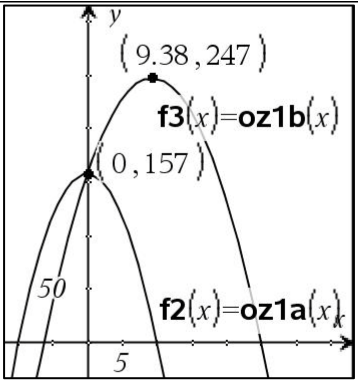
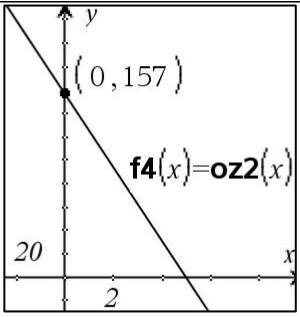
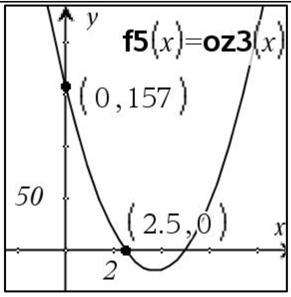
Grafische oplossing

cilinderoppervlakte in functie van de cilinderhoogte hz



© Fallunterscheidungen: rk=5 , oz(hz,hk)	
© Fall 1: hk > rk, Beispiele hk=2*rk und hk=5*rk	
$oz(hz,hk,rk)\vert rk=5 \text{ and } hk=2\cdot rk$	$-1.5708\cdot(hz-10.)\cdot(hz+10.)$
$oz1a(hz):=-1.57\cdot(hz-10.)\cdot(hz+10.)$	*Done*
$\text{fMax}(oz1a(hz),hz)$	$hz=0$
$oz(hz,hk,rk)\vert rk=5 \text{ and } hk=5\cdot rk$	$-1.0053\cdot(hz-25.)\cdot(hz+6.25)$
$\text{fMax}(oz1b(hz),hz)$	$hz=9.375$
© Fall 2: hk = rk	
$oz(hz,hk,rk)\vert rk=5 \text{ and } hk=rk$	$-31.416\cdot(hz-5.)$
$oz2(hz):=-31.4\cdot(hz-5.)$	*Done*
$\text{fMax}(oz2(hz),hz)\vert hz\geq 0$	$hz=0$
© Fall 3: hk < rk , Beispiel hk = 0.5*rk	
$oz(hz,hk,rk)\vert rk=5 \text{ and } hk=0.5\cdot rk$	$12.566\cdot(hz-5.)\cdot(hz-2.5)$
$oz3(hz):=12.566\cdot(hz-5.)\cdot(hz-2.5)$	*Done*
$\text{fMax}(oz3(hz),hz)\vert 2.5\geq hz\geq 0$	$hz=0$

Definitiegebied: $\mathrm{hz} \in \left[0\,;\,\mathrm{hk}\right]$.

Geval 1: $\mathrm{hk} > \mathrm{rk}$	Geval 2: $\mathrm{hk} = \mathrm{rk}$	Geval 3: $\mathrm{hk} < \mathrm{rk}$
	 $\mathrm{hk} = \mathrm{rk} = 5\,;\mathrm{x} \in \left[0\,;\,5\right]$	 $\mathrm{hk} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{rk} = 2.5$ $\mathrm{x} \in \left[0\,;\,2.5\right]$
1a) $\mathrm{hk} = 2\mathrm{rk} = 10\,;\mathrm{x} \in \left[0\,;\,10\right]$ 1b) $\mathrm{hk} = 5\mathrm{rk} = 25\,;\mathrm{x} \in \left[0\,;\,25\right]$ Bergparabolen Voor $\mathrm{rk} < \mathrm{hk} < 2\mathrm{rk}$ is er enkel een randmaximum met $\mathrm{hz} = 0$, dus twee cirkels. (top in het tweede kwadrant).	Rechte, de oppervlakte is een eerstegraadsfunctie. Er is een randmaximum voor $\mathrm{hz} = 0$, de oppervlakte wordt bepaald door twee cirkels: grond- en bovenvlak, de „cilinder“ is plat (zie ook geval 1).	Dalparabool. De top ligt in het vierde kwadrant (minimum). Ook hier is er een randmaximum zoals in geval 2 en 1.

