

## Den gömda skatten

I denna aktivitet så illustreras på ett tydligt sätt hur dynamiska geometriprogram kan vara ett värdefullt hjälpmedel i lösningen av ett intressant geometriproblem. Elever som är duktiga på att hantera geometriprogram måste fortfarande utföra uppgiften att göra en matematisk modell av problemet. Kreativt tänkande är precis lika viktigt som det alltid har varit.

Många elever med tillgång till program som TI-Nspire och som har varit "utsatta" för detta klassiska till synes olösliga problem har också vittnat om överraskningen när de flyttar startpunkten och upptäcker att skatten ligger kvar på samma plats hela tiden. Den överraskande upptäckten motiverade många elever att lösa problemet matematiskt och inte bara konstatera att "det verkar som ...".

### Själva historien



På vinden hos din avlidna farfar hittar du ett pappersark som beskriver platsen för en nedgrävd skatt på en ö. Så här stod det på papperet: På ön ska det finnas två träd: en ek (E) och en tall (T). För att hitta skatten ska man följa dessa steg:

1. Börja vid hyddan (start).
2. Gå till tallen (T), och räkna antalet steg.

3. Vrid dig nu till höger 90 grader och stega dig fram samma antal steg som i punkt 2. Stick ner en pinne vid denna plats (X).
4. Gå tillbaka till hyddan och gå nu till eken (E). Räkna antalet steg.
5. Vrid dig nu till vänster 90 grader och stega dig fram samma antal steg som i punkt 4. Stick ner en pinne vid denna plats (Y).
6. Bestäm nu mittpunkten (M) mellan X Och Y. Det är här skatten finns. Nu kan du börja gräva. *Fortsättning nästa sida!*



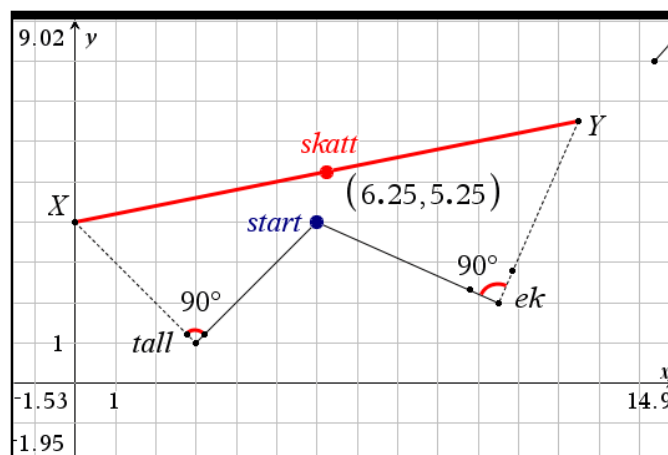
Du beger dig med ett sällskap till ön men när du kommer dit så ser du ingen hydda. Den har antagligen blåst bort i någon storm. Men som tur är så har du nyligen gått en kurs i klassisk geometri så du löser problemet ändå och hittar din farfars skatt. På din medföljande bärbara dator så visar du dina otåliga vänner en dynamisk geometrisk konstruktion över situationen. Den finns på nästa sida.

Om man flyttar startpunkten märker man att platsen för skatten inte flyttas. Den ligger fast! Det måste ju betyda att man inte behöver någon startplats för att hitta skatten. Hur är det möjligt säger dina vänner? Du replikerar: *jag kan faktiskt presentera ett bevis för att man kan välja vilken startplats som helst.*

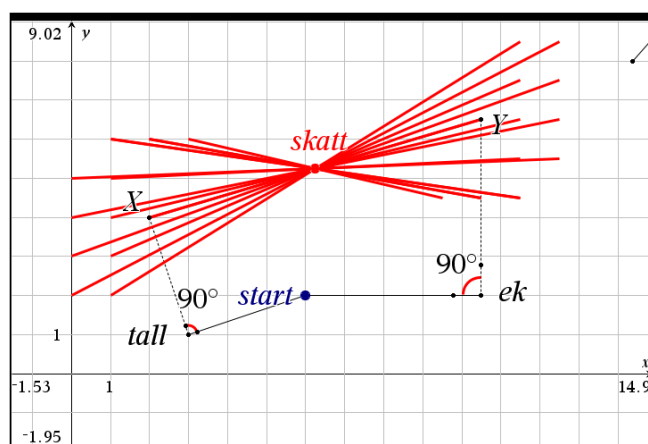
Nog med prat! På nästa sida finns nu konstruktionen. Dra i startpunkten och observera vad som händer.