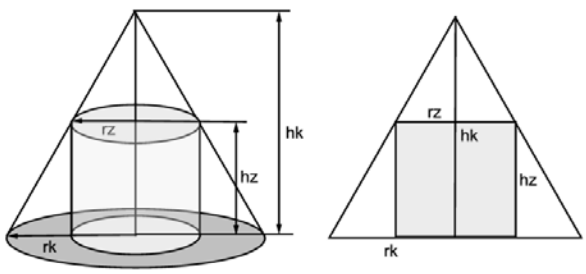
4.2 Doelfuncties die geen tweedegraadsfuncties zijn

Bepaling van het maximum/ minimum zonder analyse met CAS
(2 methoden):

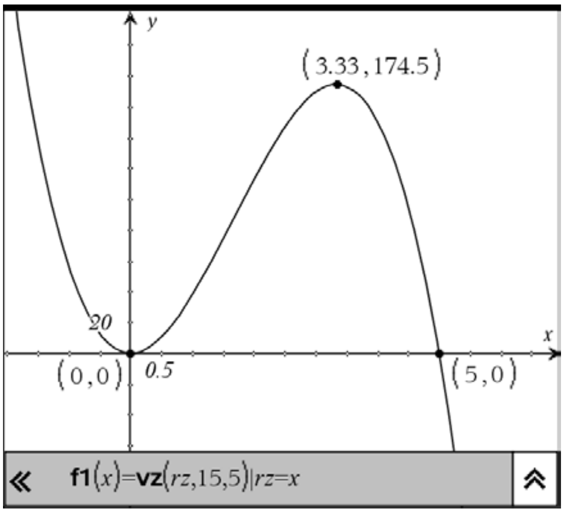
1. Functies: fMax() resp. fMin()
2. Grafisch

Voorbeeld 5: cilinder in kegel, maximaal cilindervolume

In een kegel met straal rk van het grondvlak en hoogte hk wordt een cilinder beschreven met cilinderstraal rz en hooghte hz. Kies $\mathrm{hk} = 15$ en $\mathrm{rk} = 5$. Bepaal de cilinder met het maximaal volume.



$v(hz,rz):=\pi\cdot rz^2\cdot hz$	*Done*
$\text{solve}\left(\frac{hk}{rk}=\frac{hk-hz}{rz},hz\right)$	$hz=hk\cdot\left(1-\frac{rz}{rk}\right)$
$vz(rz,hk,rk):=v(hz,rz)\mid hz=hk\cdot\left(1-\frac{rz}{rk}\right)$	*Done*
$vz(rz,15,5)$	$-3\cdot rz^2\cdot(rz-5)\cdot\pi$
$\text{fMax}(vz(rz,15,5),rz)$	$rz=-\infty$
$\text{fMax}(vz(rz,15,5),rz)\mid 0\le rz\le 5$	$rz=\frac{10}{3}$
$vz(rz,15,5)\mid rz=\frac{10}{3}$	174.5



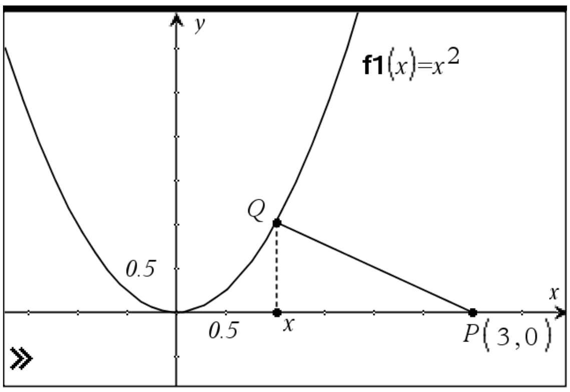
Opeenvolgende stappen in bovenstaande schermen:

1) Doelfunctie (cilindervolume) definiëren.
2) Nevenvoorwaarde (gelijkvormige driehoeken) oplossen naar hz, dit levert het cilindervolume in functie van rz.
3) Cilindervolume voor $\mathrm{hk} = 15$ en $\mathrm{rk} = 5$ (veelterm van graad 3).
4) Aangezien het gezochte maximum een lokaal maximum is, moet het domein bij toepassing van fMax() worden beperkt: $\mathrm{rz} \in \left[0\,;\,\mathrm{rk} = 5\right]$
5) Grafische bepaling van het maximum en de nulpunten van de derdegraadsveelterm . Merk op: de nulpunten liggen symmetrisch t.o.v. het maximum!