### Konstruktionen

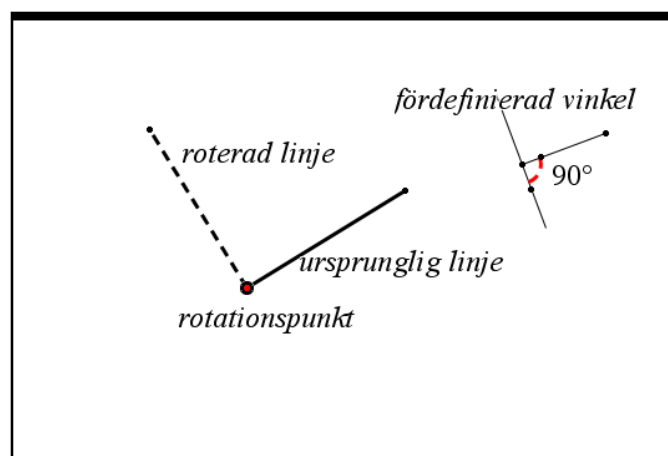
På sid 3 finns nu en konstruktion där man kan dra i startpunkten och inget annat. Hela konstruktionen ligger i ett koordinatsystem och man ser att koordinaterna för skatten inte ändras. Redan nu kan nog vissa elever börja fundera hur det kan komma sig att startpunkten inte har någon betydelse för skattens position.



Bland verktygen för grafer och geometri finns under Spåra ett verktyg som heter **Spåra geometri**. Markera detta verktyg i menyn och klicka sedan på den röda linjen mellan X och Y. Därefter så drar du i startpunkten. Du kan nu se spåren från linjens rörelse och man upptäcker att punkten vid skatten inte rör sig.



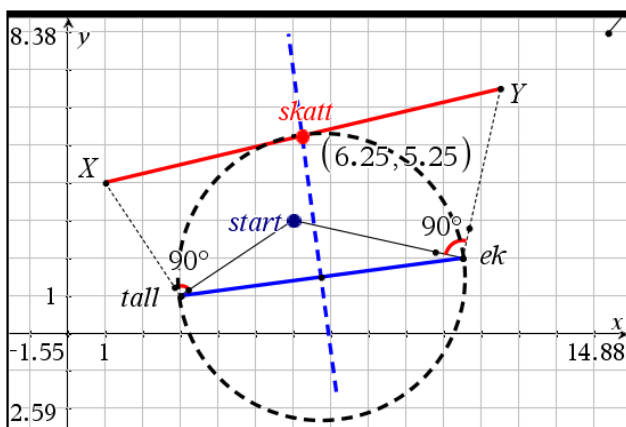
För att konstruera linjesegment som ska ha samma längd som den ursprungliga linjen och sedan vara vridet 90 grader motsols resp. medsols så kan du följa instruktionen nedan. Se också bilden.



1. Skapa först en vinkelmätning som ska tjäna som fördefinierad vinkel för rotation.

- På menyn Transformation, välj Rotation.  
(I grafapplikationen klickar du på Geometri > Transformation > Rotation.)
- Klicka på det objekt som ska roteras.
- Klicka på en plats eller punkt för att definiera rotationspunkten.
- Klicka på punkterna i den fördefinierade vinkeln.  
En roterad bild av objektet visas.

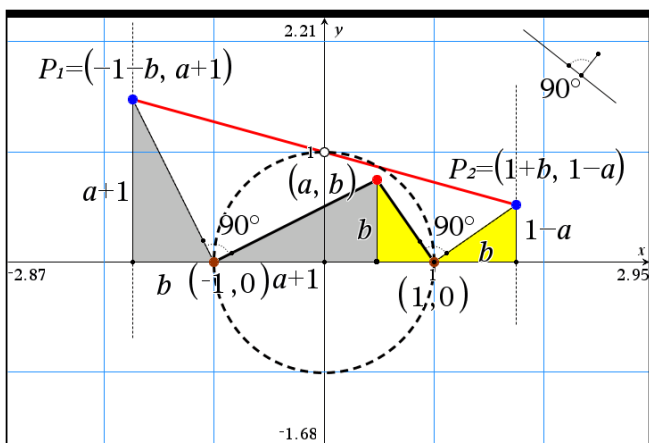
Om man ritar ett linjesegment mellan tallen och eken och sedan konstruerar *mittpunktsnormalen* så upptäcker man att den skär genom skattens position. Genom att dra en cirkel med medelpunkt i linjesegmentets *mittpunkt* så ser man också att avstånden från cirkelns medelpunkt till skatten, tallen och eken verkar vara lika. Se bilden.



I figuren nedan visar vi nu koordinaterna för punkterna  $P_1$  och  $P_2$ . Eleverna ska ju själva beräkna dessa utifrån längder på olika sidor i konstruktionen. Här kan det också vara läge att gå igenom varför vi får par av *kongruenta* trianglar.

### Över till algebran

Nu över till algebran. Eleverna ska alltså placera tallen och eken i punkterna  $(-1, 0)$  resp.  $(1, 0)$ . I elevernas TI-Nspire-dokument så är inte koordinaterna för  $P_1$  och  $P_2$  beräknade.



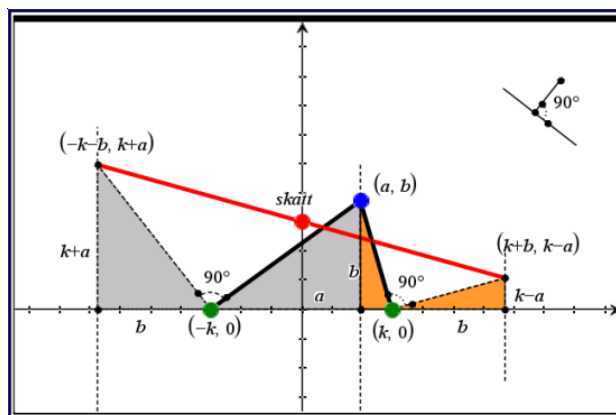
Ägna en stund åt figuren som eleverna har. Vi har ju hjälpt dem en hel del genom att beräkna kateternas längder i de rätvinkliga trianglarna. Du kan som lärare ta bort en del av de utsatta måtten i elevernas figur. Se till att alla förstår att vi har två par av kongruenta trianglar.

När man väl fått koordinaterna för punkterna  $P_1$  och  $P_2$  beräknade så räknar man enkelt ut mittpunktens koordinater.  $a$  och  $b$  försvinner i uttrycken. Se figur nedan.

Som syns på förra sidan kan man enkelt beräkna koordinaterna för punkterna  $P_1$  och  $P_2$ . Mittpunkten på den "röda sträckan" där skatten finns har då koordinaterna (använd mittpunktsformeln)

$$\frac{-1-b+1+b}{2}, 0, \frac{a+1+1-a}{2}, 1. \quad a \text{ och } b \text{ försvinner i uttrycken!}$$

Skatten är alltså gömd i punkten med koordinaterna  $(0, 1)$ . Vi kan alltså ha vilka värden som helst på koordinaterna för startpunkten.



Du kan också låta eleverna beräkna skattens position om tallen och eken är placerade i koordinaterna  $(-k, 0)$  resp.  $(k, 0)$ . Vi har alltså placerat origo precis i mittmellan tallen och eken.

Vi får enligt mittpunktsformeln

$$x_{skatt} = \frac{(k+b) + (-k-b)}{2} = 0 \quad y_{skatt} = \frac{(k-a) + (k+a)}{2} = k$$

Skatten finns alltså i punkten  $(0, k)$ . Den ligger efter mittpunktsnormalen till linjen mellan träden och på ett avstånd som är hälften av avståndet mellan träden.

Diskutera med eleverna om andra lösningsstrategier. T.ex. kan man beräkna ekvationen för den röda linjen i figuren ovan och sedan beräkna linjens skärning med  $y$ -axeln.