Opgave 4.21

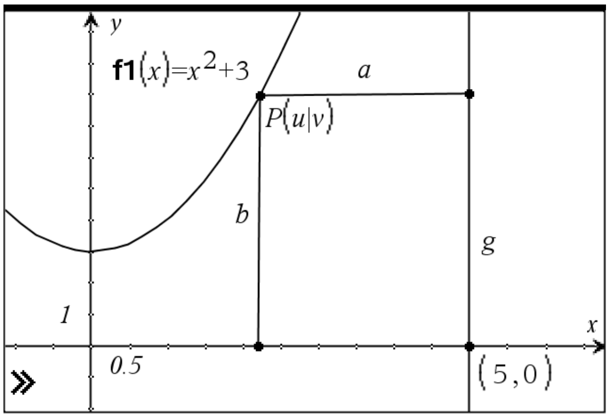
a) Hoe groot is de kleinste afstand van het punt $\mathrm{P}\left(3 \mid 0\right)$ tot de parabool $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right) = \mathrm{x}^2$?

b) Welk punt van de parabool $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right) = 2\mathrm{x}^2$ heeft de kortste afstand tot het punt $\mathrm{P}\left(0 \mid 4\right)$?



Opgave 4.22

Gegeven :
Parabool $p: f1(x) = x^2 + 3$
Rechte $g: \; x = 5$
Het punt $P(u \mid v)$ ligt op p in het eerste kwadrant en links van g.



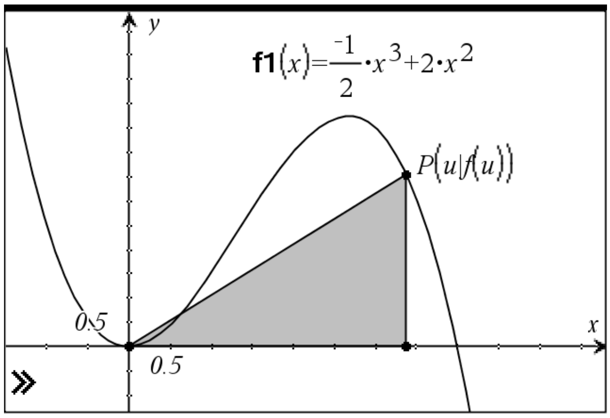
Door P worden de evenwijdigen a en b met de coördinaatassen getekend.
De x-as, a, b en g begrenzen een rechthoek. Hoe moet men P kiezen, zodat

a) de rechthoek een maximale oppervlakte heeft ?

b) de rechthoek - als $u < 2$ moet zijn - een minimale oppervlakte heeft?

Opgave 4.23

Gegeven de functie
$f1(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2$
Het punt $P(u \mid f(u))$ ligt op de grafiek van $f1$.



a) Bepaal P zodanig dat de oppervlakte van de driehoek maximaal wordt.

b) De gearceerde driehoek wordt geroteerd rond de x-as . Bepaal P zodanig dat de verkregen omwentelingskegel een maximaal volume heeft.

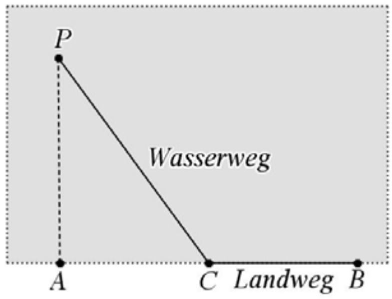
c) De gearceerde driehoek wordt geroteerd rond de as $x = u$. Bepaal P zodanig dat de verkregen omwentelingskegel een maximaal volume heeft.

Opgave 4.24

We bevinden ons in een roeiboot op positie P, op 5 km verwijderd van de oever ($\left|PA\right| = 5\,km$).

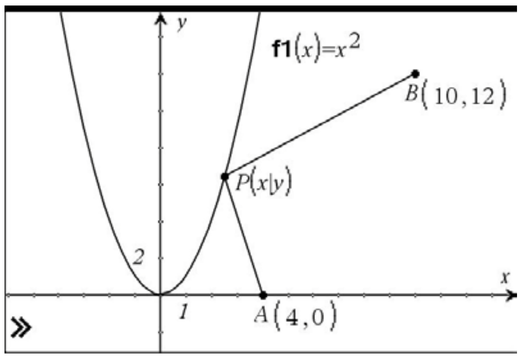
We willen naar punt B , dat door een 6 km lange straat vanuit A kan worden bereikt ($\left|AB\right| = 6\,km$).

We roeien met 2 km/h en wandelen aan 4 km/h. In welk punt C moeten we aan land gaan, opdat we ons doel zo snel mogelijk zouden bereiken? Bepaal de lengte $\left|CB\right|$ en tevens de minimale tijd om van P in B te geraken.



Opgave 4.25

Kortste weg (van rechte stukken)
Een weg via rechte stukken brengt ons van $A(4 \mid 0)$ via een punt $P(x \mid y)$, dat op de parabool $y = x^2$ ligt, naar het punt $B(10 \mid 12)$. Bepaal het punt P op de parabool zodanig dat de route $A - P - B$ een minimale lengte heeft.



Uitbreiding: het principe van Fermat
"Een lichtstraal volgt tussen twee punten die weg, die voor de-lichtstraal het minst tijd vergt." (Pierre de Fermat, 1658). Hieruit worden in de optica de terugkaatsingswet en de brekingswet afgeleid.
Voor de terugkaatsing geldt: de kortste weg is ook de weg die het minst tijd vergt (constante lichtsnelheid in één medium).
Beschouw de parabool als spiegel en de weg $A - P - B$ als lichtstraal. Toon aan dat de terugkaatsingswet geldt voor de kortste weg.
Teken hiertoe de raaklijn en de normaal aan de parabool in P.
Als L een punt is op de normaal dan geldt:
$\sphericalangle APL = \sphericalangle BPL$ (invalshoek = terugkaatsingshoek)

Pierre de Fermat

Varianten:
P ligt op een rechte: $y = -\frac{4}{5} \cdot x + 20$; $A(20 \mid 0)$, $B(0 \mid 10)$

P ligt op een hyperbool: $y = \dfrac{50}{x - 3}$; $A(15 \mid 0)$, $B(0 \mid 10)$

P ligt op een parabool: $y = 0{,}1 \cdot (x - 15)^2 + 5$; $A(10 \mid 0)$, $B(0 \mid 15)$

Toon telkens aan dat de kortste weg voldoet aan de terugkaatsingswet.

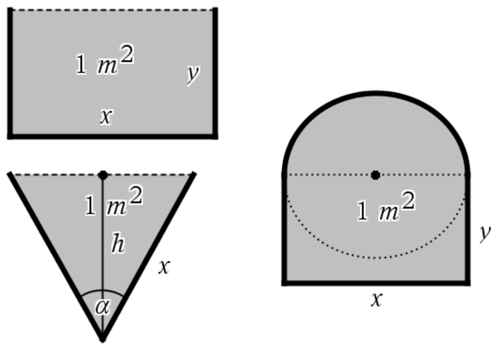
Opgave 4.26

Hydraulisch gunstige profielen.
Een kanaal moet een doorsnede $A = 1\,\text{m}^2$ hebben. Omwille van het materiaalgebruik en de wrijving wordt er gezocht naar de kleinste omtrek van de rand die in contact is met het water. Wat zijn de afmetingen van de doorsnede, als de vorm

a) een rechthoek is die boven open is.

b) een omgekeerde gelijkbenige driehoek is die boven open is.

c) Een rechthoek is met bovenaan een halve cirkel.

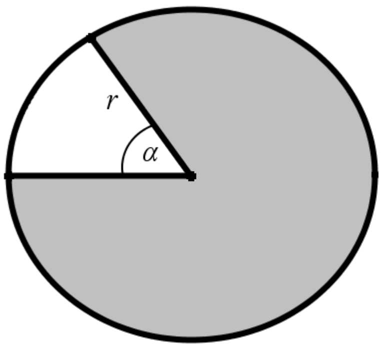


Opgave 4.27

Uit een cirkelvormig stuk blik met straal r moet men na het uitsnijden van een sector met hoek α een kegelvormige trechter plooien.

a) Bepaal de inhoud van de trechter als functie van de hoek α.

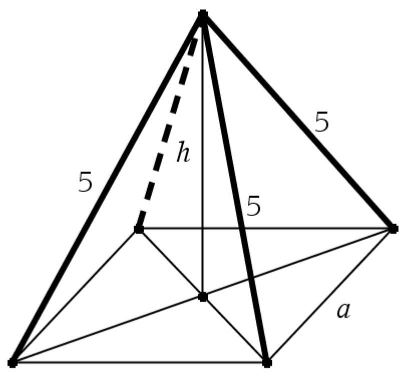
b) Voor welke hoek α wordt de inhoud maximaal?



Uitbreiding:
Met de uitgesneden sector wordt een kegel gevormd. Bepaal de hoek α zodanig dat de som van de beide kegelvolumes maximaal wordt.

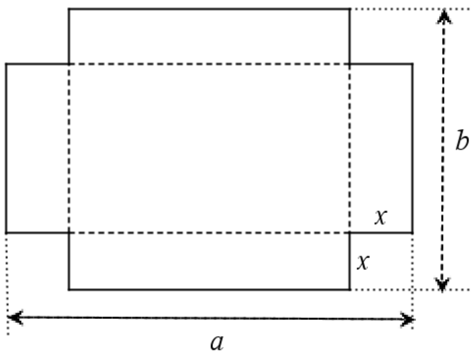
Opgave 4.28

Met vier 5 m lange staven moet een tent worden gemaakt in de vorm van een piramide, met een vierkant als grondvlak. Hoe hoog wordt de tent, als het volume zo groot mogelijk moet zijn?



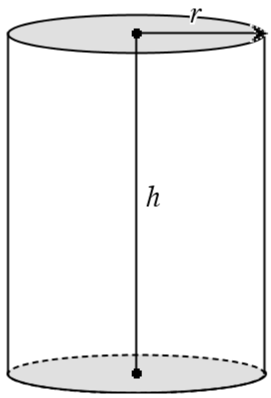
Opgave 4.29

Van een rechthoekig karton met zijden a en b wordt in elk van de hoeken een vierkant met zijde x weggesneden, het overblijvende deel wordt omgeplooid tot een open doos. Hoe groot moet men de zijde x kiezen, om een doos te verkrijgen met een maximaal volume ?
Getallenvoorbeeld: $a = 12\,\mathrm{cm}$ en $b = 8\,\mathrm{cm}$



Opgave 4.30

Een bierproducent wil een nieuw bierblik ontwikkelen, waarvan het volume $V = 330\,\mathrm{cm}^3$ is. We hebben als opdracht de verpakking te optimaliseren. Deze heeft de vorm van een cilinder waarbij het grond- en bovenvlak uit metaal bestaan en de mantel uit karton. De kosten per cm^2 zijn 0.05 ct voor metaal en 0.03 ct voor karton.



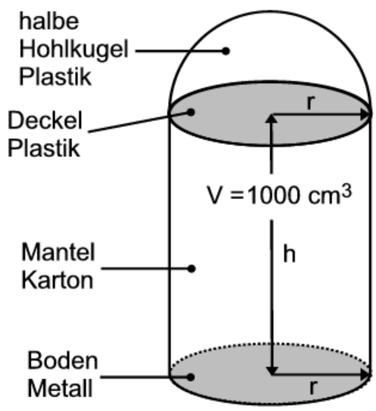
a) Hoe moeten de cilinderstraal r en de cilinderhoogte h worden gekozen, opdat het bierblik zo weinig mogelijk zou kosten?

b) Hoeveel kost een blik?

Opgave 4.31

Een melkproducent wou voor het voetbal EK 2008 een nieuwe verpakking ontwikkelen, met minimale kosten.
De verpakking bestaat uit een cilindervormige doos. De mantel bestaat uit karton, de bodem uit metaal en het deksel uit plastic.
De cilinder (straal r, hoogte h)
moet een volume van $1000\,\mathrm{cm}^3$ hebben.

Op het deksel van de doos wordt een halve voetbal geplaatst (holle halve plastic bol).



De materiaalkosten per cm^2 zijn 0.1 ct voor metaal, 0.08 ct voor plastic en 0.06 ct voor karton

a) Hoe moeten r en h worden gekozen, opdat de verpakking zo weinig mogelijk zou kosten?

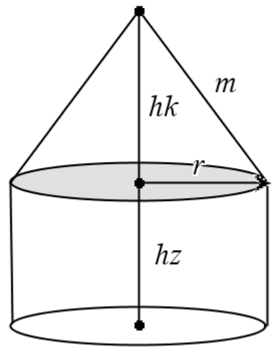
b) Hoe groot zijn dan die minimale kosten voor een verpakking?

c) Welke straal r heeft de verpakking, als ze 1 € kost?

Opgave 4.32

Op een cilinder met straal r en hoogte $\mathrm{h_Z} = 30\,\mathrm{cm}$ wordt een kegel met staal r van het grondvlak, hoogte $\mathrm{h_K}$ en apothema $\mathrm{m} = 90\,\mathrm{cm}$ geplaatst.

Bepaal de totale hoogte en de straal van het grondvlak, om een maximaal volume te verkrijgen.

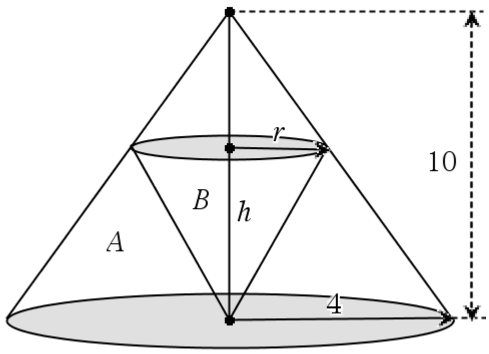


Opgave 4.33

Gegeven een kegel A waarvan het grondvlak een straal van 4 cm heeft en de hoogte 10 cm is. In deze kegel A moet een kegel B worden beschreven, waarvan de top samenvalt met het middelpunt van de kegel A. Bepaal de hoogte van de kegel B, als deze

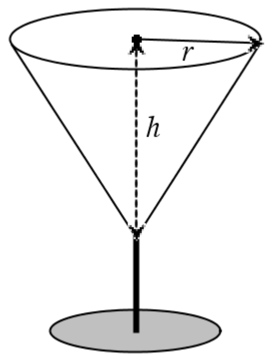
a) een maximaal volume heeft

b) een maximale oppervlakte heeft.



Opgave 4.34

Een kegelvormig champagneglas met gegeven volume V moet een minimale zijdelingse oppervlakte hebben .
Hoe moet men r en h kiezen?
Getallenvoorbeeld: $\mathrm{V} = 200\,\mathrm{cm}^3$



Dit cahier is een vertaling van een publicatie van T³ Zwitserland:

Quadratische Funktionen und Gleichungen

Dynamisch und CAS-gerecht

Auteurs: Benno Frei, René Hugelshofer en Robert Märki

Dit cahier over „Functies en vergelijkingen van de tweede graad“ illustreert een CAS-aanpak van dit onderwerp (CAS=Computer Algebra System). Deze publicatie bevat naast korte theoretische bijdragen een grote keuze van oefeningen met verschillende moeilijkheidsgraad en uit verschillende vakgebieden. De onderwerpen zijn dan ook geschikt voor de verschillende richtingen in het ASO, TSO en KSO. De leerkracht kan hieruit een keuze maken, in overeenstemming met het leerplan en geschikt voor de leerlingen.

Augustus 2010